ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Bernard BARON
Jan ULMAN
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH I RODZAJU POLA LINII PRZESYŁOWYCH

Streszczenie. W pracy sprowadzono zewnętrzne zagadnienie brzegowe Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a do równania całkowego I rodzaju. Rozwiązanie zagadnienia poszukiwano w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Płaszczyznę ziemi uwzględniono poprzez zastosowanie metody obrazów elektrycznych. Zastosowana metoda umożliwia obliczenie pola w nieograniczonej przestrzeni poprzez rozwiązywanie równań całkowych na granicach podziału ośrodków. Przeprowadzono algebraizację równania całkowego I rodzaju z zastosowaniem funkcji sklejanych stopnia 1 dla dwuwymiarowego modelu linii przesyłowych o dowolnych konfiguracjach. Dokonano podziału konturów przewodników na elementy i dla każdego z nich wybrano odpowiednią funkcję aproksymującą gęstość powierzchniową ładunku. Wykonując następnie całkowanie po każdym z elementów i sumując otrzymane wyniki uzyskano "operację przybliżoną" do numerycznego określenia rozkładu gęstości ładunków na powierzchni przewodników oraz potencjału pola w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników. W celu zwiększenia dokładności obliczeń zastosowano funkcje sklejane do aproksymacji funkcji gęstości ładunków na poszczególnych elementach podziału konturów przewodników. W pracy przeprowadzono dyskusję poprawności sformułowanego zagadnienia Dirichleta. Wykazano jednoznaczność rozwiązania postawionego problemu. Podano także metodę wyznaczania wektora natężenia pola elektrycznego. Uwzględniono tutaj zarówno obszar na zewnątrz przewodników, jak też na ich powierzchni. Określono algorytm obliczania składowych wektora natężenia pola w oparciu o wyznaczony wcześniej rozkład powierzchniowy gęstości ładunków. Przedstawiony w pracy algorytm przetestowano na przykładzie przewodnika o zadanym potencjale. Określony w ten sposób rozkład natężenia pola na powierzchni przewodnika porównano z rozwiązaniem dokładnym danym wzorem analitycznym. Opracowany algorytm zastosowano do obliczeń rozkładu pola linii 400 kV.

1. WSTĘP

Dwuwymiarowy model pola elektrycznego można stosować w przypadku rozpatrywania układów przewodów prowadzonych równolegle względem siebie oraz przy założeniu, że odległości między przewodami są dostatecznie małe w porównaniu z ich długością.

Model ten jest często stosowany przy analizie i syntezie pola elektrycznego linii przesyłowych w warstwie przy powierzchni ziemi. Między innymi posługiwano się nim w pracach [2] , [3] . Badanie pola w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodów, jak również na ich powierzchniach wymaga precyzyjniejszego aparatu matematycznego. Obecnie dużo uwagi zwraca się na rozwiązywanie pól elektrycznych quasi - statycznych metodą równań całkowych. Szerokie zastosowanie tej metody podyktowane jest wieloma zaletami, z których zasadnicza polega na możliwości obliczenia pola w nieograniczonej przestrzeni poprzez rozwiązywanie równań całkowych na granicach podziału ośrodków. W obliczeniach numerycznych wystarczy więc dyskretyzować tylko powierzchnie ciał, a nie całą przestrzeń, co znacząco ułatwia nie tylko stawianie zadań, lecz także ich rozwiązywanie.

Najczęściej metodę równań całkowych stosuje się w obliczeniach pól elektrycznych quasi - statycznych generowanych przez naładowane przewodniki. Za najbardziej naturalne z fizykalnego punktu widzenia jest rozwiązywanie tego typu zadań poprzez sprowadzenie ich do równań całkowych I rodzaju [14] o jądrach logarytmicznych. Podyktowane jest to przyjęciem rozwiązań zagadnień dwuwymiarowych w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Jak wiadomo, równanie całkowe I rodzaju należy do równań źle uwarunkowanych [19] . Z tego powodu do rozwiązywania tych równań stosuje się specjalne metody regularyzacji [19] , które wymagają większej pamięci EMC.

W dalszej części pracy opracowane będą ogólne algorytmy rozwiązywania zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a metodą równań całkowych I rodzaju.

2. SPROWADZENIE ZEWNĘTRZNEGO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO DIRICHLETA DLA DWUWYMIAROWEGO RÓWNANIA LAPLACE'A DO RÓWNANIA CAŁKOWEGO PIERWSZEGO RODZAJU

Poszukiwanie rozwiązania tego problemu będzie prowadzone w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Niech na płaszczyźnie R^2 dany jest układ $D_i (i=1,2,\ldots N_p)$ rozłącznych obszarów ograniczonych jednospójnych, których brzegi $C^{(i)}$ są krzywymi zamkniętymi klasy C_6^1 . Poszukuje się rozwiązania $V(X)$ zewnętrznego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a.

$$\Delta V(X) = 0 \qquad \text{dla } X \in R^2 - \bigcup_{i=1}^{N_p} \overline{D}_i \tag{2.1}$$

z warunkami brzegowymi

$$V(X) = V_i \quad \text{dla} \quad X \in C^{(i)}, \quad i = 1,2,\ldots N_p \tag{2.2}$$

znikającego w nieskończoności, w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej [14] .

$$V(X) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N_p}\oint_{C^{(k)}} \sigma^{(k)}(Y)\ln\left[\frac{1}{|XY|}\right]dl_Y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_C \sigma(Y)\ln\left[\frac{1}{|XY|}\right]dl_Y \qquad (2.3)$$

gdzie:

$$C = C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \dots \cup C^{(N_p)} .$$

Aby jednak potencjał określony wzorem (2.3) znikał w nieskończoności potrzeba i wystarcza aby

$$\int_C \sigma(X)\, dl_X = \sum_{k=1}^{N_p}\oint_{C^{(k)}} \sigma^{(k)}(X)\, dl_X = 0. \qquad (2.4)$$

Mając na uwadze zastosowanie dwuwymiarowego modelu pola elektrycznego do badania pola linii trójfazowych zakłada się dalej, że rozłączne obszary D_i znajdują się w półpłaszczyźnie $X_2 > 0$ (rys. 2.1).

