ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Maciej SIWCZYŃSKI

Politechnika Śląska

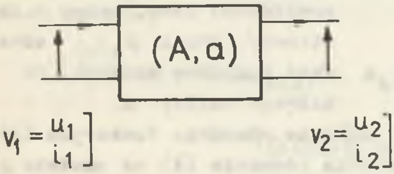
Zuzanna SIWCZYŃSKA

Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

RÓWNANIA FUNKCYJNE W TEORII UKŁADÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie. W pracy sformułowano teorię niejednorodnych liniowych obwodów o parametrach rozłożonych z użyciem równań funkcyjnych. Podano ogólne rozwiązania równania funkcyjnego obwodu. Następnie rozpatrzono obwody kawałkami różniczkowalne, kawałkami jednorodne, kawałkami analityczne. W tych przypadkach równanie funkcyjne sprowadzono do równań całkowych obowiązujących na kawałkach. Podano rozwiązanie tych równań całkowych metodą perturbacyjną, metodą kolejnych przybliżeń i metodą szeregów potęgowych. Zaproponowano też metodę faktoryzacji równania funkcyjnego.

1. Czwórniki skupione



Rys. 1. Czwórnik skupiony

Na rysunku 1 pokazano czwórnik skupiony, w którym wektor napięcie - prąd v_1 jest związany z wektorem napięcie - prąd v_2 odwzorowaniem afinicznym (A,a):

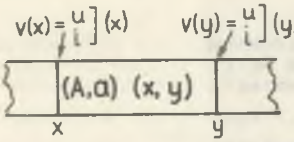
$$v_1 = (A,a)v_2 = Av_2 + a \tag{1}$$

Odwzorowanie to składa się z macierzy łańcuchowej A i wektora źródeł a. Czwórnik nie zawierający źródeł autonomicznych ma zerowy wektor źródeł i będzie nazywany bezźródłowym. Jednostkowe odwzorowanie afiniczne ma postać $(I,\emptyset)$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Złożenie odwzorowań afinicznych, odpowiadające kaskadzie czwórników, odbywa się według wzoru:

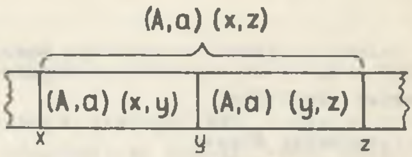
$$(A_1,a_1) \circ (A_2,a_2) = (A_1A_2, A_1a_2 + a_1) \tag{2}$$

2. Równania funkcyjne linii

W pokazanym na rys. 2 odcinku linii operator afiniczny wiążący napięcie i prąd w miejscu x z napięciem i prądem w miejscu y zależy od pary (x,y), $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$:



Rys. 2. Odcinek linii



Rys. 3. Dwa przylegające odcinki

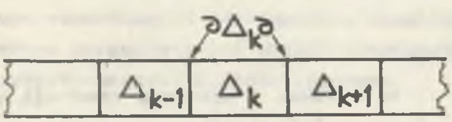
$$v(x) = (A,a)(x,y)v(y) = A(x,y)v(y) + a(x,y). \tag{3}$$

Kaskada widoczna na rys. 3 prowadzi bezpośrednio do równania funkcyjnego, w którym niewiadomą jest operator afiniczny odcinka linii zawartego między przekrojami x,y:

$$(A,a)(x,z) = (A,a)(x,y) \circ (A,a)(y,z), \tag{4}$$

gdzie $x \leqslant y \leqslant z$.

Sformułujemy podstawową własność równania (4). W tym celu dokonamy tzw. <u>regularnego podziału</u> linii dzieląc ją na skończony ciąg rozłącznych, przylegających do siebie otwartych odcinków Δ_k, $k = 1,2,\ldots$ (rys. 4). Symbolami $\partial\Delta_k$, $\Delta_k\partial$, $\partial\Delta_k\partial$ oznaczymy brzegi odcinka Δ_k odpowiednio: lewy, prawy i obustronny. Przez $\Delta_{k(x)}$ oznaczać będziemy odcinek, do którego należy x.



Rys. 4. Regularny podział linii

Niech $x,y,z \in \Delta_k$ i niech $(A,a)_k(x,y)$ spełnia równanie funkcyjne (4) - powiemy też, że funkcja $(A,a)_k(x,y)$ spełnia równanie (4) na odcinku Δ_k. Wówczas funkcja

$$(A,a)(x,y) = (A,a)_{k(x)}(x, \Delta_{k(x)}\partial) \circ (A,a)_{[k(x)+1]}(\partial\Delta_{[k(x)+1]}\partial) \circ \ldots$$
$$\circ (A,a)_{[k(y)-1]}(\partial\Delta_{[k(y)-1]}\partial) \circ (A,a)_{k(y)}(\partial\Delta_{k(y)}, y) \tag{5}$$

jest rozwiązaniem równania (4).

