

Maciej SIWCZYŃSKI

Instytut Matematyki, Fizyki i Chemii  
Wyższej Szkoły Inżynierskiej  
w Zielonej Górze

## TEORIA MOCY SYGNAŁÓW SPRÓBKOWANYCH

**Streszczenie.** Celem pracy jest sformułowanie zwartej jednolitej teorii sygnałów wielowymiarowych ciągłych i spróbkowanych oraz związanej z nią teorii mocy. Cel taki można osiągnąć za pomocą odpowiednio mocnych środków matematycznych, jakimi są przemienne algebry Banacha uzupełnione o strukturę przestrzeni Hilberta. Warunki te spełniają splotowe algebry sygnałów wielowymiarowych z iloczynem skalarnym. Wykazano, że przekształcenia Gelfanda takich algebr pokrywają się z wielowymiarowymi przekształceniami Fouriera. W pracy opisano zagadnienie kompensacji mocy biernej, które sprowadzono do minimalizowania odpowiedniego funkcjonału. W wyniku otrzymano układ równań całkowych Fredholma z niewiadomą odpowiedzią impulsową kompensatora, który po spróbkowaniu sprowadzono do zwykłego układu równań liniowych. Matematycznie podobne rozwiązanie ma problem poszukiwania gausiodwrotności widmowej wielomianu, związany ze stabilizacją filtrów cyfrowych. W dalszej części artykułu podano związek między cepstrum zespolonym a stabilnością układu wielowymiarowego. Podano dwa niezależne algorytmy wyznaczania cepstrum wielowymiarowego, w tym jeden rekurencyjny.

## 1. WSTĘP

Celem tego opracowania jest jednolita, zwarta teoria sygnałów wielowymiarowych ciągłych i spróbkowanych, okresowych i nieokresowych oraz związana z nią teoria mocy. Można ten cel osiągnąć za pomocą odpowiedniego środka matematycznego, którym jest analiza funkcjonalna a w szczególności teoria zupełnych przemienialnych algebr unormowanych - zwanych algebrami Banacha - z pewnymi elementami przestrzeni Hilberta.

Zupełną, przemienialną algebrą unormowaną nazywa się przestrzeń Banacha  $\mathcal{B}$  zaopatrzoną w mnożenie (\*), tj. odwzorowanie kwadratu kartezjańskiego  $\mathcal{B}$  w siebie spełniające warunki algebry, tj.: łączność, rozdzielność, jednorodność, ciągłość ( $\|x * y\| \leq \|x\| \|y\|$ ), istnienia jedności  $e$ , a ponadto przemienność.

W algebrach takich poszczególne elementy można zastąpić pewnymi zespolonowartościowymi funkcjami. Można to zrobić w następujący sposób. Niech  $Z$  będzie funkcjonałem liniowo multiplikatywnym [ $Z(\alpha x + \beta y) = \alpha Z(x) + \beta Z(y)$ ,  $Z(x * y) = Z(x) Z(y)$ ], czyli homomorfizmem zespolonym a  $\Delta$  zbiorem wszystkich możliwych takich funkcjonałów. W ten sposób każdemu elementowi  $x$

algebry  $\mathcal{B}$  można przyporządkować zespolonowartościową funkcję  $\hat{x}$ , której dziedziną jest zbiór  $\Delta$ , według reguły:  $\hat{x}(Z) = Z(x)$ . Odwzorowanie  $x \rightarrow \hat{x}$  nazywa się przekształceniem Gelfanda. Jeżeli przekształcenie Gelfanda jest jednoznaczne, to algebra  $\mathcal{B}$  - zwana wówczas półprostą - jest izomorficzną, czyli w pełni odpowiada algebrze zespolonowartościowych funkcji zadanych na  $\Delta$  ze zwykłym punktowym mnożeniem.