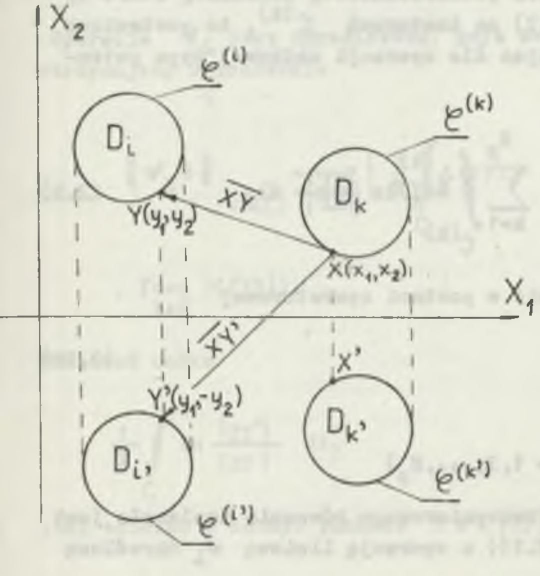
Warunki brzegowe (2.2) pozostają bez zmian, natomiast dla $X_2=0$ otrzymuje się potencjał $V(x_1,x_2)$ równy zeru

$$V(x_1,0) = 0 \qquad (2.5)$$

Rozwiązanie tak postawionego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a można otrzymać stosując metodę obrazów elektrycznych względem prostej $X_2=0$ [10]. Polega ona na uwzględnieniu warunku brzegowego (2.5) przez wprowadzenie układu $D_{i'}$ obszarów ($i'=1,2,\dots N_p$), będących odbiciem zwierciadlanym obszarów D_i ($i=1,2,\dots N_p$) względem osi X_1, na których funkcje $\sigma^{(i')}(Y')$ wynoszą

$$\sigma^{(i')}(Y') = -\sigma^{(i)}(Y)$$

$$Y = Y(y_1,y_2),\quad Y'=Y'(y_1,-y_2) \qquad (2.6)$$



Rys. 2.1

Odbicie zwierciadlane obszarów D_i w osi X_1

The mirror reflection of the D_i region in the X_1 axis

W takim przypadku rozwiązanie zewnętrznego zagadnienia Dirichleta można poszukiwać w postaci

$$V(X) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\int\limits_C \sigma(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}dl_Y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{N_p}\int\limits_{C^{(k)}}\sigma^{(k)}(y_1,y_2)\ln\frac{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}}dl_Y \tag{2.7}$$

W rozpatrywanym przypadku należy tak określić funkcję $\sigma(Y)$ na brzegu C, aby potencjał $V(X)$ spełniał warunki brzegowe (2.2) i (2.5), a na to potrzeba by spełniony był następujący układ równań całkowych I rodzaju

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N_p}\int\limits_{C^{(k)}}\sigma^{(k)}(y_1,y_2)\ln\frac{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}}\,dl_Y = 2\,\varepsilon_o V_l,\quad X(x_1,x_2)\in C^{(l)}$$

$$l = 1,2,\ldots N_p \tag{2.8}$$

Jeżeli znamy prawo rozkładu gęstości powierzchniowej ładunków, które by zapewniało spełnienie warunków (2.2) na konturach $C^{(k)}$, to postawione zadanie byłoby rozwiązane. Przyjmując dla operacji całkowej typu potencjału logarytmicznego oznaczenie

$$\mathcal{V}_L\,\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_C\sigma(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N_p}\oint\limits_{C^{(k)}}\sigma^{(k)}(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y \tag{2.9}$$

można układ równań (2.8) przedstawić w postaci operatorowej

$$\mathcal{V}_L\,\sigma = W \tag{2.10}$$

gdzie:

$$W = 2\,\varepsilon_o V_l \quad \text{dla} \quad X\in C^{(l)}\ (l = 1,2,\ldots,N_p)$$

Problem zewnętrzny Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a jest równoważny rozwiązaniu równania (2.10) z operacją liniową $\mathcal{V}_L$ określoną wzorem (2.9).