Założenie operatorów afinicznych dane wzorem (2) rozbija równanie (4) na dwa równania funkcyjna

$$A(x,z) = A(x,y)\,A(y,z) \tag{6a}$$

$$a(x,z) = A(x,y)\,a(y,z) + a(x,y). \tag{6b}$$

Widać, że równanie (6a) jest niezależne od (6b). Dlatego równanie (6a) odgrywać będzie dalej rolę zasadniczą.

Ze względów praktycznych dużą rolę odgrywają <u>linie kawałkami różniczkowalne</u>, tj. takie dla których istnieją regularne podziały na odcinki Δ_k, na których funkcje $(A,a)_k(x,y)$ są różniczkowalne. Różniczkując wówczas równania (6) na odcinku Δ_k podług z w punkcie $z = y$ otrzymamy:

$$A'_{k,y}(x,y) = A_k(x,y)H_k(y) \tag{7a}$$

$$a'_{k,y}(x,y) = A_k(x,y)h_k(y) \tag{7b}$$

gdzie

$$H_k(y) = A'_{k,z}(y,y), \quad h_k = a'_{k,z}(y,y) \tag{8a,b}$$

są tzw. <u>tworzącymi</u> macierzy $A_k(x,y)$ i źródła $a_k(x,y)$, będziemy też mówili: tworzącymi na odcinku Δ_k. Tworzące reprezentują rozkłady parametrów i źródeł autonomicznych wzdłuż linii, dlatego uważamy je za znane w procesie analizy obwodu. Funkcje $A_k(x,y)$, $a_k(x,y)$ można wyznaczyć przez rozwiązanie równań różniczkowych (7) przy warunkach początkowych

$$A_k(x,x) = I, \quad a_k(x,x) = \Theta \tag{9a,b}$$

Rozwiązanie równania funkcyjnego (4) dla funkcji kawałkami różniczkowalnych ma postać:

$$\begin{aligned}(A,a)(x,y) = {} & (A,a)_{k(x)}(x, \Delta_{k(x)}^{\partial}) \circ (A,a)(\Delta_{k(x)}^{\partial}, \Delta_{k(x)}{}^{\partial}) \circ \\ & \circ (A,a)_{[k(x)+1]}({}^{\partial}\Delta_{[k(x)+1]}^{\partial}) \circ (A,a)(\Delta_{[k(x)+1]}^{\partial}, \Delta_{[k(x)+1]}^{\partial}) \circ \quad \ldots \\ & \ldots \circ (A,a)_{[k(y)-1]}({}^{\partial}\Delta_{[k(y)-1]}^{\partial}) \circ (A,a)(\Delta_{[k(y)-1]}^{\partial}\, \Delta_{[k(y)-1]}^{\partial}) \circ \\ & \circ (A,a)_{k(y)}({}^{\partial}\Delta_{k(y)}, y)\end{aligned} \tag{10}$$

Powróćmy do równań (7a,b) dla odcinka Δ_k. Jeżeli znajdziemy rozwiązanie równania (7a), to rozwiązanie równania (7b) można określić wzorem

$$a_k(x,y) = \int_x^y A_k(x,\xi)\, h_k(\xi) d\xi. \tag{11}$$

Odcinek Δ_k nazwiemy <u>wzajemnym</u>, jeżeli nie zawiera on rozłożonych źródeł sterowanych, tj. gdy macierz $H_k(y)$ ma strukturę

$$H_k(y) = \begin{bmatrix} 0 & Z_k \\ Y_k & 0 \end{bmatrix}(y) \tag{12}$$

gdzie Z_k i Y_k to impedancja podłużna i admitancja poprzeczna odcinka na jednostkę długości. Źródła sterowane rozłożone zapełniają miejsca zerowe w macierzy (12). Z tożsamości Jakobiego dla równania (7a) wynika, że dla odcinka wzajemnego

$$\left|A_k(x,y)\right| = e^{\int_x^y tr\left[H_k(\xi)\right]d\xi} = 1 \tag{13}$$