W algebrze istnieje słaba topologia - zwana topologią Gelfanda - według której dwom bliskim w sensie normy elementom algebry odpowiadają dwa bliskie w sensie modułu na  $\Delta$  przekształcenia Gelfanda. Pozwala to nie tylko na algebraiczne, ale i geometryczne scharakteryzowanie danej algebry przestrzeni zespolonowartościowych funkcji zadanych na  $\Delta$ .

## 2. SYGNAŁY

Na gruncie teorii sygnałów wielowymiarowych funkcjonał  $Z$  można utożsamiać z pewną multiliczbą zespoloną  $z \in \mathbb{C}^M$ , a zbiór  $\Delta$  z pewnym zbiorem (obszarem) na hiperprzestrzeni  $\mathbb{C}^M$ . Mnożeniem jest spłot  $(x * y)(t) = \int_{\mathbb{D}^M} x(t - \varphi) y(\varphi) d\varphi$

$$\text{a norma} \quad \|x\| = \int_{\mathbb{D}^M} |x(t)| dt \quad (1)$$

gdzie  $\mathbb{D}^M$  jest klasą równoważności minimalnych zbiorów  $\mathbb{R}^M$ , na których funkcje  $x, y$  są zadane jednoznacznie. Na przykład dla sygnałów absolutnie sumowalnych  $\mathbb{D}^M$  pokrywa się z  $\mathbb{R}^M$ , a dla sygnałów  $T$  - okresowych  $\mathbb{D}^M$  jest klasą równoważności hiperkostek  $p_1 T_1 \leq t_1 < (p_1 + 1) T_1$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Dla sygnałów czasowo dyskretnych następuje próbkowanie za pomocą  $\delta$  - dystrybucji według odwzorowania:

$$x(t) \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^M} x_{\tau}(n) \delta(t - n\tau). \quad \tau(n) = x(n\tau)$$

i wówczas

$$(x_{\tau} * y_{\tau})(n) = \sum_{m \in \mathbb{D}^M} x_{\tau}(n-m) y_{\tau}(m)$$

$$\|x_{\tau}\| = \sum_{m \in \mathbb{D}^M} |x_{\tau}(m)| \quad (1)_{\tau}$$

Zbiór  $\mathbb{R}^M$  zastąpiony zostaje przez  $\mathbb{Z}^M$ . Całkę (1) można też rozumieć wtedy jako całkę z miarą Diraca.

Jedynym możliwym funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym jest wówczas [6]

$$Z(x) = \int_{\mathbb{D}_M} z^t x(t) dt = \hat{x}(z) \quad z \in \Delta \quad (2)$$

Tym samym wzór (2) definiuje przekształcenie Gelfanda. Zbiór  $\Delta$  jest różny w zależności od przestrzeni sygnałów i należy go tak dobrać, aby funkcja  $Z$  była funkcjonałem. Przekształcenie odwrotne ma postać

$$x(t) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} z^{-t} \hat{x}(z) d \ln z \quad (3)$$

Kontur  $\partial\Delta$  jest brzegiem zbioru  $\Delta$ , tj. zbiorem zdefiniowanym jako

$$\partial\Delta = \Delta \setminus \text{int } \Delta,$$

gdzie  $\text{int } \Delta$  jest wnętrzem zbioru  $\Delta$ , tj. zbiorem punktów, które należą do  $\Delta$  wraz z pewnym swoim otoczeniem.

Dla przestrzeni sygnałów przyczynowych absolutnie sumowalnych  $\Delta$  jest jednostkowym polidyskiem:

$$\Delta = \mathbb{K} = \{z: |z_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, M\}$$

$\partial\Delta$  jest jednostkowym poliookręgiem:

$$\partial\Delta = \partial\mathbb{K} = \{z: |z_i| = 1\}.$$

Dla sygnałów absolutnie sumowalnych

$$\partial\Delta = \Delta = \partial\mathbb{K}$$

Dla sygnałów czasowo ciągłych  $T$  - okresowych zbiór  $\Delta$  jest przeliczalnie próbkowanym jednostkowym poliookręgiem

$$\Delta = \partial_T \mathbb{K} = \{z: z_i^{T_1} = 1\} \quad T_1 - \text{rzeczywiste}$$

