

Anna LASIGZ
Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O PEWNYM ZASTOSOWANIU RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO ANALIZY OBWODÓW SLS

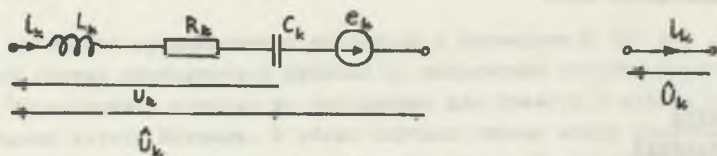
Streszczenie. W artykule opisano pewien sposób analizy czasowej obwodów skupionych, liniowych, stacjonarnych (SLS) za pomocą równań całkowych dla metody prądów cięciw. Wykazano, że obwody o gałęziach będących szeregowym połączeniem rezystorów (R), cewek (L), kondensatorów (C) i dowolnych SEM opisuje macierzowe równanie całkowe Voltery II rodzaju. Pokazano, że obwody, w których gałęzie są dowolną kombinacją połączeń (R, L, C, e) opisuje układ równań całkowych Voltery I i II rodzaju oraz układ równań algebraicznych. Podano postacie jądrowe równań całkowych dla różnych typów gałęzi. Podano algorytm umożliwiający numeryczne rozwiązywanie równań całkowych i całkowo-algebraicznych oraz porównano efektywność zaproponowanej metody z metodą Rungego - Kutty. Omawiana metoda została zilustrowana przykładem.

1. WPROWADZENIE

Analizę stanów nieustalonych w złożonych obwodach SLS prowadzi się najczęściej poprzez rozwiązywanie układów równań różniczkowych przyporządkowanych tym obwodom. Rozwiązywanie tych równań dla obwodów o dużym wymiarze możliwe jest tylko metodami numerycznymi [1], [2], [3]. Inny równoważny opis obwodów polega na przyporządkowaniu im równań całkowych [4]. Celem pracy jest pokszanie jednego z możliwych sposobów opisu obwodów za pomocą równań całkowych oraz przedstawienie efektywnego algorytmu numerycznego rozwiązywania tych równań.

2. FORMALIZACJA OPISU OBWODÓW ZA POMOCĄ RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Przyjmijmy, że gałąź grafu zorientowanego reprezentuje k -tą gałąź szeregową R, L, C, e (rys. 1a) złożonych obwodów SLS. Takie obwody opisuje układ równań różniczkowo-całkowych i algebraicznych względem współrzędnych gałęziowych i, \hat{u} .



Rys. 1 a, b

$$\hat{U} = L \frac{d\hat{i}}{dt}(t) + R \hat{i}(t) + \int_{t_0}^t \Gamma \hat{i}(\tau) d\tau + \hat{u}_0(t_0) - \hat{e}(t) \quad (1)$$

$$B \hat{u} = 0 \quad B u = B e \quad (2)$$

$$A \hat{i} = 0 \quad (3)$$

gdzie: $t_0 = t_0^+$

\hat{u}, u, i - wektory napięć, prądów gałęziowych,

e - wektor sił elektromotorycznych,

L, R, Γ - macierze diagonalne indukcyjności, rezystancji, elastancji,

$\hat{u}_0(t_0)$ - wektor napięć początkowych na kondensatorach,

B - fundamentalna macierz osczkowa,

A - macierz incydencji

Koswiązywanie układów równań (1), (2), (3) jest kłopotliwe, z uwagi na jego strukturę (jest to układ równań różniczkowo - całkowych, różniczkowych, algebraicznych), dlatego wygodnie jest zastąpić prądy gałęziowe przez prądy cięciw, korzystając z zależności:

$$i = B^t i_s \quad (4)$$

gdzie: i_s - wektor prądów osczkowych (cięciw).

Uwzględniając zależność (1) we wzorze (2) otrzymujemy równanie:

$$B L B^t \frac{d i_s}{dt}(t) + B R B^t i_s(t) + \int_{t_0}^t B \Gamma B^t i_s(\tau) d\tau = B e(t) - B u_0(t_0) \quad (5)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$L_0 = B L B^t$$

$$R_0 = B R B^t$$

$$\Gamma_0 = B \Gamma B^t$$

gdzie: L_0 , R_0 , Γ_0 - macierze indukcyjności, rezystancji i elastancji oskowych.