2.1. POPRAWNOŚĆ SFORMUŁOWANEGO ZAGADNIENIA

Mając na uwadze, że rozpatrywane pole elektryczne quasi- statyczne jest sinusoidalnie zmienne, należy dziedzinę i przeciwdziedzinę operatora ϑ_L rozpatrywać w przestrzeniach zespolonych funkcji punktu na konturze C, np. w przestrzeni funkcji całkowalnych z modułem $L_1^*(C)$ lub z kwadratem modułu $L_2^*(C)$. Jądro operatora całkowego ϑ_L(2.9) ma słabą osobliwość w przypadku, gdy punkty X i Y pokrywają się. Jeżeli jako dziedzinę operatora ϑ_L przyjąć przestrzeń $L_1^*(C)$;($\sigma \in L_1^*(C)$), to jak wiadomo z teorii potencjału logarytmicznego [13] operator ten przyjmuje wartości z przestrzeni funkcji ciągłych $C^*(C)$ na konturach $C = C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \ldots \cup C^{(N_p)}$. Przestrzenie $L_1^*(C)$ i $C^*(C)$ są przestrzeniami Banacha o normach

$$\|\sigma\|_{L^*(C)} = \int_C |\sigma(Y)|\,dl_Y = \sum_{i=1}^{N_p} \oint_{C^{(i)}} |\sigma^{(i)}(Y)|\,dl_Y \tag{2.11}$$

$$\|V\|_{C^*(C)} = \max_{X \in C} |V(X)| = \max_i \max_{X \in C^{(i)}} |V_i(X)| \, . \tag{2.12}$$

Operacja ϑ_L jest ograniczona, gdyż uwzględniając wzory (2.12) i (2.9) otrzymujemy oszacowanie

$$\|\vartheta_L \sigma\|_{C^*(C)} = \max_{X \in C} \left| \frac{1}{\pi} \int_C \sigma(Y) \ln \frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_Y \right| \leqslant \left(\max_{X \in C} \frac{1}{\pi} \int_C \ln \frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_Y\right) \cdot \left(\max_{Y \in C} |\sigma(Y)|\right). \tag{2.13}$$

Ponieważ całka

$$\frac{1}{\pi} \int_C \ln \frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_Y$$

jest zbieżna w każdym punkcie $X \in C$ [13], więc otrzymujemy

$$\|\vartheta_L \sigma\|_{C^*(C)} \leqslant \|\vartheta_L\|_{C(C) \to C(C)} \|\sigma\|_{C^*(C)} \tag{2.14}$$

gdzie norma operacji ϑ_L [12] wyraża się wzorem

$$\|\vartheta_L\|_{C^*(C)\to C^*(C)} = \sup\left\{\|\vartheta_L 6\|_{C^*(C)} : \|6\|_{C^*(C)} = 1\right\} = \max_{X\in C}$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y\right]. \tag{2.15}$$

Tak więc operacja ϑ_L jest operacją ograniczoną z $C^*(C)$ w $C^*(C)$, a jako taka jest ciągła [1].
Operacja ϑ_L jest również ograniczona z $L_1^*(C)$ w $L_1^*(C)$, gdyż

$$\|\vartheta_L 6\|_{L_1^*(C)} = \int_C \left|\frac{1}{\pi}\int_C 6(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y\right| dl_X \leqslant \left(\max_{Y\in C}\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_X\right).$$

$$.\left(\int_C |6(Y)|\,dl_Y\right). \tag{2.16}$$

Ponieważ całka

$$\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_X$$

jest zbieżna w każdym punkcie $Y\in C$ [13], więc uwzględniając wzór (2.16) otrzymuje się

$$\|\vartheta_L 6\|_{L_1^*(C)} \leqslant \|\vartheta\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)}\|6\|_{L_1^*(C)} \tag{2.17}$$

gdzie

$$\|\vartheta_L\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)} = \sup\left\{\|\vartheta_L 6\|_{L_1^*(C)} : \|6\|_{L_1^*(C)} = 1\right\} = \max_{Y\in C}\left[\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_X\right]$$

(2.18)

Teoria równania operatorowego (2.10) jak również metody przybliżonego rozwiązania tego równania podana jest najogólniej w przestrzeni L_2. W celu zbadania operacji ϑ_L wziętej jako operacja z $L_2^*(C)$ w $L_2^*(C)$ można skorzystać z twierdzenia Risza o interpolacji [12]. Stwierdza ono, że jeżeli liniowa operacja ϑ_L jest równocześnie operacją ograniczoną z $C^*(C)$ w $C^*(C)$ oraz z $L_1^*(C)$ w $L_1^*(C)$, to jest również operacją ograniczoną z $L_2^*(C)$ w $L_2^*(C)$ oraz

$$\|\vartheta_L\|_{L_2^*(C)\to L_2^*(C)} \leqslant (\|\vartheta_L\|_{C^*(C)\to C^*(C)})^{\frac{1}{2}} (\|\vartheta_L\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)})^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Ponieważ jądro operacji ϑ_L jest rzeczywiste i symetryczne, tj. (rys. 2.1)

$$\ln\frac{|XY'|}{|XY|} = \ln\frac{|YX'|}{|YX|} \quad (2.20)$$

więc uwzględniając wzory (2.15), (2,18) i (2.20) w nierówności (2.19) otrzymuje się

$$\|\vartheta_L\|_{L_2^*(C)\to L_2(C)} \leqslant \max_{X\in C}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y = \|\vartheta_L\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)} =$$

$$= \|\vartheta_L\|_{C^*(C)\to C^*(C)} \quad (2.21)$$

Operacja ϑ_L zdefiniowana wzorem (2.9) spełnia warunek [13]

$$\vartheta_L \sigma = 0 \Longleftrightarrow \sigma = 0 \quad (2.22)$$

Warunek (2.22) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby operacja liniowa ϑ_L była odwracalna [1]. Z warunku (2.22) wynika jednoznaczność rozwiązania równania (2.10).