Wreszcie dla sygnałów czasowo dyskretnych  $N$  - okresowych ( $N_1$  - całkowite) zbiór  $\Delta$  jest skończenie próbkowanym jednostkowym poliookręgiem

$$\Delta = \partial_N \mathbb{K} = \{z: z_i^{N_1} = 1\}$$

Wspomniane próbkowanie poliookręgów jest równomierne, ale przy obliczaniu całki (3) można wprowadzić próbkowanie nierównomierne.

Próbkowanie równomierne daje

$$d \ln z = \frac{(2\pi j)^M}{T^M} z^{-1} dz, \quad I = (1, \dots, 1)$$

a całka (3) przechodzi w sumę

$$x(t) = \frac{1}{T^M} \sum_{\partial_T^K} z^{-t} \hat{x}(z) \quad T_1 - \text{rzeczywisty okres} \quad (3)_T$$

dla  $t \in \mathbb{R}^M$  (czas ciągły) oraz

$$d \ln z = \frac{(2\pi j)^M}{N^M} z^{-1} dz$$

$$x(n) = \frac{1}{N^M} \sum_{\partial_N^K} z^{-n} \hat{x}(z) \quad N_1 - \text{całkowity okres} \quad (3)_N$$

dla  $n \in \mathbb{Z}^M$  - dla czasu dyskretnego.

Jeżeli  $xy$  jest zwykłym punktowym mnożeniem sygnałów, to

$$(xy)^\wedge(z) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial \Delta} \hat{x}(z/u) \hat{y}(u) d \ln u \quad (4)$$

a po spróbkowaniu poliookręgu

$$(xy)^\wedge(z) = \frac{1}{T^M} \sum_{\partial_T^K} \hat{x}(z/u) \hat{y}(u) \quad z \in \partial_T^K \quad (4)_T$$

$$(xy)^\wedge(z) = \frac{1}{N^M} \sum_{\partial_N^K} \hat{x}(z/u) \hat{y}(u) \quad z \in \partial_N^K \quad (4)_N$$

Sploty zespolone (4) również pozwalają zachować strukturę przemiennej algebry unormowanej.

Za pomocą związku (4) można wprowadzić iloczyn skalarny:

$$(x, y) = \int_{\partial \Delta} x(t) \bar{y}(t) dt = (x, y)^\wedge(I) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial \Delta} x(I/u) \bar{y}(u) d \ln u \quad (5)$$

i normę skalarną

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

W ten sposób zupełne, przemienne algebry unormowane sygnałami wielowymiarowymi zostają uzupełnione o struktury przestrzeni Hilberta.

W następnych trzech punktach zastosowano teorię zupełnych przemiennych algebr unormowanych sygnałów do klasycznej teorii mocy i niektórych zagadnień pokrewnych.

### 3. KLASYCZNA TEORIA MOCY

Moc czynną  $P$  i pozorną  $S$  definiują wyrażenia

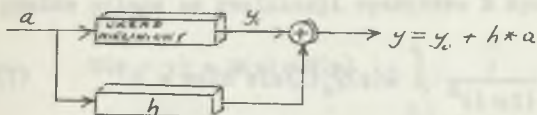
$$P = (x, y)$$

$$S = |x| |y|$$

Za pomocą przedstawionych środków matematycznych celowe jest naśladowanie tylko tych pojęć mocy, które zdefiniowane są w sposób mało zależny od wyboru przestrzeni sygnałów. Wśród znanych teorii mocy [1] warunek ten spełnia tylko teoria S. Fryzego, według której moc bierna  $Q$  dana jest wzorem

$$Q^2 = S^2 - P^2$$

Istnieje tu problem kompensacji mocy biernej zilustrowany schematem blokowym na rys. 1. Równolegle do układu nieliniowego podłączony jest liniowy, splotowy, bezstratny kompensator z odpowiedzią impulsową  $h$ , którego zadaniem jest zminimalizowanie funkcjonału