Pomnóżmy obustronnie równanie (5) przez L_0^{-1} (zakładając, że $\det L_0 \neq 0$), uzyskamy wtedy zależność:

$$\frac{d i_s}{d t}(t) + L_0^{-1} R_0 i_s(t) + \int_{t_0}^t L_0^{-1} \Gamma_0 i_s(\tau) d\tau = L_0^{-1} (B e(t) - B u_0(t_0)) \quad (6)$$

Po scałkowaniu równania (6) w przedziale (t_0, t) mamy:

$$\begin{aligned} i_s(t) - i_s(t_0) + \int_{t_0}^t L_0^{-1} R_0 i_s(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^s L_0^{-1} \Gamma_0 i_s(\tau) d\tau \right] ds = \\ = \int_{t_0}^t L_0^{-1} B e(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t L_0^{-1} B u_0(t_0) d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$i_s(t_0) = B^t i(t_0)$$

$i(t_0)$ - wektor prądów początkowych w cewkach indukcyjnych.

Skorzystajmy z lematu [4]:

$$\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^x f(s) ds \right] dx = \int_{t_0}^t (t-s) f(s) ds \quad (8)$$

otrzymamy wtedy całkowy opis gałęzi obwodu:

$$\dot{\mathbf{i}}_B(t) - \int_{t_0}^t -(\mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{R}_0 + \mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{T}_0(t-\tau)) \mathbf{i}_B(\tau) d\tau = \mathbf{F}_0(t) \quad (9)$$

Jest to równanie liniowe Volterry II rodzaju z funkcją wymuszającą $\mathbf{F}_0(t)$ daną wzorem:

$$\mathbf{F}_0(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{B}e(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{B}u_0(t_0) d\tau + \mathbf{i}_B(t_0) \quad (10)$$

oraz macierzą jąder:

$$\mathbf{K}(t, \tau) = -(\mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{R}_0 + \mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{T}_0(t - \tau)) \quad (11)$$

Można wykazać [4], że istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (9) w klasie funkcji ciągłych na przedziale $[t_0, t_1]$, jeśli $\mathbf{K}(t, \tau)$ jest funkcją ciągłą w trójkącie określonym nierównościami $t_0 < \tau < t < t_1$, a $\mathbf{F}_0(t)$ jest ciągła na $[t_0, t_1]$.

3. ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

W celu numerycznego rozwiązania układu równań (9) podzielmy przedział czasu $\langle t_0, t \rangle$ na N odcinków o długości Δt i zastąpmy całkę sumą:
Mamy więc:

$$\mathbf{i}_B(t_i) - \sum_{j=1}^i \mathbf{K}(t_i, t_j) \mathbf{i}_B(t_j) \Delta t = \mathbf{F}_0(t_i) \quad (12)$$

$$t_i = t_0 + (i-1) \Delta t; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

lub

$$(\mathbf{1} - \mathbf{K}(t_i, t_i) \Delta t) \mathbf{i}_B(t_i) = \mathbf{F}_0(t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{K}(t_i, t_j) \mathbf{i}_B(t_j) \Delta t \quad (14)$$

Z postaci jądra (wzór (11)) widać, że dla $t = \tau$ jest ono stałe i równe $-\mathbf{L}_0^{-1}\mathbf{R}_0$, co bardzo upraszcza obliczenia numeryczne. Wystarczy wtedy tylko raz obliczyć macierz odwrotną do $[\mathbf{1} - \mathbf{K}(t_i, t_i) \Delta t]$ dla rozpatrywanego przedziału czasu $[t_0, t_1]$.

Nie jest to więc iteracyjny sposób rozwiązywania układu równań, a zatem jest on zbieżny. Dokładność rozwiązania zależy natomiast od dokładności obliczania macierzy odwrotnej oraz od przyjętego przyrostu czasu Δt . Przyrost Δt powinien być dobrany tak, by norma wektora Δi była mniejsza od założonego błęd.