2.2. APROKSYMACJA OPERATORA TYPU POTENCJAŁU LOGARYTMICZNEGO WARSTWY POJEDYNCZEJ

W praktycznych realizacjach zamiast równania (2.10) rozwiązuje się równanie

$$\vartheta_{LP}\sigma = W$$

gdzie ϑ_{LP} jest operacją "bliską" operacji ϑ_L (w sensie normy w $L_2^*(\mathbf{C})$) i w metodach numerycznych powstaje w wyniku dyskretyzacji operacji całkowej ϑ_L.
Najogólniej rzecz biorąc wyraża się ona w postaci

$$\vartheta_{LP}\,\sigma = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N} c_i^{(k)}(X)\,\sigma^{(k)}(Y_i^{(k)}) \tag{2.24}$$

gdzie tzw. funkcje kształtu $c_i^{(k)}(X)$ dla danego jądra operacji ϑ_L zależą od wyboru formuły przybliżonego całkowania, a więc od wyboru funkcji aproksymującej funkcję $\sigma^{(k)}(X)$ na $\mathbf{C}^{(k)}$, jak również od sposobu aproksymacji dowolnych konturów $\mathbf{C}^{(k)}$.

W konstrukcji operatora "bliskiego" należy przede wszystkim dokonać podziału konturów $\mathbf{C}^{(k)}$ na elementy $\mathbf{C}_i^{(k)}$ i dla każdego z nich wybrać odpowiednią funkcję aproksymującą $\sigma_i^{(k)}(X)$. Wykonując następnie całkowanie po każdym z elementów $\mathbf{C}_i^{(k)}$ i sumując otrzymane wyniki otrzymujemy operację przybliżoną w postaci (2.24). Zwiększenie dokładności obliczeń funkcji kształtu $c_i^{(k)}(X)$ może być osiągnięte przez zastosowanie tzw. funkcji sklejanych do aproksymacji funkcji gęstości ładunków $\sigma_i^{(k)}(X)$ na elementach $\mathbf{C}_i^{(k)}$ podziału konturów $\mathbf{C}^{(k)}$ [6].

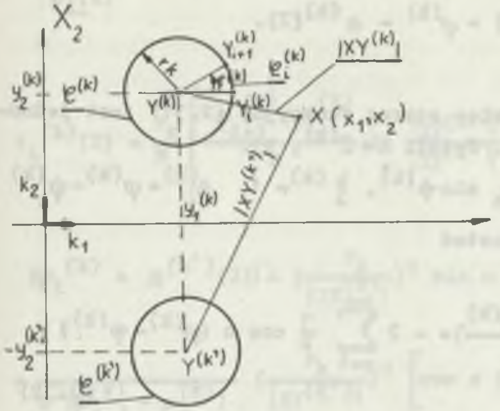
2.2.1. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanego na dowolnych okręgach

Niech zadane są promienie r_k oraz ich środki o współrzędnych $y_1^{(k)}$, $y_2^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots N_p)$, wówczas zbiór punktów należących do łuku $\mathbf{C}_i^{(k)}$ łączącego punkty $Y_i^{(k)}, Y_{i+1}^{(k)} \in \mathbf{C}^{(k)}$ zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 2.2. wyraża się wzorem

$$\mathbf{C}_i^{(k)} = \left\{ (y_1,y_2):\ y_1=y_1^{(k)}+r_k\cos\varphi^{(k)};\ y_2=y_2^{(k)}+r_k\sin\varphi^{(k)};\ \varphi_i^{(k)}\leq\varphi^{(k)}\leq\varphi_{i+1}^{(k)} \right\} \tag{2.25}$$

Funkcję gęstości ładunków będzie się aproksymować funkcją sklejaną stopnia pierwszego interpolującą dane wartości $\sigma_i^{(k)}$ w punktach podziału $Y_i^{(k)}$ okręgu $\mathbf{C}^{(k)}$, tj. w postaci

$$\sigma_i^{(k)}(y_1,y_2) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_i^{(k)}\varphi_{i+1}^{(k)} - \sigma_{i+1}^{(k)}\varphi_i^{(k)}}{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}} + \dfrac{\sigma_{i+1}^{(k)} - \sigma_i^{(k)}}{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}}\varphi^{(k)} & \text{dla } (y_1,y_2) \in C_i^{(k)} \\ 0 & \text{dla } (y_1,y_2) \notin C_i^{(k)} \end{cases} \tag{2.26}$$



Rys. 2

Kontur $C^{(k)}$ wraz z odbiciem zwierciadlanym

Contour $C^{(k)}$ with ist mirror reflection

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami otrzymuje się:

$$\ln \frac{|XY'|}{|XY|}\Bigg|_{Y\in C_i^{(k)}} = \ln\frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \frac{1}{2}\ln\left|1-2\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\cos\left[\varphi^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)\right] + \left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-2\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\cos\left[\varphi^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)\right] + \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^2\right| \tag{2.27}$$

gdzie

$$|XY^{(k)}| = \sqrt{(x_1-y_1^{(k)})^2 + (x_2-y_2^{(k)})^2}; \quad |XY^{(k')}| = \sqrt{(x_1-x_1^{(k)})^2 + (x_2+y_2^{(k)})^2} \tag{2.28}$$

$$\cos\alpha^{(k)}(X) = \frac{x_1-y_1^{(k)}}{|XY^{(k)}|}; \quad \sin\alpha^{(k)}(X) = \frac{x_2-x_2^{(k)}}{|XY^{(k)}|} \tag{2.29}$$

$$\cos\alpha^{(k')}(X) = \frac{x_1-y_1^{(k)}}{|XY^{(k')}|}; \quad \sin\alpha^{(k')}(X) = \frac{x_2+y_2^{(k)}}{|XY^{(k')}|} \tag{2.30}$$

