ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O PUNKTACH OSOBLIWYCH LINII SIŁ POLA ELEKTROSTATYCZNEGO

Streszczenie. W artykule przeprowadzono jakościową analizę rozwiązań równań linii sił pola elektrostatycznego w otoczeniu punktów osobliwych pola. W pierwszym etapie analizy określono warunki, jakie muszą spełniać wartości własne macierzy stabilności układu równań pierwszego liniowego przybliżenia dla równań linii sił pola. W dalszej części artykułu przeanalizowano własności trajektorii równań linii sił pola w otoczeniu punktów krytycznych niezdegenerowanych oraz w otoczeniu punktów krytycznych zdegenerowanych, w których macierz stabilności układu równań linii sił pola posiada jedną wartość własną równą zeru. Stwierdzono, że te punkty osobliwe mają charakter punktów siodłowych i że prawie wszystkie linie sił są krzywymi siodłowymi.

1. WSTĘP

Analiza topologiczna rozwiązań równań linii sił pól potencjalnych w otoczeniu punktów krytycznych stanowi ważne zagadnienie z uwagi na duże znaczenie pojęciowe "rurki sił" w teorii pola. Analiza ta przeprowadzona jest z reguły dla konkretnie przyjętych modeli układów polowych. Rozważania przeprowadzone w niniejszej pracy nie wymagają żadnej konkretyzacji geometrii układów polowych.

Przyjmijmy, że w obszarze ograniczonym $D \in R^3$ zadana jest funkcja harmoniczna V. Równania linii sił pola elektrostatycznego w tym obszarze opisuje układ równań:

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = E_k(x) \quad k = 1,2,3 \quad x = (x_1,x_2,x_3) \quad x \in D \tag{1}$$

gdzie:

E_k - składowe wektora natężenia pola elektrostatycznego określone wzorem:

$$E_k = \frac{\partial}{\partial x_k} V \quad k = 1,2,3 \tag{2}$$

Punkty krytyczne funkcji harmonicznych (tzn. punkty, w których grad V = 0) są punktami osobliwymi układu równań (1). Istotne jest więc zbadanie struktury zbioru punktów krytycznych funkcji V w obszarze D oraz zbadanie zachowania się trajektorii układu równań (1) w otoczeniu punktów krytycznych.

2. STRUKTURA ZBIORU PUNKTÓW KRYTYCZNYCH FUNKCJI HARMONICZNEJ

W pracy [1, s. 262] wykazano, że zbiory punktów krytycznych funkcji harmonicznej nie mogą być regularnymi płatami powierzchniowymi. W pracach [2, 3] wykazano, że zbiór punktów krytycznych funkcji harmonicznej w ograniczonym obszarze $D \in R^3$ można przedstawić w postaci:

$$N = \left(\bigcup_{i=1}^{m} N_i^{(1)}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{(2)}\right) \tag{3}$$

gdzie:

$$N : \left\{ x \in D:\ \mathrm{grad}\, V(x) = 0 \right\} \tag{4}$$

$$N_i^{(1)} : \left\{ x \in D:\ \mathrm{grad}\, V(x) = 0 \cap H(x) \neq 0 \right\} \tag{5}$$

$$N_i^{(2)} : \left\{ x \in D:\ \mathrm{grad}\, V(x) = 0 \cap H(x) = 0 \right\} \tag{6}$$

$H(x)$ - hesjan funkcji V w punkcie $x \in D$.

W pracy [3] wykazano ponadto, że zbiór $\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{(2)}$ rozpada się na cztery składowe:

$$\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{(2)} = \bigcup_{i=1}^{n_1} M_i \cup \bigcup_{i=1}^{n_2} S_i \cup \bigcup_{i=1}^{n_3} R_i \cup \bigcup_{i=1}^{n_4} T_i \tag{7}$$

gdzie:

$$M_i : \left\{ x \in D\ :\ \mathrm{grad}\, V(x) = 0 \cap H(x) = 0 \right\};\ \dim M_i = 1 \tag{8}$$

przy czym:

$$\bigwedge_{i,k} M_i \cap M_k = \emptyset \tag{9}$$

$$S_i : \left\{ x \in D : \text{grad } V(x) = 0 \cap H(x) = 0 \right\} ; \dim S_i = 1 \tag{10}$$

$$\bigvee_{i,k,l,\ldots,m} S_i \cap S_k \cap S_l \cap \ldots \cap S_m = \Lambda ; \dim \Lambda = 0 \tag{11}$$

$$i + k + l + \ldots + m = 2n \quad n \in N$$

$$R_i : \left\{ x \in D : \text{grad } V(x) = 0 \cap H(x) = 0 \right\} ; \dim R_i = 0 \tag{12}$$

$$T_i : \left\{ x \in D : \text{grad } V(x) = 0 \cap H(x) \equiv 0 \right\} ; \dim T_i = 0 \vee \dim T_i = 1. \tag{13}$$