Rys. 1

Kompensacja mocy biernej  
Reactive power compensation

$$\Phi(h) = (a, a)(y_0 + a * h, y_0 + a * h) - (a, y_0 + a * h)(a, y_0 + a * h)$$
 przy ustalonych sygnałach  $a$ ,  $y_0$  oraz warunku

$$(a, a * h) = 0$$

Zadanie to jest równoważne zminimalizowaniu funkcjonału

$$F(h) = (a * h + y_0, a * h + y_0) \quad (6)$$

Różniczka Fréchet'a, po odrzuceniu małych wyższego rzędu, ma postać

$$\delta F(h) = F(h+\delta h) - F(h) = 2(a * \delta h, a * h) + 2(y_0, a * \delta h)$$

Przyrównując różniczkę do zera otrzymuje się

$$(a * \delta h, a * h) + (y_0, a * \delta h) = 0$$

skąd

$$\frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} A(z) \delta \hat{h}(z) \hat{h}(1/z) dz + \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} \hat{a}(z) \delta \hat{h}(z) \hat{y}_0(1/z) dz = 0$$

gdzie

$$A(z) = \hat{a}(z) \hat{a}(1/z)$$

Podstawiając

$$\delta \hat{h}(z) = \int_{\mathbb{D}^M} z^t \delta h(t) dt$$

i zmieniając porządek całkowania otrzymuje się

$$\int_{\mathbb{D}^M} \delta h(t) \left[ \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} A(z) \hat{h}(1/z) z^t dz + \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} \hat{a}(z) \hat{y}_0(1/z) z^t dz \right] dt = 0$$

skąd

$$\frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} A(z) \hat{h}(z) z^{-t} dz + \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} \hat{a}(z) \hat{y}_0(1/z) z^t dz = 0 \quad (7)$$

Równanie (7) jest układem równań Fredholma z niewiadomą funkcją  $\hat{h}$ . Po dyskretyzacji poliokręgu zamieniamy je na zwykły układ równań liniowych.

$$\frac{1}{N!} \sum_{z \in \partial_N \mathbb{K}} z^{-n} A(z) \hat{h}(z) + \frac{1}{N!} \sum_{z \in \partial_N \mathbb{K}} z^n \hat{a}(z) \hat{y}_0(1/z) = 0.$$

#### 4. STABILIZACJA CYFROWYCH FILTRÓW WIELOWYMIAROWYCH

Zupełnie podobne jest zagadnienie stabilizacji wielowymiarowego filtra NOI, znane pod nazwą hipotezy Shanksa (Shanks conjecture [2]). Chodzi tu o zastąpienie filtra rekursywnego  $a^{-1}$  (odwrotność splotowa filtra SOI)

równoważnym widmowo filtrem SOI  $x$  tak, aby  $x \approx a^{-1}$ . Sprowadza się to do poszukiwania quasidefinitości splotowej elementu  $a$  minimalizującej normę elementu  $a * x - e$ , gdzie  $e$  jest jednością splotową, a więc do zminimalizowania funkcjonału

$$F(x) = (a * x - e, a * x - e). \quad (8)$$

Funkcjonał (8) ma podobną postać do funkcjonału (6) występującego przy kompensacji mocy biernej, a więc jego zminimalizowanie prowadzi do układu równań Fredholma

$$\frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial K} \Lambda(z) z^{-n} \hat{x}(z) dz = a(o)e(n)$$

który po dyskretyzacji widmowej można zastąpić zwykłym układem równań liniowych

$$\frac{1}{N} \sum_{z \in \partial_N K} z^{-n} \Lambda(z) \hat{x}(z) = a(o)e(n),$$