Funkcje logarytmiczne [8] występujące we wzorze (2.27) są rozwijalne w następujący szereg funkcyjny

$$\ln\left|1-2\xi^{(k)}\cos\beta^{(k)}+(\xi^{(k)})^2\right| = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\xi^{(k)})^n\cos n\beta^{(k)} \tag{2.31}$$

gdzie

$$\xi^{(k)}(X) = \frac{r_k}{|XY^{(k)}|}, \quad \beta^{(k)}(X) = \varphi^{(k)} - \alpha^{(k)}(X).$$

Jeżeki $X \notin C^{(k)}$, to $0 \leqslant \xi^{(k)} < 1$ a więc szereg funkcyjny (2.31) jest jednostajnie zbieżny ze względu na $\beta^{(k)}$. Jeżeli $X \in C^{(k)}$, tj. $x_1 = y_1^{(k)} + r_k\cos\psi^{(k)}$, $x_2 = y_2^{(k)} + r_k\sin\psi^{(k)}$, $\xi^{(k)} = 1$, $\beta^{(k)} = \varphi^{(k)} - \psi^{(k)}$ i wtedy równanie (2.31) przyjmuje postać

$$\ln 2\left|1-\cos\beta^{(k)}\right| = 2\ln\left(2\sin\frac{\varphi^{(k)}-\psi^{(k)}}{2}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\left(\varphi^{(k)}-\psi^{(k)}\right) \tag{2.32}$$

przy czym szereg (2.32) jest zbieżny poza punktami $\varphi^{(k)} = \psi^{(k)}$ oraz $\varphi^{(k)} = \psi^{(k)} + 2\pi$ $(\psi^{(k)} < \varphi^{(k)} < 2\pi + \psi^{(k)})$.

Zgodnie z wzorami (2.27) i (2.31) słabo osobliwe jądro operacji (2.9) można dla $Y \in C^{(k)}$ przedstawić w postaci następującego szeregu ze względu na zmienną $\varphi^{(k)}$

$$\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\Bigg|_{Y\in C^{(k)}} = \ln\frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n\cos n\left[\varphi^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)\right] +$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n\cos\left[\varphi^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)\right]. \tag{2.33}$$

Uwzględniając wzory (2.33) oraz (2.26) we wzorze (2.9) otrzymuje się

$$\vartheta_L \sigma = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \int_{\varphi_i(k)}^{\varphi_{i+1}(k)} \sigma_i^{(k)}(Y) \ln \frac{|XY'|}{|XY|} dl_Y \tag{2.34}$$

gdzie:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_i(k)}^{\varphi_{i+1}(k)} \sigma_i^{(k)}(Y) \ln \frac{|XY'|}{|XY|} dl_Y = a_i^{(k)}(X)\, \sigma_i^{(k)} + b_{i+1}^{(k)}(X)\, \sigma_{i+1}^{(k)} \tag{2.35}$$

$$a_i^{(k)}(X) = \frac{r_k}{\pi} \Bigg\{ \frac{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}}{2} \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Bigg[\left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \sin n$$

$$(\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \sin n\, (\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) \Bigg] + \sum_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \Big[\cos n\, (\varphi_{i+1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \cos n$$

$$(\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) \Big] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \Big[\cos n\, (\varphi_{i+1}^{(k)} -$$

$$- \alpha^{(k)}(X)) - \cos n\, (\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) \Big] \Bigg\} \tag{2.36}$$

$$b_{i+1}^{(k)}(X) = \frac{r_k}{\pi} \Bigg\{ \frac{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}}{2} \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Bigg[\left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \sin n\, (\varphi_{i+1}^{(k)} -$$

$$- \alpha^{(k)}(X)) - (\frac{r_k}{|XY^{(k')}|})^n \sin n\,(\varphi_{i+1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X))\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})} (\frac{r_k}{|XY^{(k)}|})^n \cdot$$

$$\cdot \Big[\cos n\,(\varphi_{i+1}^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n\,(\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)\Big] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})}$$

$$(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|})^n \cdot \Big[\cos n\,(\varphi_{i+1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \cos n\,(\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X))\Big]\Bigg\} \cdot \quad (2.37)$$

Podstawiając (2.35) do wzoru (2.34) oraz porządkując sumę po "i" ze względu na zmienne węzłowe $\sigma_i^{(k)}$ otrzymuje się ostateczny wzór na operację przybliżoną dla operacji $\mathcal{V}_L$ w postaci

$$\mathcal{V}_{LP}\sigma = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} C_i^{(k)}(X)\, \sigma_i^{(k)} \qquad (2.38)$$

gdzie:

$$C_i^{(k)}(X) = \frac{r_k}{\pi} \Bigg\{ \frac{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_{i-1}^{(k)}}{2} \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (\frac{r_k}{|XY^{(k)}|})^n \cdot$$

$$\Bigg[\frac{\cos n(\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n(\varphi_{i-1}^{(k)} - \alpha^{(k)}(X))}{\varphi_i^{(k)} - \varphi_{i-1}^{(k)}} -$$

$$- \frac{\cos n(\varphi_{i+1}^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n(\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X))}{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}} \Bigg] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (\frac{r_k}{|XY^{(k')}|})^n \Bigg[- \frac{\cos n(\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \cos n(\varphi_{i-1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X))}{\varphi_i^{(k)} - \varphi_{i-1}^{(k)}} +$$

$$+\left.\frac{\cos n\left(\varphi_{i+1}^{(k)}+\alpha^{(k)}(X)\right)-\cos n\left(\varphi_{i}^{(k)}+\alpha^{(k')}(X)\right)}{\varphi_{i+1}^{(k)}-\varphi_{i}^{(k)}}\right]\Bigg| \tag{2.39}$$