4. UOGÓLNIENIE NA GAŁĘZIE ZDEGENEROWANE

Przyjmijmy, że złożony obwód SLS zawiera N_1 gałęzi szeregowych R, L, C , e oraz $(NG-N_1)$ gałęzi zdegenerowanych. Poprzez gałąź zdegenerowaną rozumiemy gałąź, w której pominięto co najmniej jeden z parametrów R, L, C . Obwody takie opisuje we współrzędnych gałęziowych:

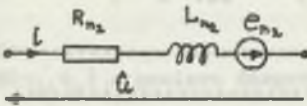
- układ N_1 równań całkowych II rodzaju dotyczący gałęzi niezdegenerowanych, z jądrami o postaci:

$$K_{n_1, n_1}(t, \tau) = - \left(\frac{R_{n_1}}{L_{n_1}} + \frac{1}{L_{n_1} C_{n_1}}(t-\tau) \right) \quad n_1 = 1, 2, \dots, N_1 \quad (15)$$

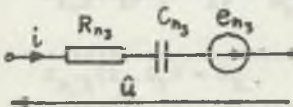
- układ N_2 równań całkowych Volterry II rodzaju odnoszący się do gałęzi o postaci przedstawionej na rys. 2

z jądrami:

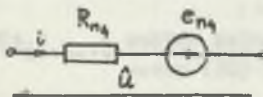
$$K_{n_2, n_2}(t, \tau) = - \frac{R_{n_2}}{L_{n_2}} \quad n_2 = 1, 2, \dots, N_2 \quad (16)$$



Rys. 2



Rys. 3



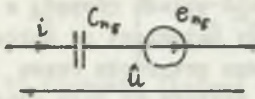
Rys. 4

- układ N_3 równań Volterry I rodzaju dla gałęzi pokazanych na rys. 3

z jądrami danymi wyrażeniami:

$$K_{n_3, n_3}(t, \tau) = \left(1 + \frac{1}{R_{n_3} C_{n_3}}(t-\tau) \right) \quad n_3 = 1, 2, \dots, N_3 \quad (17)$$

- układ N_4 równań Volterry I rodzaju dotyczący gałęzi o postaci przedstawionej na rys. 4.



Rys. 5

z jądrami o postaci

$$K_{n_4, n_4}(t, \tau) = R_{n_4}$$

$$n_4 = 1, 2, \dots, N_4 \quad (18)$$

- układ N5 równań całkowych Volterry I rodzaju dla gałęzi o postaci przedstawionej na rys. 5

z jądrami o postaci:

$$K_{n_5, n_5}(t, \tau) = \frac{1}{C_{n_5}}(t - \tau) \quad n_5 = 1, 2, \dots, N_5 \quad (19)$$

- układ N6 i N7 równań algebraicznych odnoszący się do gałęzi będących połączeniem cewek i sił elektromotorycznych lub zawierających wyłącznie siły elektromotoryczne.

Obwody rozpatrywane w tym punkcie opisuje następujący układ równań:

	$i_{n_1} - \int_{t_0}^t K_{n_1, n_1}(t, \tau) i_{n_1}(\tau) d\tau \quad L_{n_1}$	$\int_{t_0}^t (e_{n_1}(\tau) - u_{on_1}(t_0)) d\tau + L_{n_1} i_{n_1}(t_0)$	
N_1	$i_{n_2} - \int_{t_0}^t K_{n_2, n_2}(t, \tau) i_{n_2}(\tau) d\tau \quad L_{n_2}$	$\int_{t_0}^t (e_{n_2}(\tau) \cdot d\tau) + L_{n_2} i_{n_2}(t_0)$	
$N_1 + N_2$	$\int_{t_0}^t K_{n_3, n_3}(t, \tau) i_{n_3}(\tau) d\tau$	$\int_{t_0}^t (e_{n_3}(\tau) - u_{on_3}(t_0)) d\tau$	
B^N	$\int_{t_0}^t K_{n_4, n_4}(t, \tau) i_{n_4}(\tau) d\tau$	$\int_{t_0}^t (e_{n_4}(\tau) \cdot d\tau)$	(20)
$N_1 + N_2 + N_3$			
$N_1 + N_2 + N_3 + N_4$			