3. Linie z nieznaczną niejednorodnością

Rozważmy odcinek linii, na którym istnieje tworząca $H + \varepsilon F(x)$, gdzie H jest stałą macierzową, a ε małym parametrem. Równanie różniczkowe (7a) na tym odcinku przyjmuje postać:

$$A'_y(x,y) = A(x,y)\left[H + \varepsilon F(y)\right]. \tag{14}$$

Równanie to doprowadzimy do równania całkowego Volterry:

$$A(x,y) = e^{(y-x)H} + \varepsilon\int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\ F(x+\xi)e^{(y-x-\xi)H}d\xi \tag{15}$$

Stosując metodę perturbacyjną poszukujemy rozwiązania równania (15) w postaci szeregu potęgowego parametru:

$$A(x,y) = \left[I + \varepsilon A_1(x,y) + \varepsilon^2 A_2(x,y) + \ldots\right] e^{(y-x)H} \tag{16}$$

Podstawiając funkcję (16) do równania (15) łatwo otrzymuje się formuły rekurencyjne dla macierzy $A_n(x,y)$:

$$A_{n+1}(x,y) = \int_0^{y-x} A_n(x,x+\xi)e^{H\xi}F(x+\xi)e^{-\xi H}d\xi, \tag{17}$$

$$A_0(x,y) \equiv I.$$

Poszczególnych funkcji $A_n(x,y)$ będziemy poszukiwać w postaci szeregów

$$A_n(x,y) = (y-x)^n \sum_{m=0}^{\infty} (y-x)^m A_{nm}(x) \tag{18}$$

W tym celu rozwinięto w szereg potęgowy funkcję

$$\begin{aligned} &F(x+\xi) = F_0(x) + \xi F_1(x) + \xi^2 F_2(x) + \ldots. \\ &F_n(x) = \frac{1}{n!}\left[F^{(n)}(x+\xi)\right]_{\xi=0} \end{aligned} \tag{19}$$

Korzystając ze wzoru Bakera - Campbella - Hausdorffa [2]

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots$$

gdzie

$$[A,B] = AB - BA$$

jest komutatorem macierzy, mamy kolejne rozwinięcia:

$$e^{\xi H} F_0(x) e^{-\xi H} = F_0(x) + \xi[H,F_0(x)] + \frac{1}{2}\xi^2[H,[H,F_0(x)]] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\xi^3[H,[H,[H,F_0(x)]]] + \ldots$$

$$e^{\xi H}\xi F_1(x) e^{-\xi H} = \xi F_1(x) + \xi^2[H,F_1(x)] + \frac{1}{2}\xi^3[H,[H,F_1(x)]] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\xi^4[H,[H,[H,F_1(x)]]] + \ldots$$

$$e^{\xi H}\xi^2 F_2(x) e^{-\xi H} = \xi^2 F_2(x) + \xi^3[H,F_2(x)] + \frac{1}{2}\xi^4[H,[H,F_2(x)]] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\xi^5[H,[H,[H,F_2(x)]]] + \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Po zsumowaniu powyższych wzorów otrzymujemy rozwinięcie

$$e^{\xi H} F(x+\xi) e^{-\xi H} = Q_0(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \ldots \tag{20}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
Q_o(x) &= F_o(x)\\
Q_1(x) &= \left[H, F_o(x)\right] + F_1(x)\\
Q_2(x) &= \tfrac{1}{2}[H,[H,F_o(x)]] + [H,F_1(x)] + F_2(x)\\
Q_3(x) &= \tfrac{1}{3!}[H,[H,[H,F_o(x)]]] + \tfrac{1}{2}[H,[H,F_1(x)]] + [H,F_2(x)] + F_3(x)\\
&\dots \qquad \dots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Zanim skorzystamy ze wzoru (17), trzeba wymnożyć szeregi (18) i (20):

$$
\begin{aligned}
&A_n(x,x+\xi)e^{\xi H}F(x+\xi)e^{-\xi H} =\\
&= \xi^n \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m A_{nm}(x)\left[Q_o(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \dots\right] =\\
&= \xi^n A_{no}(x)Q_o(x) + \xi^{n+1}\left[A_{n1}(x)Q_o(x) + A_{no}(x)Q_1(x)\right] +\\
&+ \xi^{n+2}\left[A_{n2}(x)Q_o(x) + A_{n1}(x)Q_1(x) + A_{no}(x)Q_2(x)\right] + \dots
\end{aligned}
$$