Łatwo zauważyć, że tzw. funkcje kształtu $C_i^{(k)}(X)$ są dane przez jednostajnie zbieżne szeregi funkcyjne (2.39) niezależnie od położenia punktu X. W ten sposób otrzymano ogólną procedurę obliczenia potencjału logarytmicznego $V_{LP}\,\sigma$ zadanego na rozłącznych okręgach $C^{(k)}$, w której wystarczy podać współrzędne $Y^{(k)}$ środków okręgów oraz ich kąty podziału $\varphi_i^{(k)}$ wraz z odpowiadającymi im zmiennymi węzłowymi aby, zgodnie z wzorami (2.38) i (2.39), otrzymać potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej w dowolnym punkcie półpłaszczyzny $X_2 \geqslant 0$.

3. OBLICZENIE ROZKŁADU WEKTORA NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO W UJĘCIU DWUWYMIAROWYM

Przybliżone rozwiązanie V(X) w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników (wzór 2,38) przedstawia się w postaci

$$V(X) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N_p}\sum_{i=1}^{N_k} C_i^{(k)}(X)\,\sigma_i^{(k)}. \tag{3.1}$$

Niezależnie od sposobu przybliżonego rozwiązania potencjału V(X) natężenie pola elektrycznego w obszarze zewnętrznym przewodników określa się wzorem:

$$\vec{E}(X) = -\operatorname{grad} V = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N_p}\sum_{i=1}^{N_k}\sigma_i^{(k)}\operatorname{grad}_X C_i^{(k)}(X). \tag{3.2}$$

Jeżeli potencjały poszczególnych przewodników są zadane w postaci zespolonej, co odpowiada rzeczywistym przebiegom sinusoidalnie zmiennym o tych samych pulsacjach lecz różnych fazach początkowych, to również gęstości węzłowe $\sigma_i^{(k)}$ będące rozwiązaniem układu równań (2.8) są zespolone, a zgodnie z wzorem (3.2) składowe E_{x_1} i E_{x_2} wektora $\vec{E}(X)$ są również zespolone

$$\vec{E}(X) = \vec{k}_1 E_{x_1}(X) + \vec{k}_2 E_{x_2}(X). \tag{3.3}$$

Jak pokazano w pracy [2] w takim przypadku, ogólnie rzecz biorąc, w dziedzinie czasowej wektor $\vec{E}(X,t) = \vec{k}_1 E_{x_1}(X,t) + \vec{k}_2 E_{x_2}(X,t)$ zakreśla w ciągu okresu T elipsę. Składowe wektora natężenia pola elektrycznego w kierunku półosi dużej i małej tej elipsy wynoszą odpowiednio

$$E_a(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{t\in(0,T]} |\vec{E}(X,t)| = |E_1(X)| + |E_2(X)| \tag{3.4}$$

$$E_b(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{t\in(0,T]} |\vec{E}(X,t)| = \big||E_1(X)| - |E_2(X)|\big| \tag{3.5}$$

gdzie:

$$E_1(X) = |E_1(X)|\, e^{j\alpha_1(X)} = \frac{1}{2}\left[E_{x_1}(X) + jE_{x_2}(X)\right]$$

$$E_2(X) = |E_2(X)|\, e^{j\alpha_2(X)} = \frac{1}{2}\left[E^*_{x_1}(X) + jE^*_{x_2}(X)\right].$$

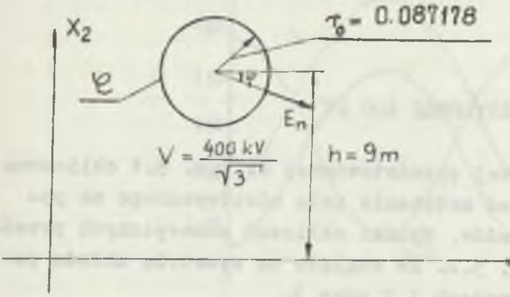
Jeśli we wzorze (3.2) dokonać przejścia granicznego zmierzając z punktem X do powierzchni dowolnego przewodnika $C^{(k)}$, to otrzymuje się składową normalną wektora natężenia pola w danym punkcie Y_i^k jego konturu. Jeżeli prototypem rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta jest potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej (2.7), to przejście graniczne jest równoważne znajomości gęstości powierzchniowej ładunków

$$\sigma_i^{(k)} = \varepsilon_0 E_n(Y_i^{(k)})$$

4. PRZYKŁAD TESTUJĄCY

Przedstawiony w pracy algorytm wykorzystano do znalezienia rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodnika (rys. 4.1) o potencjale $V = \frac{400\ \text{kV}}{\sqrt{3}}$.

Obliczenie zrealizowano dla podziału konturu przewodnika na $N_k = 8$, 16 oraz 32 łuki. Wartości obliczonych w ten sposób składowych E_n na powierzchni przewodnika porównano (tabela 1) z rozwiązaniem dokładnym danym wzorem analitycznym (4.1).



