ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Zygmunt GARCZARCZYK
Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

# METODA KONTYNUACJI A DYSKRETNE OBWODY RÓWNOWAŻNE W ANALIZIE NIELINIOWYCH OBWODÓW REZYSTANCYJNYCH

Streszczenie. W artykule rozważa się dwie metody rozwiązywania algebraicznych równań nieliniowych z niewiadomymi potencjałami węzłowymi obwodu elektrycznego zawierającego stałe wymuszenia prądowe i napięciowe oraz liniowe i nieliniowe rezystory.

W obu przypadkach, w oparciu o metodę kontynuacji tworzone są zastępcze liniowe obwody elektryczne odpowiadające rozwiązywanym równaniom algebraicznym. W pierwszej metodzie obwód zmienia się od kroku do kroku metody Newtona-Raphsona, a w drugiej zmienia się wraz z parametrem homotopii zgodnie z bezpośrednią metodą Eulera. Struktury obwodów elektrycznych są stałe, ale ich parametry zmieniają się jak jakobiany funkcji nieliniowych.

## 1. WSTĘP

Celem rozważań jest przedstawienie sposobu skutecznego rozwiązywania układu równań nieliniowych postaci:

$$f(x) \stackrel{df}{=} Ag(A^t x + E) - AJ = 0 \tag{1}$$

który dla n+1 węzłowego obwodu zawierającego m gałęzi, stanowi układ n równań węzłowych z n niewiadomymi potencjałami węzłowymi $x_i$, i=1,2...,n. W równaniu tym, A - oznacza zredukowaną macierz incydencji, E - wektor stałych wymuszeń napięciowych, J - wektor stałych wymuszeń prądowych, a $g(u) = \left[g_1(u_1), g_2(u_2), \ldots, g_m(u_m)\right]^t$ wektor charakterystyk prądowo-napięciowych rezystorów nieliniowych i liniowych. Przy tym $u = A^t x + E$ oznacza wektor napięć na rezystorach.

Równanie (1) jest rozwiązywane zwykle przy użyciu algorytmu Newtona-Raphsona, co prowadzi do znanej metody iteracyjnej, w której obwód nieliniowy jest przekształcany w obwód liniowy (dyskretny obwód równoważny) rozwiązywany metodą potencjałów węzłowych [1], [2]. W metodzie tej istnieje jednak problem zbieżności, gdyż przybliżenie początkowe $x^{(0)}$ winno być bliskie właściwemu rozwiązaniu $x^*$ równania (1), aby uzyskany ciąg przybliżeń $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, był zbieżny do $x^*$. Można wprawdzie w oparciu o twierdzenie Newtona-Raphsona-Kantorowicza ustalić jak bliskie właściwemu rozwiązaniu musi być przybliżenie początkowe, aby zapewnić zbieżność, ale rezultat ten ma głównie znaczenie teoretyczne, gdyż jego wykorzystanie w praktyce nie jest łatwe. Pozostaje więc arbitralny wybór przybliżenia początkowego w oparciu o znajomość charakterystyk elementów nieliniwych, co w praktyce prowadzi do wielokrotnych prób, aż zostanie uzyskane rozwiązanie. Aby pokonać tę trudność stosuje się podejście do rozwiązania równania (1) oparte o znaną w analizie numerycznej metodą kontynuacji [3], [4], co pozwala uzyskać algorytm zbieżny do rozwiązania, dla dowolnego przybliżenia początkowego $x^{(o)}$. Idea ta znalazła już zastosowanie w opracowanych metodach analizy nieliniowych obwodów rezystancyjnych [5 ÷ 11]. Prezentowane w referacie ujęcie zawiera, jak się wydaje, nowe propozycje w tym zakresie.