Wzór (17) daje

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}(x,y) = (y-x)^{n+1}\Big\{ &\frac{1}{n+1}A_{no}(x)\,Q_o(x) +\\
&+ (y-x)\frac{1}{n+2}\left[A_{n1}(x)\,Q_o(x) + A_{no}(x)\,Q_1(x)\right] +\\
&+ (y-x)^2\frac{1}{n+3}\left[A_{n2}(x)\,Q_o(x) + A_{n1}(x)\,Q_1(x) +\right.\\
&\left. + A_{no}(x)\,Q_2(x)\right] + \dots\Big\}
\end{aligned}
$$

Stąd łatwo określić wzór rekurencyjny dla macierzy - współczynników szeregu (18):

$$
A_{n+1,m}(x) = \frac{1}{n+1+m}\sum_{p=0}^{m} A_{n,m-p}(x)\,Q_p(x), \tag{22}
$$

przy czym

$$
A_{oo}(x) = I, \quad A_{om}(x) \equiv \Theta, \quad \text{dla} \quad m > 0.
$$

4. Linie kawałkami analityczne

Linią kawałkami analityczną nazywamy linię, dla której istnieje podział regularny taki, że na poszczególnych odcinkach tego podziału istnieje tworząca rozwijalna w odpowiednio zbieżne szeregi potęg przyrostów argumentu x. Weźmy pod uwagę odcinek Δ linii, na którym istnieje tworząca $H + F(x)$, gdzie H jest macierzą niezależną od x.

Równanie (7a) ma w tym przypadku postać:

$$A'_y(x,y) = A(x,y)\left[H + F(y)\right] \tag{23}$$

Równanie (23) łatwo doprowadzić do równania całkowego Volterry:

$$A(x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\, F(x+\xi)\, e^{(y-x-\xi)H} d\xi \tag{24}$$

Rozważmy równanie (24) z punktu widzenia zasady odwzorowań zwężających. Niech $\mathcal{B}$ będzie takim ciągłym operatorem przekształcającym przestrzeń metryczną $\mathcal{R}$ w siebie, że pewna jego potęga $\mathcal{D} = \mathcal{B}^n$ jest zwężeniem, wówczas równanie

$$x = \mathcal{B}(x)$$

ma w $\mathcal{R}$ jednoznaczne rozwiązanie. Istotnie, niech X będzie punktem stałym operatora $\mathcal{D}$, tj. $\mathcal{D}(X) = X$.

Wtedy

$$\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}\left[\mathcal{D}^k(X)\right] = \mathcal{D}^k\left[\mathcal{B}(X)\right] = \mathcal{D}^k(x_0) \to X, \quad (k \to \infty)$$

ponieważ operator $\mathcal{D}$ jest zwężeniem i dlatego ciąg

$$\mathcal{D}(x_0),\ \mathcal{D}^2(x_0),\ \mathcal{D}^3(x_0), \ldots$$

dla dowolnego $x_0 \in \mathcal{R}$ dąży do punktu stałego X operatora $\mathcal{D}$. Zatem $\mathcal{B}(X) = X$. Ten punkt stały jest jedyny, gdyż dowolny punkt stały względem $\mathcal{B}$ jest stały również względem operatora zwężającego $\mathcal{B}^n$, dla którego punkt stały może być tylko jeden. Niech

$$\left[\mathcal{B}(A)\right](x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\, F(x+\xi)\, e^{(y-x-\xi)H} d\xi \tag{25}$$

Jest to więc operator równania (24). Zbadamy istnienie i jednoznacznośc rozwiązania równania (24) w przedziale: $x,y \in \Delta$.

Metrykę wprowadzimy następująco:

$$\rho(A_1,A_2) = \max_{x,y\in\Delta} \|A_1(x,y) - A_2(x,y)\|$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest zwykłą normą macierzy $A = \left[a_{ij}\right]$, $i,j = 1,\dots,N$

$$\|A\| = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Wykażemy, że pewna potęga operatora (25) jest zwężeniem:

$$\|\left[\mathcal{B}(A_1)\right](x,y) - \left[\mathcal{B}(A_2)\right](x,y)\| =$$

$$= \left\| \int_0^{y-x} \left[A_1(x,x+\xi) - A_2(x,x+\xi)\right] F(x+\xi)e^{(y-x-\xi)H}d\xi \right\| \le$$

$$\le \mu(y-x) \max_{x,y\in\Delta} \|A_1(x,y) - A_2(x,y)\| = \mu(y-x)\,\rho(A_1,A_2),$$

gdzie

$$\mu = \max_{x,y\in\Delta} \|F(x)e^{(y-x)H}\|.$$

Stąd

$$\left\|\left[\mathcal{B}^2(A_1)\right](x,y) - \left[\mathcal{B}^2(A_2)\right](x,y)\right\| \le \mu^2 \frac{(y-x)^2}{2}\rho(A_1,A_2)$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$\left\|\left[\mathcal{B}^n(A_1)\right](x,y) - \left[\mathcal{B}^n(A_2)\right](x,y)\right\| \le \mu^n \frac{(y-x)^n}{n!}\rho(A_1,A_2)$$