Rys. 4.1

Przewodnik umieszczony nad powierzchnią ziemi

The conductor above the earth surface

$$E_n = \frac{\sigma(\varphi)}{\varepsilon_0} = \frac{V\sqrt{\frac{h^2}{r_o^2} - 1}}{\mathrm{Arsh}\sqrt{\frac{h^2}{r_o^2} - 1}} \cdot \frac{1}{h + r_o \sin\varphi} \qquad (4.1)$$

gdzie:

$$\mathrm{Arsh}\,y = \ln\left|y + \sqrt{y^2 + 1}\right|$$

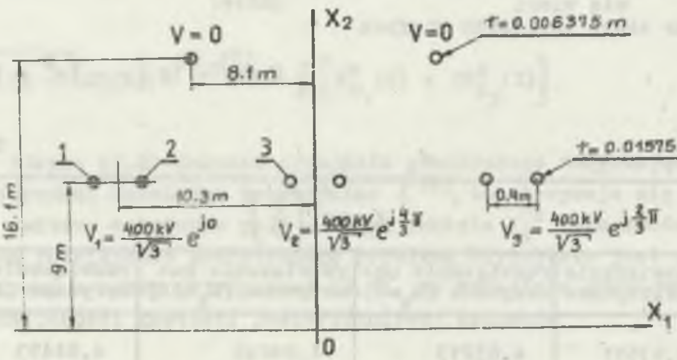
Tabela 1

φ	$E_n x 10^5 \left[\frac{V}{m}\right]$			
	rozwiązanie analityczne	rozwiązanie numeryczne (N_k=8)	rozwiązanie numeryczne (N_k=16)	rozwiązanie numeryczne (N_k=32)
$\frac{\pi}{4}$	4,93591	4,85213	4,84846	4,84493
$\frac{\pi}{2}$	4,92204	4,84066	4,83771	4,83456
$\frac{3}{4}\pi$	4,93591	4,85213	4,84846	4,84493
π	4,96972	4,88078	4,87507	4,87052
$\frac{5}{4}\pi$	5,00399	4,91063	4,90245	4,89677
$\frac{3}{2}\pi$	5,01833	4,92340	4,91406	4,90787
$\frac{7}{4}\pi$	5,00399	4,91063	4,90245	4,89677
0	4,96972	4,88078	4,87507	4,87052

Błąd rozwiązania numerycznego nie przekracza 2 %, a współczynniki uwarunkowania macierzy układu równań aproksymującego układu równań (2.8) wynoszą dla podziału konturu C na N_k = 8, 16 oraz 32 łuki odpowiednio: 127, 518 oraz 1679.

5. PRZYKŁAD TRÓJFAZOWEJ LINII PRZESYŁOWEJ 400 kV

Dla trójfazowej linii przesyłowej przedstawionej na rys. 5.1 obliczono w oparciu o podany algorytm rozkład natężenia pola elektrycznego na powierzchniach poszczególnych przewodów. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w formie wykresów na rys. 5.2. Ze względu na symetrię układu podano rozkład składowej E_n na przewodach 1,2 oraz 3.

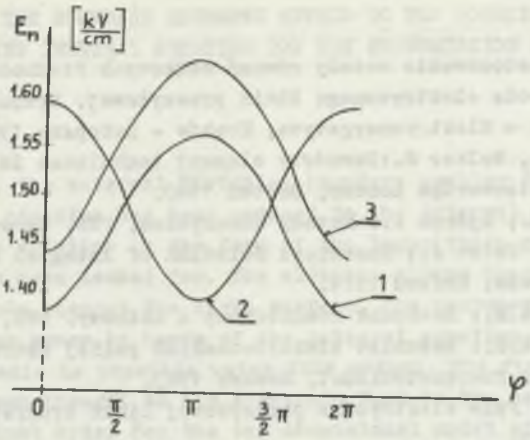


Rys. 5.1
The 3-phase transmission line 400 kV
Linia przesyłowa trójfazowa 400 kV

1, 2, 3, - powierzchnie przewodów, dla których określono rozkład składowej E_n; V_1, V_2, V_3 - potencjały poszczególnych faz

1, 2, 3 - the conductor surfaces with the distribution of the E_n compound determined; V_1, V_2, V_3 - phase potentials

Obliczenia przeprowadzono dla podziału konturów $C^{(k)}$ (k=1,...8) przewodów na N_k = 16 łuków.



Rys. 5.2

Rozkład natężenia składowej E_n na powierzchniach przewodników 1, 2 oraz 3

The distribution of the field strenght compound E_n on the surfaces of the conductors 1, 2, 3

6. ZAKOŃCZENIE

Opracowany algorytm umożliwia obliczanie rozkładów natężenia pola na powierzchniach przewodów linii przesyłowych, jak również w dowolnym punkcie zewnętrznym. W zależności od przyjętego sposobu aproksymacji funkcji σ na konturach $C^{(k)}$ przewodników otrzymujemy do rozwiązania układ równań algebraicznych o odpowiednim rozmiarze. Macierz otrzymanego układu równań jest macierzą gęstą i o współczynniku uwarunkowania powiększającym się wraz ze wzrostem jej wymiarów. Przeprowadzone przez autorów liczne przykłady numeryczne dla linii 400 kV, jak również 700 kV pokazały, że pomimo zastosowania dyskretyzacji prowadzącej do otrzymania układów równań o wymiarach 150 x 150 otrzymano błędy nie przekraczające 3 ÷ 4 % w stosunku do wyników pomiarowych.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Baron B.: Pole elektryczne linii przesyłowych trójfazowych najwyższych napięć. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 73, 1980.