Zbiory krytyczne określone wzorem (5) są zbiorami Morse'a (niezdegenerowanymi), więc [4, s. 21] są one punktami izolowanymi.

Na podstawie powyższych wzorów można stwierdzić, że w obszarze ograniczonym $D \in R^3$ funkcja harmoniczna posiada skończoną liczbę:

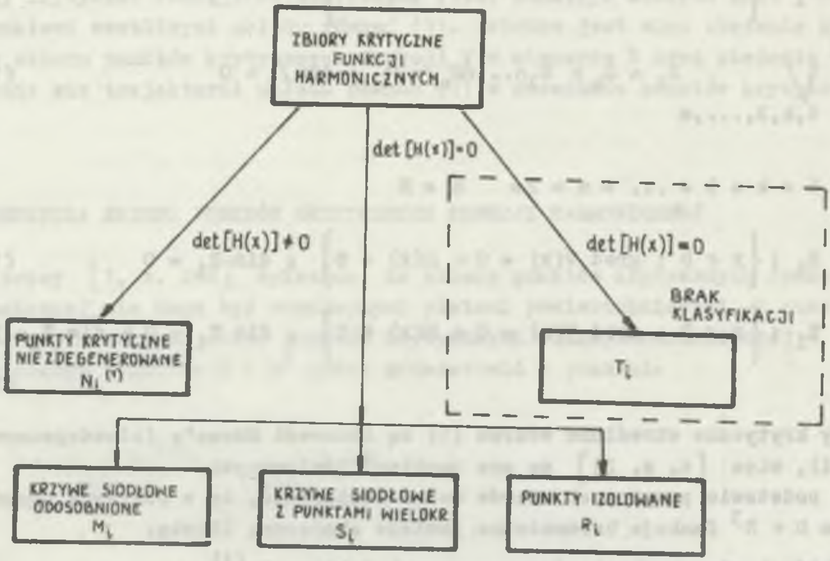
- punktów krytycznych niezdegenerowanych (zbiory $N_i^{(1)}$),
- krzywych odosobnionych (zbiory M_i),
- krzywych z punktami wielokrotnymi (zbiory S_i),
- izolowanych punktów osobliwych zdegenerowanych (zbiory R_i),
- zbiorów krytycznych silnie zdegenerowanych (zbiory T_i).

Ponadto wykazano [3], że zbiory M_i, S_i są krzywymi analitycznymi o kształcie krzywych siodłowych. Dla funkcji harmonicznych w postaci ogólnej analiza struktury zbiorów T_i (wzór (13)) do chwili obecnej nie została przeprowadzona [5,6] z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków [7]. Przypadkiem tym zajmować się nie będziemy. Strukturę zbiorów krytycznych funkcji harmonicznych przedstawiono na rys. 1.

3. ANALIZA WARTOŚCI WŁASNYCH MACIERZY STABILNOŚCI UKŁADU RÓWNAŃ LINII SIŁ POLA

Dla układu równań (1) w punkcie osobliwym x_0 rozpatrzmy przyporządkowany mu układ równań pierwszego liniowego przybliżenia:

$$\frac{dx}{dt}(t) = Hx \tag{14}$$



Rys. 1
Struktura zbiorów krytycznych funkcji harmonicznych
The structure of critical sets for harmonic functions

gdzie:

H - macierz stabilności (hesjan funkcji V w punkcie x_o).