Zatem:

$$\rho\left[\mathcal{B}^n(A_1),\mathcal{B}^n(A_2)\right] \le \frac{(\mu|\Delta|)^n}{n!}\rho(A_1,A_2)$$

gdzie $|\Delta|$ oznacza długość odcinka Δ. Wynika stąd, że zawsze można wybrać na tyle duże n, aby

$$\frac{(\mu|\Delta|)^n}{n!} < 1,$$

Czyli $\mathcal{B}^n$ jest zwężeniem i równanie (24) posiada jednoznaczne rozwiązanie, które jest granicą ciągu danego wzorem:

$$A_{n+1}(x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} A_n(x,x+\xi)\, F(x+\xi)\, e^{(y-x-\xi)H} d\xi \tag{26}$$

W celu dalszej analizy równania (24) wprowadzimy pojęcie szeregu absolutnie δ - zbieżnego. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n A_n, \tag{27}$$

gdzie A_n są stałymi macierzami, nazywamy absolutnie δ - zbieżnym, jeżeli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego $|x| < \delta$ szereg liczbowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \|A_n\| \tag{28}$$

jest zbieżny. Szczególnym przypadkiem jest szereg absolutnie zbieżny, dla którego przy wszystkich x szereg (28) jest zbieżny. Łatwo przekonać się, że szeregi

$$e^{xA},\ \cos(xA),\ \sin(xA)$$

są przykładami szeregów absolutnie zbieżnych. Oczywiście wielomian

$$A_0 + xA_1 + \ldots + x^n A_n,$$

jest szeregiem absolutnie zbieżnym. Niech szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n A_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n B_n$$

będą absolutnie δ - zbieżne. Zbadajmy iloczyn sum częściowych:

$$\sum_{n=0}^{N} x^n A_n \sum_{m=0}^{N} x^m B_m = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} x^{n+m} A_n B_m = \sum_{n=0}^{2N} x^n C_n,$$

gdzie

$$C_n = \sum_{p=0}^{n} A_{n-p} B_p.$$

Zachodzi nierówność

$$\sum_{n=0}^{2N} |x|^n \|C_n\| = \sum_{n=0}^{2N} |x|^n \Big\|\sum_{p=0}^{n} A_{n-p}B_p\Big\| \leqslant \sum_{n=0}^{2N} |x|^n \sum_{p=0}^{n} \|A_{n-p}B_p\| \leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{2N} |x|^n \sum_{p=0}^{n} \|A_{n-p}\|\,\|B_p\| = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} |x|^{n+m} \|A_n\|\,\|B_m\| =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} |x|^n \|A_n\| \sum_{m=0}^{N} |x|^m \|B_m\|,$$

z której wynika, że iloczyn absolutnie δ - zbieżnych szeregów również jest absolutnie δ - zbieżny.

Załóżmy teraz, że macierz $F(x+\xi)$ rozkłada się w absolutnie δ - zbieżny szereg (19). Szereg ten pomnożony przez absolutnie zbieżny szereg funkcji $e^{(y-x-\xi)H}$ daje w wyniku szereg absolutnie δ - zbieżny. Przyjmując $A_o(x,x+\xi) \equiv I$ i całkując otrzymamy $A_1(x,y)$ w postaci absolutnie δ - zbieżnego szeregu potęg $(y-x)$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że operator (25) przekształca absolutnie δ - zbieżny szereg potęg $(y-x)$ w absolutnie δ - zbieżny szereg tych potęg. Na zasadzie indukcji wynika więc ze wzoru (26), że równanie (24) ma jednoznaczne absolutnie - zbieżne rozwiązanie. Przyjmując

$$A_o(x,y) = e^{(y-x)H}$$

i stosując iteracje (26) otrzymamy

$$A_1(x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} e^{\xi H}\, F(x+\xi)\, e^{(y-x-\xi)H} d\xi =$$

$$= \left[I + (y-x)P_{11}(x) + (y-x)^2\, P_{12}(x) + \dots \right] e^{(y-x)H} =$$