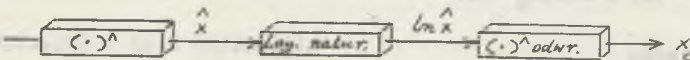
## 5. HOMOMORFICZNE PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW. CEPSTRUM WIEKLOWYMIAROWE

Niech dane będą dwa przestrzenie sygnałów, w których określono różne operacje mnożenia, odpowiednio  $(o)$  i  $(\square)$ . Homomorficzne przetwarzanie sygnałów polega na realizacji operatora  $H$  spełniającego warunki

$$H(x o y) = H(x) \square H(y)$$

$$H(x^\alpha) = \alpha H(x),$$

gdzie  $\alpha$  jest liczbą, a  $x^\alpha$  oznacza  $\alpha$ -potęgę. Jedną z możliwych realizacji jest operator "cepstrum"  $(\cdot)^\wedge$ , działający zgodnie ze schematem blokowym pokazanym na rys. 2.



Rys. 2'

Definicja cepstrum  $x_c$  sygnału  $x$   
The definition of a cepstrum  $x_c$  of the signal  $x$

Nie trudno wykazać, że cepstrum spełnia warunki homomorfizmu

$$(x * y)_0 = x_0 + y_0$$

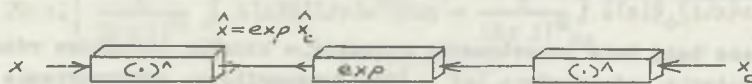
$$(x^\alpha)_0 = \alpha x_0$$

gdzie  $x^\alpha$  jest  $\alpha$ - potęgą spłotową.

Istnieje ważny związek między cepstrum a stabilnością filtru rekursywnego. Filtr rekursywny opisany jest równaniem spłotowym

$$a * h = b$$

gdzie  $a, b$  - wielomiany,  $h$  - odpowiedź NOI filtru. Filtr  $h$  jest stabilny, gdy  $a$  posiada absolutnie sumowalną odwrotność spłotową. Można wykazać, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje absolutnie sumowalne przy czynne cepstrum  $a_0$ . Ze względu na to, że ciągi cepstralne gasną znacznie szybciej niż odpowiedzi impulsowe, wygodnie jest stosować cepstrum do stwierdzania stabilności filtru. Wielowymiarowe cepstrum można wyznaczać za pomocą schematu pokazanego na rys. 3



Rys. 3

Schemat wyznaczenia cepstrum  $x_0$  sygnału  $x$   
The scheme of calculation of the cepstrum  $x_0$  of the signal  $x$

Według tego schematu

$$\hat{x}(z) = \exp \hat{x}_0(z)$$

skąd po zróżniczkowaniu

$$\hat{x}^{(I)}(z) = \hat{x}(z) \hat{x}_0^{(I)}(z) \quad (9)$$

a stąd kolejno

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^I z^{n-I} x_0(n) = \hat{x}_0^{(I)}(z) = \frac{\hat{x}^{(I)}(z)}{\hat{x}(z)}$$



$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^M} z^n [n^T x_0(n)] = \frac{\hat{I}_0(I)(z)}{\hat{I}(z)}$$

i wreszcie

$$n^T x_0(n) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial K} z^{-n} \frac{\hat{I}_0(I)(z)}{\hat{I}(z)} dz \quad (10)$$

Nie można skorzystać ze wzoru (10), gdy  $n \neq 0$ , tj. gdy co najmniej jedna składowa multiindeksu  $n$  jest równa zero. Ale ze wzoru

$$x_0(n_1, \dots, n_M) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial K} z_1^{-n_1} \dots z_M^{-n_M} \hat{I}_0(z_1, \dots, z_M) dz_1 \dots dz_M$$

wynika, że

$$x_0(0, \dots, n_k, \dots, 0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z_k|=1} z_k^{-n_k} \hat{I}_0(0, \dots, z_k, \dots, 0) dz_k$$