[3] Baron B.: Synteza pola elektrycznego linii trójfazowej. Intern. Symp. Theoretische Elektr. Sept. 1983, Ilmenau.

[4] Baron B.: Zastosowanie metody równań całkowych Fredholma I rodzaju do badania pola elektrycznego linii przesyłowej. Sympozjum Metody Matematyczne w Elektroenergetyce, Kraków - Zakopane 1983, 115-125.
[5] Brebbia C.A., Walker S.:Bonudary element techniques in Engineering-Newnes - Butterworths London, Boston 1980.
[6] Dahlaquist G., Björck A.: Metody numeryczne, PWN, Warszawa 1983.
[7] Delves L.M., Walsh J.: Numerical Solution of integral equations. Clarendon Press, Oxford 1974.
[8] Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1978.
[9] Koleczickij E.S.: Rasczient elektriczeskich poliej ustrojstw wysokowo naprjażenija. Energoatomizdat, Moskwa 1983.
[10] Konorski B.: Pole elektryczne przesyłowej linii trójfazowej. PWN, Warszawa 1970.
[11] Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. PWN, Warszawa 1967.
[12] Krejn S.G.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1967.
[13] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu II. PWN, Warszawa 1959.
[14] Sastry S.S.: Numerical solution of Fredholm integral equations with a logarithmic singularity. Int. J. Num-Math. Engng., 10 (1976), 1202 - 1207.
[15] Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1977.
[16] Sikora R., Pałka R.: Synthesis of one - and two dimensional electrostatic field. Arch. f. Elektr. 64, 1981, 105 - 108.
[17] Sikora R.: Wybrane zagadnienia z teorii pola elektromagnetycznego. PAN-O, Poznań, Seria: Elektrotechn. i Elektronika - Tom IX, PWN, Warszawa - Poznań 1984.
[18] Ulman J.: Komputerowa analiza pola elektrycznego trójfazowych linii przesyłowych najwyższych napięć. Praca doktorska - Gliwice 1983.
[19] Zimny P.: Zastosowanie metody równań całkowych i elementów skończonych do obliczania quasi - stacjonarnego pola elektromagnetycznego w ośrodkach przewodzących. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Elektryka Nr 50. Gdańsk 1980.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 1 marca 1985 r.

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENTS METHOD TO THE SOLUTION OF THE FIRST KIND INTEGRAL EQUATION FOR THE TRANSMISSION LINE

S u m m a r y

In the work, the external Dirichlet boundary problem for the two dimensional Laplace equation has been reduced to the integral equation of the first kind. The solution in the form of the logarithmic potential of the singlelayer has been looked for. The electric mirror image method has been used to take into account the earth surface. The computation of the field in the boundless space by means of the integral equation solution on the bounds of the media is possible using this method. The first kind integral equation has been brought to its algebraic form by the use of spline functions of the first order for the two dimensional model of transmission lines with different cofingurations. The division of the conductor contours into elements has been done. The function for the approximation of the surface charge density has been found for each element. The approximation of the numerical calculation of the charge density distribution on the conductor surface and of the field potential outiside the conductor has been found as the sum of the integration results for all elements. The spline functions have been used for the approximation of the charge density on the individual elements of the conductor division to obtain the greater accuracy. The discussion of the correctness of the formulated Direchlet problem has been carried out. The explicit character of the obtained solution has been proved. The method of the determination of field strenght vector and the calculation algorithm of the field strenght vector components with the use of the charge density distribution has been given. The outside space and the surface of the conductor has been respected. The algorithm has been used (as an example) for the conductor with the known potential. The result has been compared with that obtained by means of accurate analytical expression. The algoritm has then been used for 400 kV line.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I - го РОДА ПЛОЩАДИ ПЕРЕСЫЛЬНЫХ ЛИНИИ

Р е з ю м е

В работе сведено внешнюю краевую проблему Дирихле для двухмерного уравнения Лапласа к интегральному уравнению I-го рода. Найдено решение проблемы в

виде логарифмического потенциала простого слоя. Плоскость Земли учтена через применение метода электрических образов. Применение делает возможным вычислить поле в бесконечном пространстве, решая интегральные уравнения на границе разделения сердцевин.

В работе приведена алгебрвизация интегрального уравнения I-го род с применеием склеенных функций I-ой степени для двухмерного образца пересыльных линий с длинными конфигурациями. Произведено разделение контуров проводников на элементы и для каждого из них избрана соответствующая функция приближающая поверхностную плотность зарядов. Интегрируя по каждому элементу и складывая эти результаты получена приблизительная операция для определения расположения плотности зарядов на поверхности проводников и потенциала поля в произвольной точке вне проводника используя компьютер. Для получения большей точности вычислений применены склеенные функции аппроксимирующие функции плотности зарядов на элементах контуров проводников.

В работе проведена дискуссия над правильностью сформулированной проблемы дирихле и доказано, что решение этой проблемы однозначно. Представлен также метод определения вектора напряжения электрического поля. Учтено также как пространство вне так и на поверхности проводников. Определён алгоритм вычисления составляющих вектора напряжения используя определённое раньше распределение поверхностной плотности зарядов. Представлен в работе алгоритм был перетестован на примере проводника с известным потенциалом. Определённое таким образом распределение напряжения поля на поверхности проводника сравнено с аналитической формулой. Разработанный алгоритм был использован к вычислению распределения поля линий 400 кВ.