Równanie charakterystyczne macierzy H po rozpisaniu przyjmie postać:

$$\det\left[H-\lambda I\right] = \lambda^3-\lambda^2\ \Delta V+\lambda\left\{V_{x_3x_3}(V_{x_1x_1}+V_{x_2x_2})+V_{x_1x_1}\ V_{x_2x_3}-V_{x_1x_3}^{2}-V_{x_2x_3}^{2}-V_{x_1x_2}^{2}\right\}-\det\left[H\right]=0 \tag{15}$$

gdzie:

$$V_{x_ix_j}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_{x_o}$$

$$\Delta V=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

Po prostych przekształceniach wzór (15) przyjmie postać:

$$\det\left[H-\lambda I\right] = \lambda^3-\lambda^2\ \Delta V-\frac{1}{2}\lambda\left(V_{x_1x_1}^2+V_{x_2x_2}^2+V_{x_3x_3}^2+2V_{x_1x_2}^2+2V_{x_1x_3}^2+2V_{x_2x_3}^2\right)-$$

$$\det\left[H\right] = 0 \tag{16}$$

oraz

$$\det\left[H-\lambda I\right] = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \lambda^3-\lambda^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+$$

$$+\lambda\left\{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2\right\}-\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0. \tag{17}$$

Ponieważ $\Delta V\Big|_{x\in D} = 0$, to z porównania wzorów (16), (17) uzyskujemy:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0. \tag{18}$$

Wykorzystując wzór (18) łatwo można wykazać tożsamość

$$\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2). \tag{19}$$

Porównując wzory (16), (17), (19) uzyskamy:

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = V_{x_1x_1}^2+V_{x_2x_2}^2+V_{x_3x_3}^2+2V_{x_1x_2}^2+2V_{x_1x_3}^2+2V_{x_2x_3}^2 \tag{20}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det\left[H\right]. \tag{21}$$

Z symetrii macierzy H oraz ze wzorów (18), (20), (21) wynikają następujące wnioski:

- wartości własne macierzy H są rzeczywiste,
- wartości własne macierzy H są różne od zera, gdy $\det H \neq 0$,
- wartości własne macierzy H posiadają różne znaki lub wszystkie są równe zeru,
- macierz H może posiadać pojedynczą wartość własną równą zeru lub wszystkie jej wartości własne są równe zeru,
- jeśli wszystkie wartości własne macierzy H są równe zeru, to $\det\left[H\right] = 0$.

W zależności od położenia wartości własnych macierzy stabilności H na osi Re λ analiza zachowania się trajektorii układu równań (14) w otoczeniu punktu osobliwego sprowadza się do zbadania następujących przypadków:

1. Punkty krytyczne niezdegenerowane - det $[H] \neq 0$
   1.1. Wszystkie wartości własne macierzy stabilności są różne,
   1.2. Dwie wartości własne macierzy stabilności są równe i tego samego znaku, trzecia wartość własna jest przeciwnego znaku.
2. Punkty krytyczne zdegenerowane - det $[H] = 0$ (jedna z wartości własnych macierzy H jest równa zeru, pozostałe są równe co do modułu i mają różne znaki).
   2.1. Punkty krytyczne izolowane,
   2.2. Punkty krytyczne nieizolowane.
3. Punkty krytyczne "silnie zdegenerowane" - det $[H] \equiv 0$ (wszystkie wartości własne macierzy stabilności są równe zeru).

W pracy ograniczono się do analizy przypadków 1,2.

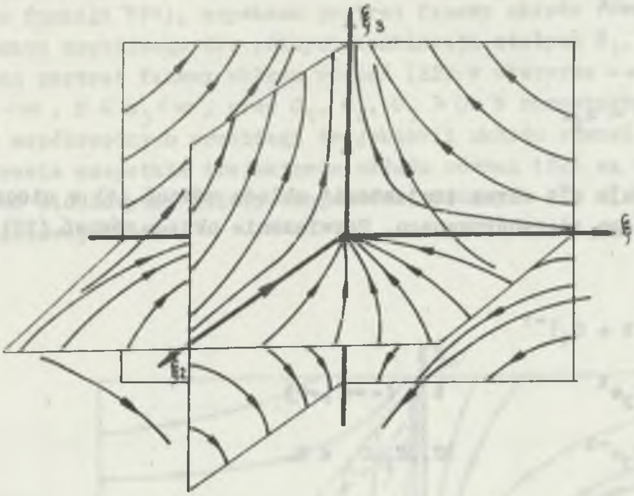
4. ANALIZA LINII SIŁ POLA W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO NIEZDEGENEROWANEGO. RÓŻNE WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY STABILNOŚCI

Jeżeli wartości własne macierzy stabilności są różne od zera i mają różne znaki, to zgodnie z klasyfikacją Niemyckiego ([8], s. 88 do 129) obraz trajektorii układu równań (14) w otoczeniu punktu osobliwego nosi nazwę uogólnionego siodła.