a ponadto

$$\hat{I}_0(0, \dots, z_k, \dots, 0) = \exp \hat{I}_0(0, \dots, z_k, \dots, 0)$$

Zatem wyznaczenie ciągu  $x_0(0, \dots, n_k, \dots, 0)$  może się odbywać za pomocą wzoru (9) dla 1-D:

$$x_0(0, \dots, n_k, \dots, 0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z_k|=1} z_k^{-n_k} \frac{\frac{\partial \hat{I}_0(0, \dots, z_k, \dots, 0)}{\partial z_k}}{\hat{I}_0(0, \dots, z_k, \dots, 0)} dz_k$$

a ponieważ zawsze  $\hat{I}(0) = x(0)$ , więc

$$x_0(0, \dots, 0) = \ln x(0, \dots, 0)$$

Podobnie trzeba postąpić w przypadku, gdy dwie współrzędne są niezerowe

$$x_0(0; \dots; n_k; 0; \dots; n_1; 0; \dots; 0) = \frac{1}{(2\pi j)^{2n_k n_1}} \int_{|z_k|=1} \int_{|z_1|=1} z_k^{-n_k} z_1^{-n_1} \frac{\partial^{2Q}(0; \dots; z_k; 0; \dots; z_1; 0; \dots; \rho)}{\partial z_k \partial z_1} \frac{1}{\hat{z}(0; \dots; z_k; 0; \dots; z_1; 0; \dots; 0)} dz_k dz_1$$

Postępując tak dalej można wyznaczyć poszczególne wartości cępkum  $x$  w dowolnym przedziale. W praktyce poliockrag w całość (10) dyskretyzuje się równomiernie otrzymując

$$x_0(n) \approx \frac{1}{n! n!} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-n+1} \frac{\hat{z}(I)(n)}{\hat{z}(n)}$$

Chyba wygodniej jest wyznaczać cępkum ze wzorów rekurencyjnych. Z równania (9) otrzymuje się

$$z^I \hat{z}(I)(z) = z^I \hat{z}_0(I)(z) \hat{z}(z)$$

skąd

$$n^I x(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} m^I x_0(m) x(n-m) = n^I x_0(n) x(0) + \sum_{m \in P_n} m^I x_0(m) x(n-m)$$

gdzie  $P_n$  jest hiperprostokątem "bez prawego górnego rogu":

$$P_n = \left\{ m \in \mathbb{Z}_+^M \mid m_1 \leq n_1; m \neq n \right\}$$

Stąd

$$n^I x_0(n) x(0) = n^I x(n) - \sum_{m \in P_n} m^I x_0(m) x(n-m)$$

Jeżeli  $n^I \neq 0$ , to

$$x_0(n) = \begin{cases} 0 & n \notin \mathbb{Z}^M \\ \frac{x(n)}{x(0)} - \frac{1}{x(0)} \sum_{m \in \mathbb{P}_n} \binom{n}{m}^I x_0(m) & n \in \mathbb{Z}^M \end{cases}$$

Ciągi jednowymiarowe  $x_0(0, \dots, n_k, \dots, 0)$  wyznaczają się rekurencyjnie ze wzoru

$$x_0(0, \dots, n_k, \dots, 0) = \frac{x(0, \dots, n_k, \dots, 0)}{x(0, \dots, 0)} - \frac{1}{x(0, \dots, 0)} \sum_{m_k=0}^{n_k-1} \binom{n_k}{m_k}$$

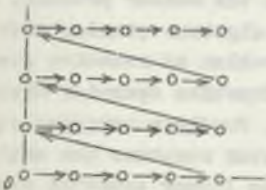
$$x_0(0, \dots, n_k, \dots, 0) \times (0, \dots, n_k - m_k, \dots, 0)$$