## 2. METODA KONTYNUACJI

Idea tej metody polega na tym, że rozważa się rozwiązanie rodziny równań nieliniowych zależnych od parametru

$$H(x,\lambda) = 0 \quad \text{dla} \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle \tag{2}$$

o następujących własnościach:

1) rozwiązanie równania (2) dla wartości początkowej $\lambda_0 = 0$ jest znane lub łatwe do uzyskania, tzn.

$$H(x_0, 0) = 0 \tag{3}$$

2) dla wartości $\lambda_s = 1$ równanie (2) redukuje się do równania (1), a więc

$$H(x, 1) = f(x) = 0 \tag{4}$$

Funkcja H nazywana jest często homotopią.
Jeżeli rozwiązania $x(\lambda)$ równań (2) zależą od $\lambda$ w sposób ciągły, to opisują one pewną krzywą łączącą punkt $x(0)$ z zerem $x(1)$ funkcji $f(x)$. Rozwiązanie $x=x(\lambda)$ wyznacza się dla ciągu rosnącego wartości $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s = 1$.
Jeden z rodzajów metody kontynuacji polega na zastosowaniu szybko zbieżnej metody iteracyjnej (np. metody Newtona-Raphsona) do kolejnych równań [4], [13]:

$$H(x, \lambda_i) = 0 \quad i = 0,1,2,\ldots,s \tag{5}$$

z na ogół dobrym przybliżeniem początkowym $x(\lambda_i)^{(o)}$ zera $x(\lambda_i)$.

Przybliżenie to uzyskuje się z poprzednich wyników

$$x(\lambda_i)^{(o)} = x(\lambda_{i-1}) \qquad (6)$$

Drugi rodzaj wynika z faktu, że dla dostatecznie regularnej funkcji H krzywa $x = x(\lambda)$ stanowi rozwiązanie równania różniczkowego [4], [14]:

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \qquad \lambda \in \langle 0, 1\rangle \quad x(0) = x_o \qquad (7)$$

które może być rozwiązane jakąś metodą różnicową. Istnieje wiele metod konstruowania równania (2) (np. [11]). W ogólnym przypadku można go zawsze utworzyć przyjmując jako homotopię następujące wyrażenie:

$$H(x, \lambda) \overset{df}{=} \lambda f(x) + (1 - \lambda) f_o(x), \qquad (8)$$

gdzie rozwiązanie układu $H(x,0) = f_o(x)$ jest łatwe do uzyskania

lub $$H(x, \lambda) \overset{df}{=} f(x) + (\lambda - 1) f(x_o) \qquad (9)$$

Zauważmy, że $H(x,0) = f(x) - f(x_o)$ posiada rozwiązanie $x = x_o$, które może być dowolnie przyjęte.

## 3. DYSKRETNE OBWODY RÓWNOWAŻNE

Jeżeli każda gałąź rozważanego obwodu zostanie zmodyfikowana tak, że rezystor nieliniowy zostanie zastąpiony równoległym połączeniem rezystora liniowego o konduktancji $(1 - \lambda)G_{k\lambda}$ oraz rezystora nieliniowego o charakterystyce $i_k = \lambda g(u_k)$, to można pokazać [12], że dla $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ równanie węzłowe tego obwodu jest następujące:

$$H(x, \lambda) = \lambda \left\{ Ag(A^t x + E) - AJ \right\} + (1 - \lambda)\left\{ AG_\lambda A^t x - A(J - G_\lambda E) \right\} = 0 \qquad (11)$$

gdzie $G_\lambda = \mathrm{diag}\left[G_{1\lambda}, G_{2\lambda}, \ldots, G_{m\lambda}\right]$, a więc jest homotopią postaci (8). Przy tym rozwiązanie układu:

$$f_o(x) = AG_\lambda A^t x - A(J - G_\lambda E) \qquad (12)$$

jest szczególnie proste, gdyż jest to układ równań liniowych.