$$= P_1(x,y)\, e^{(y-x)H},$$

gdzie $P_1(x,y)$ jest absolutnie δ - zbieżnym szeregiem potęg $(y-x)$. Podstawiając do wzoru (26)

$$A_n(x,y) = P_n(x,y)\, e^{(y-x)H},$$

gdzie $P_n(x,y)$ jest absolutnie δ - zbieżnym szeregiem potęg $(y-x)$ i $P_n(x,x) \equiv I$, otrzymamy

$$A_{n+1}(x,y) = P_{n+1}(x,y)\, e^{(y-x)H},$$

gdzie $P_{n+1}(x,y)$ też jest absolutnie δ - zbieżny i $P_{n+1}(x,x) \equiv I$. Zatem jedynym rozwiązaniem równania (24) jest funkcja

$$A(x,y) = \left[P_o(x) + (y-x)P_1(x) + (y-x)^2P_2(x) + \ldots\right] e^{(y-x)H}, \tag{29}$$

$P_o(x) \equiv I$, gdzie szereg w nawiasie kwadratowym jest absolutnie δ - zbieżny. Równanie (24) przepiszemy w formie

$$A(x,y)e^{(x-y)H} = I + \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\, F(x+\xi)\, e^{-\xi H} d\xi. \tag{30}$$

Będziemy wyznaczać niewiadome macierze $P_1(x)$, $P_2(x)$,... bezpośrednio, wstawiając funkcję (29) do równania (30):

$$(y-x)\, P_1(x) + (y-x)^2\, P_2(x) + \ldots =$$

$$= \int_0^{y-x} \left[P_o(x) + \xi P_1(x) + \xi^2 P_2(x) + \ldots\right] e^{\xi H}\, F(x+\xi)e^{-\xi H} d\xi. \tag{31}$$

Rozwijamy w szereg potęgowy funkcję

$$e^{\xi H}F(x+\xi)e^{-\xi H} = Q_o(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \ldots$$

przy czym macierze $Q_o(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,... wyznaczamy za pomocą wzorów (19) i (21). Wymnożenie szeregów daje:

$$\left[P_o(x) + \xi P_1(x) + \xi^2 P_2(x) + \ldots\right]\left[Q_o(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \ldots\right] =$$

$$= P_o(x)Q_o(x) + \xi\left[P_1(x)Q_o(x) + P_o(x)Q_1(x)\right] +$$

$$+ \xi^2\left[P_2(x)Q_o(x) + P_1(x)Q_1(x) + P_o(x)Q_2(x)\right] + \ldots \tag{32}$$

Wstawiając szereg (32) do równania (31) i całkując otrzymamy

$$(y-x)P_1(x) + (y-x)^2P_2(x) + (y-x)^3P_3(x) + \dots$$

$$= (y-x)P_o(x)Q_o(x) + (y-x)^2 \tfrac{1}{2}\left[P_1(x)Q_o(x) + P_o(x)Q_1(x)\right] +$$

$$+ (y-x)^3 \tfrac{1}{3}\left[P_2(x)Q_o(x) + P_1(x)Q_1(x) + P_o(x)Q_2(x)\right] + \dots,$$

a stąd wynikają wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_o(x)Q_o(x) \\ P_2(x) &= \tfrac{1}{2}\left[P_1(x)Q_o(x) + P_o(x)Q_1(x)\right] \\ P_3(x) &= \tfrac{1}{3}\left[P_2(x)Q_o(x) + P_1(x)Q_1(x) + P_o(x)Q_2(x)\right] \\ &\dots \qquad\qquad \dots \\ P_n(x) &= \tfrac{1}{m}\sum_{m=0}^{n-1} P_{n-1-m}(x)Q_m(x) \\ &\dots \qquad\qquad \dots \end{aligned} \tag{33}$$

Jeżeli funkcja $F(x+\xi)$ w równaniu (24) rozwija się w absolutnie δ - zbieżny szereg potęg ξ, to równanie to ma jedyne rozwiązanie (29), gdzie szereg w nawiasie kwadratowym jest absolutnie zbieżny. Wniosek ten ma znaczenie wówczas, gdy $F(x+\xi)$ jest wielomianem.