Ciągi dwuwymiarowe  $x_0(0, \dots, n_k, 0, \dots, n_1, 0, \dots, 0)$  wyznaczają się ze wzorów rekurencyjnych:  $x_0(0, \dots, n_k, 0, \dots, n_1, 0, \dots, 0) =$

$$= \frac{x(0, \dots, n_k, 0, \dots, n_1, 0, \dots, 0)}{x(0, \dots, 0)} - \frac{1}{x(0, \dots, 0)} \sum_{m_k=0}^{n_k-1} \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \binom{n_k, n_1}{m_k, m_1}$$

$$= x_0(0, \dots, n_k, 0, \dots, n_1, 0, \dots, 0) \times (0, \dots, n_k - m_k, 0, \dots, n_1 - m_1, 0, \dots, 0)$$

I tak dalej. Stosowanie wzorów rekurencyjnych wymaga pewnego uporządkowania hiperprostokąta  $\mathbb{P}$ . Porządek taki dla  $M=2$  zilustrowano na rys. 4.



Rys. 4

Przykład uporządkowania (2-D) prostokąta

Example of ordering of a (2-D) rectangle

## LITERATURA

- [1] Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 91, 1984.
- [2] Genin Y.V.; Kamp Y.G.: Two - Dimensional Stability and Orthogonal Polynomials on the Hypersphere. Proc. IEEE aug. 1977, pp. 873-881.
- [3] Oppenheim A.V.; Schaffer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKK, Warszawa 1979.
- [4] Pistor P.: Stability Criterion for Recursive Filters. IBM J. Res. Dev. 18 (1): 59-91 (1974)
- [5] Ronkin L.I.: Elementy teorii analityczeskich funkcji mnogich pierścieniennych. Naukowa Dumka, Kijew 1977.
- [6] Siwczyński M.: Zastosowania algebr Banacha w teorii sygnałów i układów wielowymiarowych. Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, s. Elektryka z. 81, 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Marian Bogucki

Wpłynęło do redakcji dn. 18 kwietnia 1985 r.

## THE POWER THEORY OF SAMPLED DATA SIGNALS

## S u m m a r y

The aim of this work is the formulation of compact unified theory of multi-dimensional continuous and sampled data signals and power theory connected with it. Such aim can be achieved by means of respectively powerful mathematical means such as commutative Banach algebras supplemented by Hilbert space structure. These conditions are realized by convolution algebras of multi-dimensional signals with the scalar product. It has been shown that Gelfand conversions of such algebras overlap with multi-dimensional Fourier transformation. The problem of reactive power compensation which was brought to the adequate function operator minimization has been described in this work. Finally, Fredholm integral equations system with the unknown impulsive compensator response was achieved, which after sampling was brought to a simple linear equation system. The problem of looking for the pseudo-reciprocal of spectral polynomial connected with digital filter stabilisation has similar mathematical solution. In the further part of the paper the relation between complex eigenvalues and stability of multidimensional system was given. Two independent

algorithms of determining multidimensional cepstrum, one of them being recurrence were given too.

## ТЕОРИЯ МОШНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

### Резюме

В работе в сжатой однородной форме сформулирована теория непрерывных и дискретных и дискретных многомерных сигналов и связанная с ней теория мощности. Можно это сделать с помощью относительно сильных математических методов как коммутативные Банаховы алгебры со структурой Гильбертового пространства. Эти условия выполняют алгебры многомерных сигналов со сверткой и скалярным произведением. Доказано, что преобразования Гельфанда этих алгебр совпадают с многомерными преобразованиями Фурье.

В статье разработана задача компенсации реактивной мощности которая сведена к минимизации одного функционала. Отсюда получают систему интегральных уравнений Фредгольма с неизвестной импульсной характеристикой компенсатора. Решение этой системы после спектральной дискретизации сводится к решению обыкновенной линейной системы. Показана аналогия между задачей компенсации реактивной мощности а проблемой вычисления почти обратного многомерного многочлена, которая имеет место в теории стабилизации цифровых фильтров.

В последней части работы обращается внимание на связь между комплексным кепстром а устойчивостью многомерного фильтра. Выводится два независимых алгоритма для вычислений многомерных кепстров, в том, один новый - рекуррентный.