$$\begin{array}{l}
 \dots\dots\dots \\
 \int_{t_0}^{t_1} K_{n_5, n_5}(t, \tau) i_{n_5}(\tau) d\tau \\
 \dots\dots\dots \\
 N_1 + N_2 + N_3 \\
 + N_4 + N_5 \\
 \dots\dots\dots \\
 L_{n_6} i_{n_6}(t) \\
 \dots\dots\dots \\
 N_1 + N_2 + \dots + \\
 + N_5 + N_6 \\
 \dots\dots\dots \\
 0 \\
 \dots\dots\dots \\
 N_1 + \dots \\
 \dots + N_6 + N_7
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \dots\dots\dots \\
 \int_{t_0}^{t_1} (e_{n_5}(\tau) - u_{n_5}(t_0)) d\tau \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \int_{t_0}^{t_1} (e_{n_6}(\tau) d\tau) + L_{n_6} i_{n_6}(t_0) \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \int_{t_0}^{t_1} e_{n_7}(\tau) d\tau \\
 \dots\dots\dots
 \end{array} \right]$$

Postępując analogicznie jak w punkcie 3 zastępujemy prądy gałęziowa przez prądy strum otrzymując układ równań liniowych:

$$\mathbf{B}\mathbf{N}(t_1, t_1) \Delta t \mathbf{B}^T \mathbf{i}_n(t_1) = \mathbf{F}(t_1) + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{B}\mathbf{N}(t_1, t_j) \mathbf{B}^T \mathbf{i}_n(t_j) \Delta t \quad (21)$$

gdzie:

$\mathbf{N}(t_1, t_1)$ - macierz diagonalna, której elementy określają wsory

$$N_{k,k}(t_1, t_1) = \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{R_k}{L_k} \right) L_k \quad \text{dla } k = n_1, n_2 + N_1 \quad (22)$$

$$N_{k,k}(t_1, t_1) = R_k \quad \text{dla } k = N_2 + N_1 + n_3, N_1 + N_2 + N_3 + n_4$$

$$N_{k,k}(t_1, t_1) = 0 \quad \text{dla } k > N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$

$\mathbf{F}(t_1)$ - wektor kolumnowy, którego wyrazami są elementy prawej strony wzoru (20) dla wartości t_1 ,

$\mathbf{N}(t_1, t_j)$ - macierz diagonalna o elementach określonych wzorami

$$\begin{aligned}
 M_{k,k}(t_1, t_j) &= -(R_k + \frac{1}{C_k}(t_1 - t_j)) & k &= 1 \dots N_1 \\
 M_{k,k}(t_1, t_j) &= -R_k & k &= N_1 + n_2 \\
 M_{k,k}(t_1, t_j) &= -(R_k + \frac{1}{C_k}(t_1 - t_j)) & k &= N_1 + N_2 + n_3 \\
 M_{k,k}(t_1, t_j) &= -R_k & k &= N_1 + N_2 + N_2 + n_4 \\
 M_{k,k}(t_1, t_j) &= -(t_1 - t_j) \frac{1}{C_k} & k &= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + n_5 \\
 M_{k,j}(t_1, t_j) &= 0 & k &> N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5
 \end{aligned} \tag{23}$$