5. Faktoryzacja rozwiązania [6]

W tym rozdziale otrzymamy macierz $A(x,y)$ w postaci iloczynu wielomianów i funkcji wykładniczych. Zapiszmy równanie (7a) w postaci

$$A' = AH_o, \tag{34}$$

gdzie

$$H_o(y) = H(y)$$

jest tworzącą odcinka linii, symbol A' oznacza $A'_y(x,y)$.
Podstawmy w równaniu (34):

$$A(x,y) = A_{d1}(x,y)A_o(x,y),$$

co zapiszemy krótko

$$A = A_{d1}A_o. \tag{35}$$

Otrzymamy równanie

$$A'_{d1} = A_{d1}H_1, \tag{36}$$

gdzie

$$H_1 = (A_oH_o - A'_o)A_o^{-1}. \tag{37}$$

Macierz A_{d1} nazwiemy macierzą linii resztkowej. Linia resztkowa spełnia równanie (36) z tworzącą $H_1(x,y)$ zadaną wzorem (37). Macierz linii resztkowej powinna być możliwie bliska macierzy jednostkowej, co ma miejsce gdy tworząca $H_1(x,y)$ jest równa macierzy zerowej, czyli gdy spełnione jest równanie:

$$A'_o = A_oH_o \tag{38}$$

Ponieważ macierz resztkowa A_{d1} spełnia równanie (36) o takiej samej strukturze co równanie (34), można więc z macierzą A_{d1} postąpić tak samo jak z macierzą A. Kontynuując ten proces dalej uzyskuje się ciąg równań:

$$A = A_{d1}A_o$$

$$\boxed{A'_o = A_oH_o}$$

$$A_{d1} = A_{d1}H_1, \qquad H_1 = (A_oH_o - A'_o)A_o^{-1}$$

$$A_{d1} = A_{d2}A_1$$

$$\boxed{A'_1 = A_1H_1}$$

$$A'_{d2} = A_{d2}H_1, \qquad H_2 = (A_1H_1 - A'_1)A_1^{-1}$$

$$A_{d2} = A_{d3}A_2$$

$$\boxed{A'_2 = A_2H_2}$$

$$A'_{d3} = A_{d3}H_3, \qquad H_3 = (A_2H_2 - A'_2)A_2^{-1}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$A_{dn} = A_{d,n+1}A_n$$

$$\boxed{A'_n = A_nH_n}$$

$$A'_{d,n+1} + A_{d,n+1}H_{n+1}, \qquad H_{n+1} = (A_nH_n - A'_n)A_n^{-1}$$

Proces ten jest prowadzony w kierunku uzyskania najmniejszej co do normy macierzy tworzącej H_n. Stąd otrzymujemy

$$A = A_{d1}A_o = A_{d2}A_1A_o = A_{d3}A_2A_1A_o = \ldots = A_{d,n+1}A_nA_{n-1}\ldots A_1A_o$$

W powyższym ciągu równań najważniejsze są te, które ujęto w ramki. W praktyce proces zaczynamy od wyboru funkcji $A_o(x,y)$, a następnie obliczamy $H_1(x,y)$ przyjmując $H_o(y) = H(y)$. Potem wyznaczamy $A_1(x,y)$, a stąd $H_2(x,y)$. Postępując tak dalej w kierunku wyznaczonym przez strzałki dochodzimy do pewnej tworzącej $H_{n+1}(x,y)$, która powinna być mała co do normy. Każde z równań ujętych w ramki można zastąpić równaniem całkowym Volterry, dlatego proces rozwiązywania równania (34) może być sprowadzony do następującej procedury:

Wybieramy funkcję $A_o(x,y)$,

wyznaczamy rekurencyjnie

$$H_n(x,y) = \left[(A_{n-1}H_{n-1} - A'_{n-1})A_{n-1}^{-1}\right](x,y), \tag{39}$$

$$A_n(x,y) = I + \int_0^{y-x} A_n(x,x+\xi)\, H_n(x,x+\xi)d\xi, \tag{40}$$

zapisujemy rozwiązanie w formie iloczynu

$$A(x,y) = \left[A_{d,m+1}A_mA_{m-1}\ldots A_1A_o\right](x,y)$$

$$\cong \left[A_mA_{m-1}\ldots A_1A_o\right](x,y). \tag{41}$$

Jeżeli tworząca $H_n(x,y)$ rozwija się w szereg

$$H_n(x,y) = Q_{no}(x) + (y-x)Q_{n-1}(x) + (y-x)^2\, Q_{n2}(x) + \ldots,$$

to funkcji $A_n(x,y)$ będziemy poszukiwać w formie szeregu:

$$A_n(x,y) = I + (y-x)P_{n1}(x) + (y-x)^2P_{n2}(x) + \ldots$$

a macierze $P_{ni}(x)$ wyznaczymy ze wzorów (33):

$$P_{n1}(x) = Q_{no}(x)$$

$$P_{n2}(x) = \frac{1}{2}\left[P_{n1}(x)Q_{no}(x) + Q_{n1}(x)\right]$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