Niech k (k=1 lub k=2) oznacza liczbę ujemnych wartości własnych macierzy stabilności, wtedy istnieje zbiór trajektorii będacych O^+ krzywymi, które wypełniają płaszczyznę k-wymiarową oraz zbiór trajektorii będących O^--krzywymi wypełniających prostopadłą do powyższej płaszczyznę 3-k wymiarową. Wszystkie pozostałe trajektorie są krzywymi siodłowymi. Obraz uogólnionego siodła dla przypadku $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$ pokazano na rys. 2.

5. ANALIZA LINII SIŁ POLA W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO NIEZDEGENEROWANEGO. DWIE WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY STABILNOŚCI SĄ SOBIE RÓWNE

Niewielka modyfikacja dowodu twierdzenia opisującego własności trajektorii układu równań pierwszego liniowego przybliżenia dla układu (1) ([8], s.101) w wypadku, gdy dwie wartości własne macierzy stabilności są sobie równe, pozwala stwierdzić, że obraz trajektorii linii sił pola w otoczeniu punktu osobliwego będzie podobny jak w punkcie 4. Siodło uogólnione ulegnie degeneracji polegającej na tym, że O^+ lub O^- krzywe wypełniające płaszczyznę k-wymiarową będą liniami prostymi.



Rys. 2
Siodło uogólnione dla równania (14) w postaci kanonicznej
The generalized saddle for Eq.(14) in the canonical form

Należy zauważyć, że w przypadku różnych od zera wartości własnych macierzy stabilności, trajektorie układu równań (14) są dyfeomorficznie równoważne trajektoriom układu równań (1) [9] .

6. ANALIZA LINII SIŁ W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO ZDEGENEROWANEGO - IZOLOWANEGO

Niech x = (0,0,0) będzie punktem krytycznym zdegenerowanym izolowanym, w którym $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$. Układ równań (1) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego w przypadku jednej zerowej wartości własnej można zapisać ([10],s. 237) w postaci:

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = x_1^2 + \varepsilon$$

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = x_2 \qquad \mathcal{E} \in R \tag{22}$$

$$\frac{dx_3}{dt}(t) = -x_3.$$

Dla $\mathcal{E} = 0$ uzyskuje się obraz trajektorii układu równań (1) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego. Rozwiązania układu równań (22) są określone wzorami:

$$x_1(t) = (t + C_1)^{-1}$$

$$x_2(t) = C_2e^{t} \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{23}$$

$$x_3(t) = C_3e^{-t} \qquad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Wprowadzamy funkcję:

$$r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)} \tag{24}$$

Jeżeli:

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty} r(t) = 0 \tag{25}$$

to trajektorię układu równań (21) o własności (25) nazywamy 0^+ (0^-) krzywą ([8], s. 91).

Jeżeli:

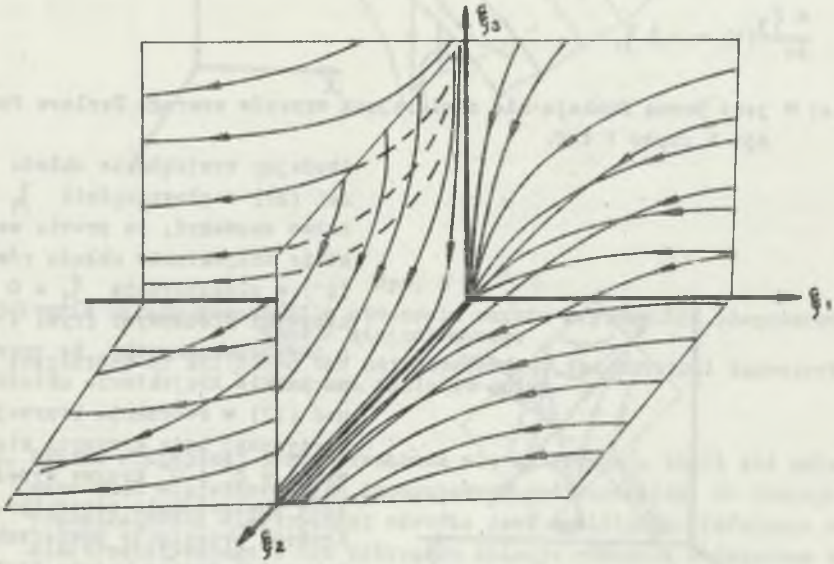
$$\min_{t \in (0,T)} r(t) = k$$

$$k > 0, \; T \in R \tag{26}$$

$$\min_{t \in (0,-T)} r(t) = + k$$

to trajektorię o powyższej własności nazywamy krzywą siodłową.