Zastosowanie algorytmu Newtona-Raphsona do układu równań (11) prowadzi do zmodyfikowanej postaci równań węzłowych, tzw. dyskretnego obwodu równoważnego [2] :

$$A\left[\lambda G^{j} + (1-\lambda)G_{\lambda}\right] A^{t}x^{(j+1)} =$$

$$= A\left[J^{(j)} - \lambda G^{(j)}E + (1-\lambda)(J - G_{\lambda} E)\right] \quad \text{dla } \lambda \in \langle 0,1\rangle \tag{13}$$

W równaniu tym $G^{(j)}$ oznacza diagonalną macierz dynamicznych konduktancji rezystorów nieliniowych dla napięć na tych rezystorach w j-tej iteracji.

Ponadto $\quad J^{(j)} \overset{df}{=} \lambda\left[J - J_{Q}^{(j)} + G^{(j)}U_{Q}^{(j)}\right]$

$$U_{Q}^{(j)} \overset{df}{=} A^{t}x^{(j)} + E \qquad J_{Q}^{(j)} \overset{df}{=} g(U_{Q}^{(j)})$$

Idea stopniowego przejścia od obwodu liniowego do obwodu nieliniowego zawarta w równaniu (13) była wykorzystana, ale w inny sposób, do analizy obwodów nieliniowych zawierających diody [9] .
Inny typ dyskretnego obwodu równoważnego uzyskuje się rozważając dla równania (1) homotopię postaci (9).
Na podstawie równań (9) i (7) otrzymuje się:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\left[J(x)\right]^{-1} f(x_{o}) \tag{14}$$

gdzie J(x) jest macierzą Jacobiego funkcji f(x).
Stosując bezpośrednią metodę Eulera do równania (14) otrzymuje się

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - h\left[J(x^{(j)})\right]^{-1} f(x_{o}) \tag{15}$$

gdzie $h = \lambda_{j} - \lambda_{j-1}, \quad j = 1,2,\ldots,s.$

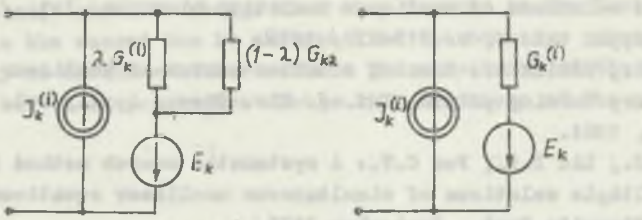
Ponieważ $J(x^{(j)}) = AG^{(j)}A^{t}$, więc na podstawie równań (1) i (15) można napisać

$$\begin{aligned} AG^{(j)}A^{t}x^{(j+1)} &= AG^{(j)}A^{t}x^{(j)} \\ &\quad - h\left\{Ag(A^{t}x_{o} + E) - AJ\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

by po przekształceniu otrzymać równanie:

$$AG^{(j)}A^{t}x^{(j+1)} = A(J^{(j)} - G^{(j)}E) \tag{17}$$

gdzie $J^{(j)} \stackrel{df}{=} h(J - J_o) + G^{(j)}U_Q^{(j)}$ $\quad J_o \stackrel{df}{=} g(A^t x_o + E)$




$J_k^{(i)} = J - \lambda J_{Qk}^{(i)} + \lambda G_k^{(i)} U_{Qk}^{(i)}$ $\qquad J_k^{(i)} = h(J_k - J_{ok}) + G_k^{(i)} U_{Qk}^{(i)}$

Rys. 1

Struktury gałęzi dyskretnych obwodów równoważnych

The structures of the branches of discrete equivalent networks

Równania (13 i (17) opisują równoważne obwody liniowe o gałęziach przedstawionych na rys. 1.