We wzorze (39) zachodzi konieczność odwrócenia macierzy $A_n(x,y)$. Można to zrobić wykorzystując wzór

$$(I + X)^{-1} = I - X + X^2 - X^3 + \ldots$$

słuszny przy $\|X\| < 1$. W tym przypadku za X przyjmujemy część szeregu funkcji $A_n(x,y)$, tj.:

$$(y-x)P_{n1}(x) + \ldots$$

Dzięki temu otrzymamy macierz $A_n^{-1}(x,y)$ w postaci szeregu potęg $(y-x)$. Uwzględniając obcięty szereg

$$I - X + \ldots + (-1)^N X^N$$

popełniamy błąd, który można określić z równości

$$(I + X)\ I - X + \ldots + (-1)^N X^N = I + (-1)^N X^{N+1}$$

Jeżeli przyjąć

$$A_{n-1}(x,y)\ e^{(y-x)E_{n-1}(x)}, \tag{42}$$

to

$$H_n(x,y) = e^{(y-x)E_{n-1}(x)}\left[H_{n-1}(x,y) - E_{n-1}(x)\right] e^{(x-y)E_{n-1}(x)}$$

co pokrywa się z wynikiem otrzymanym w rozdziale 6. Macierze współczynniki rozkładu funkcji $H_n(x,y)$ w szereg uzyskujemy ze wzorów (21). Jeżeli natomiast

$$H_n(x,y) = Q_{no}(x) + (y-x)Q_{n1}(x) + \ldots + (y-x)^N\ Q_{nN}(x),$$

$$A_n(x,y) = I + (y-x)P_{n1}(x) + \ldots + (y-x)^M\ P_{nM}(x), \tag{43}$$

to

$$H_{n+1}(x,y) = \Big[P_{n1}(x) + (y-x)2P_{n2}(x) + \ldots + (y-x)^{n+M}(N+M+1)P_{n,N+M+1}(x) -$$
$$- P_{n1}(x) - (y-x)2P_{n2}(x) - \ldots - (y-x)^{M-1}MP_{nM}(x)\Big]A_n^{-1}(x,y) =$$
$$= \Big[(y-x)^M(M+1)P_{n,M+1}(x) + \ldots + (y-x)^{N+M}(N+M+1)P_{n,N+M+1}(x)\Big]A_n^{-1}(x,y)$$

Stosując na przemian funkcje (42) i (43) otrzymamy funkcję $A(x,y)$ w postaci naprzemiennego iloczynu wielomianów potęg $(y-x)$ i macierzy wykładniczych argumentu $(y-x)$.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill 1960.

[2] Brockett R.: Lie algebras and Lie groups in control theory. Proc. of the NATO Advanced study institute held at London, August 27 - September 7, 1973, Dordrecht - Boston, D. Reidel Publishing Company, 1973, pp. 43-82.

[3] Kołmogorow A.N., Fomin S.W.: Elementy teorii funkcij i funkcjonalnowo analiza. Nauka, Moskwa 1976.

[4] Lankaster P.: Theory of Matrices, Academic Press 1969.

[5] Redheffer R.M.: Novel uses of functional equations, J. Rational Mech. Anal. 3 1954, pp. 271-279.

[6] Siwczyńska Z.: Iteracyjne metody rozwiązywania liniowych niejednorodnych obwodów o parametrach rozłożonych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1982.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В работе разработана теория неоднородных линейных цепей с распределёнными параметрами с применением функциональных уравнений. Найдено общее решение функционального уравнения цепи. Далее рассмотрены кусочно-регулярные цепи, кусочно-однородные и кусочно-аналитические цепи. В этих случаях функциональные уравнения сведены к кусочно-интегрируемым уравнениям. Найдено решение этих интегральных уравнений методом малого параметра, интерационным методом и методов степенных рядов. Предложен также метод факторизации решения функционального уравнения.

FUNCTIONAL EQUATIONS IN THE THEORY OF THE SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

S u m m a r y

The theory of nonhomogenous systems with distributed parameters by the means of functional equations was formulated. The general solution of circuit functional equations was given. Piecewise differentiable, piecewise homogenous, and piecewise analytic circuits were examined. The functional equations of this cases are reduced to integral equations suitable for the pieces. The solution of the integral equations with the use of perturbation method, step by step method and power series method is given. The factorization of functional equation solution is proposed.