Analizując wartości graniczne funkcji (23), (24) oraz warunek istnienia minimum funkcji (24), uzyskano portret fazowy układu równań (22) w otoczeniu punktu osobliwego dla różnych kombinacji stałych C_1, C_2, C_3. Na rys. 3 pokazano portret fazowy układu równań (22) w obszarze $-\infty < x_1 < \infty$, $0 \leqslant x_2 < \infty$, $0 \leqslant x_3 < \infty$, przy $C_1, C_2, C_3 \geqslant 0$. W pozostałych ćwiartkach układu współrzędnych przebiegi trajektorii układu równań (22) będą podobne. Prawie wszystkie trajektorie układu równań (22) są zdegenerowanymi krzywymi siodłowymi. Zbiory trajektorii będących 0^+, 0^- krzywymi są miary objętościowej zero.



Rys. 3

Trajektorie układu równań (22) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego $x = 0,0,0$

The trajectory of E_q. (22) in the neighborhood of the critical degenerate point $x = 0,0,0$

7. ANALIZA LINII SIŁ POLA W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO ZDEGENEROWANEGO NIEIZOLOWANEGO

Załóżmy, że krzywa gładka będąca nieizolowanym punktem krytycznym jest niezdegenerowanym zbiorem bifurkacyjnym, tzn. nie ulega rozpadowi na osobliwości prostszego typu przy małej zmianie parametrów pola wektorowego

E_k (k=1,2,3). Przyjmijmy ponadto, że ten nieizolowany punkt krytyczny odpowiada wartości własnej $\lambda_1 = 0$. W dowolnym punkcie x_0 zbioru krytycznego wprowadźmy lokalny układ współrzędnych ξ_1, ξ_2, ξ_3 tak, by w punkcie x_0 oś ξ_1 układu współrzędnych była styczna do krzywej krytycznej. W dostatecznie małym otoczeniu punktu x_0 układ równań (14) przyjmie postać:

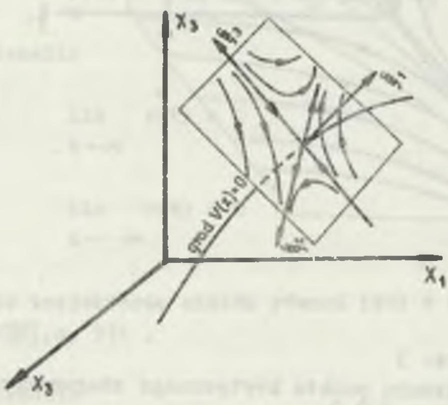
$$\frac{d\xi_1}{dt}(t) = \Theta(\xi_1)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt}(t) = \lambda \xi_2 \tag{27}$$

$$\frac{d\xi_3}{dt}(t) = -\lambda \xi_3$$

gdzie: Θ jest pewną funkcją nie zawierającą wyrazów szeregu Taylora funkcji V rzędu 1 i 2.

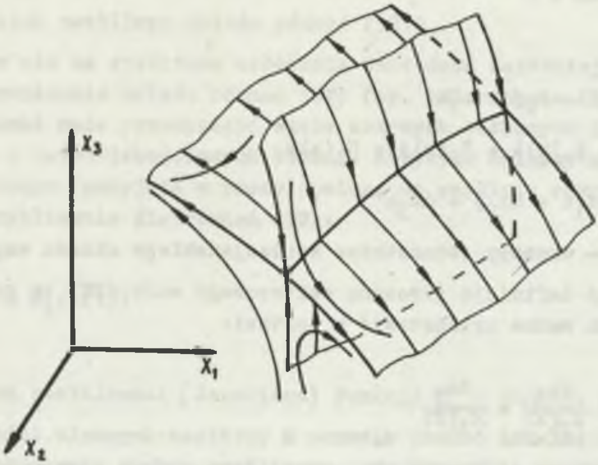
Zbadajmy trajektorie układu równań (27) w płaszczyźnie $\xi_1 = 0$, łatwo zauważyć, że prawie wszystkie trajektorie układu równań (27) w płaszczyźnie $\xi_1 = 0$ są krzywymi siodłowymi (rys. 4). Z powyższego wynika, że prawie wszystkie trajektorie układu równań (27) w otoczeniu krzywej krytycznej będą krzywymi siodłowymi, a 0^+ i 0^- krzywe wypełniać będą powierzchnie separatysa. Krawędź przecięcia powierzchni separatysa tworzy krzywą krytyczną pola (rys. 5).