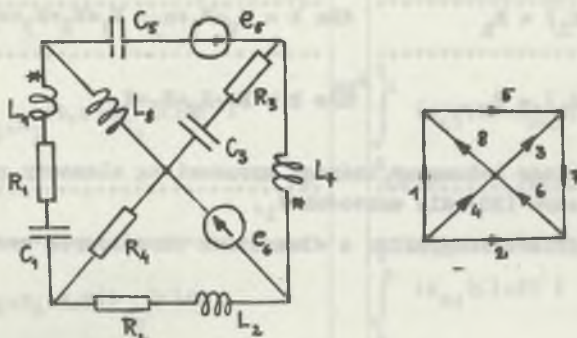
Jeśli w obwodzie wystąpią sprzężenia magnetyczne, wtedy uwzględnia się je w macierzy $M(t_1, t_1)$ (wzór (22)) lub w macierzy $\{1 - K(t_1, t_1)\}$ (wzór (14)). Uwagi dotyczące zbieżności i dokładności rozwiązania równania (21) są takie same jak dla równania (14) pod warunkiem, że istnieje macierz odwrotna do macierzy $BM(t_1, t_1)B^t$.

5. PORÓWNANIE OMÓWIONEJ METODY Z METODĄ RUNGEGO - KUTTY

Przeprowadzone obliczenia rozplywu prądów w obwodach o strukturze przyjętej w pracy metodą równań całkowych i metodą Rungego - Kutty, 4 rzędu (podprogram F4 RUNG biblioteki FSCE). Przeprowadzone eksperymenty pozwalają stwierdzić, że czasy obliczeń tymi metodami są tego samego rzędu.

Przykład 1.

Zapisać macierz $N(t_1, t_1) \Delta t$, $M(t_1, t_1)$ dla obwodu przedstawionego na rysunku 6a



Rys. 6 a, b

$$H(t_1, t_1) = \begin{bmatrix} L_1 + R_1 \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{17} & 0 \\ 0 & L_2 + R_2 \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_8 \end{bmatrix}$$

$$H(t_1, t_j) = \begin{bmatrix} -(R_1 + \frac{1}{C_1}(t_1 - t_j)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(R_3 + \frac{1}{C_3}(t_1 - t_j)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(t_1 - t_j) \frac{1}{C_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czas obliczenia prądów w tym obwodzie w przedziale czasowym (0,6) przy $\Delta t = 0,3$ wyniósł 9212 ms.

6. PODSUMOWANIE

Opisano sposób analizy (za pomocą równań całkowych dla metody prądów cięciw) obwodów SLS zawierających wyłącznie gałęzia szeregowo R, L, C, e , a następnie uogólniono tę metodę na obwody z gałęziami zdegenerowanymi. Metodę tą można zmodyfikować dla obwodów zawierających siły prądomotoryczne i wszystkie typy źródeł sterowanych. Podobnie można wyprowadzić równania całkowe dla metody potencjałów węzłowych.

LITERATURA

- [1] Demidowicz B.P.; Maron I.A.; Szuwałowa E.J. Metody numeryczne. cz. I, II. PWN, Warszawa 1965

- [2] Ghua L.O., Lin P.M.: Computer - aided analysis of electronic circuits. Prentice Hall, Inc, Engl. Cliffs. N. Jersey, USA 1975.
- [3] Michlin S.G., Smolnicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1970.
- [4] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1972.

Recenzent: doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do redakcji dn. 15 marca 1985 r.

ON AN APPLICATION OF THE INTEGRAL EQUATIONS TO THE ANALYSIS OF THE SLS CIRCUITS

S u m m a r y

A way of the time - domain analysis of lumped, linear, time - invariant (SLS) circuits has been described using integral equations, in the case of current strings. It has been shown, that the circuits with the branches being the sequential connections of resistors (R), inductors (L), capacitors (C) and arbitrary SEM (e) are described by the matrix integral Volterra equation of the second kind. It has been demonstrated, that the circuits with the branches which are arbitrary combination of (R,L,C,e) are described by the system of integral equations of the first and second kind and the system of algebraic equations. The forms of the kernels of the integral equations describing the various types of branches have been given. An algorithm making possible numerical solution of the integral and integral - algebraic equations has been given; the effectiveness of the suggested method has been compared with the method Runge - Kutta. The discussed method has been illustrated by an example.

ОБ НЕКОТОРОМ ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К АНАЛЗУ ЦЕПИ С С

Р е з ю м е

В статье представлен некоторый метод временного анализа сосредоточенных линейных стационарных цепей при помощи интегральных уравнений для метода