## 4. UWAGI KOŃCOWE

Otrzymanie dobrego przybliżenia rozwiązania $x(1)$ opisanymi tu metodami, wymaga przeważnie podzielenia odcinka $<0,1>$ na wiele części punktami $\lambda_i$, co determinuje koszt procesu obliczeniowego. Wymagania tych metod mogą być różne. Rozwiązanie równania (13) nie powinno na ogół wymagać zbyt wielu punktów $\lambda_i$, ale trzeba pamiętać, że dla uzyskania rozwiązania $x(\lambda_i)$ konieczny jest pewien nakład obliczeniowy związany z algorytmem Newtona-Raphsona. Jednocześnie rozwiązanie równania (17) związane jest wyłącznie z doborem $\lambda_i$, ale uzyskanie dostatecznej dokładności i stabilności procesu wymaga, by h było małe. Uzyskane do tej pory wyniki obliczeń dla równania (13) potwierdzają skuteczność tego podejścia do rozwiązywania równania (1), [12] . Można sądzić, że dalsze eksperymenty numeryczne pozwolą ocenić nakład obliczeniowy obu metod.

## LITERATURA

[1] Calahan D.A.: Projektowanie układów elektronicznych za pomocą maszyny cyfrowej. WNT, Warszawa 1978.

[2] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.

[3] Dahlquist G., Björck A.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1983.

[4] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. Academic Press New York 1970.
[5] Chua L.O., Ushida A.: A switching-parameter algorithm for finding multiple solutions of nonlinear resistive circuits. Int. J. Cir. Theor. Appl. vol. 4, s. 215-239, 1976.
[6] Chua L.O., Ushida A.: Tracing solution curves of nonlinear equations with sharp turning points. Int. J. Cir. Theor. Appl., vol. 13, s. 1-21, 1984.
[7] Chao K.S., Lin D.K., Pan C.T.: A systematic search method for obtaining multiple solutions of simultaneous nonlinear equations. IEEE Trans. Circuits Syst., September 1975.
[8] Chao K.S., Seeks R.: Continuation methods in circuit analysis. Proc. IEEE, August 1977.
[9] Bertsekas D.P.: A new algorithm for solution of resistive networks involving diodes. IEEE Trans. Circuits Syst. October 1976
[10] Ponisch G., Schwetlich H.: Computing turning points of curves implicitly defined by nonlinear equations depending on a parameter. Computing, 26, pp. 107-121, 1981.
[11] Tadeusiewicz M.: Analiza pewnej klasy obwodów rezystancyjnych w przestrzeni $m_n$. Rozprawy Elektrotechniczne z.2. 1973.
[12] Garczarczyk Z.: Analiza numeryczna pewnej klasy nieliniowych obwodów rezystancyjnych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z 95, w druku.
[13] Lahaye E.: Sur la resolution des systemes d'equations transcendantes. Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci., vol. 5, 805 - 822, 1948.
[14] Davidienko D.F.: Ob odnom nowom metodie ozislennowo analiza rieszienija sistem nieliniejnych urawnienij. Dokłady Akademij Nauk CCCP, 1953, Tom LXXXVIII, No 4.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dn. 15 marca 1985 r.

CONTINUATION METHOD AND DISCRETE EQUIVALENT NETWORKS IN THE ANALYSIS OF THE NONLINEAR RESISTIVE NETWORKS

S u m m a r y

In the paper two methods of solving of the nonlinear elgebraic equations of the network with unknown node voltages are considered. The network contains constant current and voltage sources and linear and nonlinear resistors.

In both cases, basing on the continuation method, supplementary linear circuits corresponding with the algebraic aquations are created. In the first method, circuits change from step to step in the Newton-Raphson method, in the second one it changes like the homotopy parameter correspondingly to the direct Euler method. The structures of the networks are constant but their parameters change like Jacobians of the nonlinear functions.

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ А ДИСКРЕТНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЦЕПИ В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье рассматриваются два метода решения нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными узловыми напряжениями электрической цепи, которая состоит из постоянных источников тока и напряжения а также из линейных резисторов. В обоих случаях, опираясь на методе продолжения решения по параметру, составляются схемы замещения, соотвествующие решаемым алгебраическим уравнениям. В первом методе цепь изменяется от шага к шагу метода Ньютона - Рафсона. Во втором изменяется вместе с параметром гомотопии, согласно непосредственному методу Эйлера. Схема любой цепи является постоянной но её параметры изменяются как матрицы Якоби нелинейных функций.