Rys. 4
Trajektorie układu równań (27) w płaszczyźnie prostopadłej do krzywej krytycznej
The trajectory of Eq. (27) in the plane perpendicular to critical curve

8. PODSUMOWANIE

1. W pracy przeanalizowano portrety fazowe trajektorii układu równań linii pola elektrostatycznego w otoczeniu punktów krytycznych niezdegenerowanych i zdegenerowanych przy założeniu, że pojedyncza wartość własna macierzy stabilności układu równań (1) jest równa zeru. Wykazano, że prawie wszystkie trajektorie układu równań (1) w otoczeniu badanych punktów krytycznych są typu siodłowego.



Rys. 5

Trajektorie układu równań (27) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego - nieizolowanego

The trajectory of Eq. (27) in the neighborhood of the critical degenerate and non isolated point

2. Wyniki niniejszej pracy przenoszą się na równania linii sił pola w ośrodkach niejednorodnych izotropowych pod warunkiem, że funkcja przenikalności elektrycznej ośrodka jest analityczna (równania pola elektrostatycznego w tym przypadku opisuje równanie eliptyczne z operatorem Laplace'a w części głównej, którego rozwiązania są funkcjami analitycznymi, co powoduje, że struktura zbiorów krytycznych jest taka sama jak dla funkcji harmonicznych (punkt 3)).

3. Wyniki niniejszej pracy przenoszą się również na równanie linii sił pola w ośrodkach niejednorodnych izotropowych pod warunkiem dostatecznej gładkości funkcji przenikalności elektrycznej ośrodka. W tym przypadku należy jednak założyć, że struktura zbiorów krytycznych potencjału pola jest taka sama jak dla funkcji harmonicznych.

9. UZUPEŁNIENIE

Linią sił pola wektorowego E nazywamy krzywą, do której styczna w każdym punkcie jest zgodnie skierowana z wektorem pola w tym punkcie.

Z powyższej definicji wynika, że w każdym punkcie x linii sił jest spełniona zależność:

$$\mathbf{E}(x) \times d\mathbf{L} = 0 \tag{28}$$

gdzie:

$$x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}(x) = E_1(x)\mathbf{i} + E_2(x)\mathbf{j} + E_3(x)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{L} = dx_1\mathbf{i} + dx_2\mathbf{j} + dx_3\mathbf{k}$$

i, **j**, **k** - wersory jednostkowe kartezjańskiego układu współrzędnych.

Wykorzystując definicję iloczynu wektorowego wzór (28) po prostych przekształceniach można przedstawić w postaci:

$$\frac{dx_1}{E_1(x)} = \frac{dx_2}{E_2(x)} = \frac{dx_3}{E_3(x)} \tag{29}$$

Wprowadźmy parametryzację zmiennych przestrzennych $x_k (k = 1,2,3)$, tzn. załóżmy, że:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_1 &= x_2(t) \qquad t \in R^t \\ x_3 &= x_3(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Składając funkcje $E_k(x)$ z funkcjami określonymi wzorem (30) równanie (29) można zapisać w postaci:

$$\frac{dx_1(t)}{E_1(x(t))} = \frac{dx_2(t)}{E_2(x(t))} = \frac{dx_3(t)}{E_3(x(t))} = dt \tag{31}$$

która jest równoważna postaci normalnej Cauchy'ego dla równania (31):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= E_1(x(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= E_2(x(t)) \\ \frac{dx_3}{dt}(t) &= E_3(x(t)). \end{aligned} \tag{32}$$

Punkt x, w którym równocześnie:

$$E_1(x(t)) = E_2(x(t)) = E_3(x(t)) = 0 \tag{33}$$

nazywamy punktem osobliwym układu równań (32).

W punkcie tym nie są spełnione założenia twierdzeń zapewniających jednoznaczność rozwiązania układu równań (32) (np. twierdzenia Picarda), zatem przez taki punkt może przechodzić wiele krzywych całkowych (linii sił pola). Jedna z metod jakościowych badania krzywych całkowych w otoczeniu punktu osobliwego (przyjęta w pracy) polega na analizie równań pierwszego liniowego przybliżenia dla równań (32):

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = H_k(x(t)) \tag{34}$$

gdzie:

H - macierz stabilności (Jacobiego) funkcji E_k w punkcie x.

Analiza wartości własnych macierzy H pozwala zbadać lokalne własności linii sił w otoczeniu punktu osobliwego, gdy wszystkie wartości własne tej macierzy są różne od zera. Punkty osobliwe, w których wszystkie wartości własne macierzy stabilności są niezerowe, są izolowane i noszą nazwę punktów Morse'a (niezdegenerowanych). Teoria jakościowa badania rozwiązań równań różniczkowych w otoczeniu punktów osobliwych jest w chwili obecnej najbardziej rozwinięta dla punktów Morse'a. Dla punktów krytycznych zdegenerowanych, tzn. takich, w których przynajmniej jedna wartość własna macierzy stabilności jest równa zeru, metody analizy trajektorii w otoczeniu punktu osobliwego znajdują się obecnie w fazie badań, np. nie rozwiązany ostatecznie do chwili obecnej problem centrum - ognisko na płaszczyźnie. Zagadnienie istnienia postaci kanonicznej w jakiej należy przedstawić układ równań (32) w otoczeniu punktu osobliwego zdegenerowanego jest w chwili obecnej tylko częściowo rozwiązane (w przypadku równań analizowanych w pracy postać taka istnieje) i wiąże się ściśle z teorią osobliwości odwzorowań i z teorią birfurkacji [5,6,10] .

Istnieje wiele układów fizycznych, w których doświadczalnie stwierdzono istnienie punktów osobliwych. Do najprostszych należą typowe układy elektrostatyczne typu kula - kula, walec - walec itp. naładowane jednoimiennie. Portrety fazowe linii sił pola w otoczeniu punktów osobliwych podano w literaturze [11,12] . Wiele bardziej złożonych portretów fazowych linii sił pola podano w klasycznej literaturze dotyczącej teorii katastrof i to nie tylko dla pól elektrycznych i magnetycznych, ale również dla tzw. pól prądu w mechanice cieczy, optyce, teorii promieniowania, termodynamice przemian fazowych, fizyce laserów, biologii i socjologii [13] .

LITERATURA

[1] Kellog O.D.: Foundations of Potential Theory. Springer-Verlag. Berlin 1968.
[2] Januškauskas A.J.: O nul'ach gradienta garmoničeskoj funkcii. DAN SSSR T. 158. No 3 1954, s. 547-549.
[3] Januškauskas A.J.: O nul'ach gradienta i nul'ach gessiana garmoničeskoj funkcii. Sib. mat. žurn. TX. No 3 1969 r. s. 685-691.
[4] Morse M., Cairns S.: Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology. Acad Press N. York and London 1969.
[5] Arnol'd, V.I., Varčenko A.N., Gusein-Zad'e S.M.: Osobennosti differenciruemych otobraženij. Nauka. Moskva 1982.
[6] Gilmore R.: Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. J. Wiley. N. York 1981.
[7] Januškauskas A.J.: Nekotorye voprosy raspredelenia kritičeskich polinomov trech peremennych. Diff. uravn. TXI. No 1. 1975, s. 170-175.
[8] Nemyckij V.V., Stepanov V.V.: Kačestvennaja teoria differencial'nych uravnenij. Moskva 1947 OGIZ.
[9] Grohman D.M.: Topologičeskaja i asimptičeskaja ravnosil'nost' sistem differencial'nych uravnenij. DAN SSSR. T. 108 1961, s. 746-747.
[10] Arnold W.I.: Teoria równań różniczkowych. PWN, Warszawa 1983.
[11] Goworkow W.A.: Pola elektryczne i magnetyczne. WNT, Warszawa 1962.
[12] Fano R.M., Ch L.J., Adler R.B.: Electromagnetic Fields, Energy and Forces. J.Wiley. N.York and London 1963.
[13] Poston T., Steward I.: Catastrophe Theory and its applications. Pitman. London 1978.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dn. 2 maja 1985 r.

ON THE SINGULAR POINTS OF THE LINES OF FORCES OF THE ELECTROSTATIC FIELD

S u m m a r y

The paper deals with a quantitative analysis of the solution of equations for the lines of force of an electrostatic field in the vicinity of singular points of the field.

In the first stage of the analysis the conditions are determined which must be met by the eigenvalues of the matrix of the stability of a set of equations of first linear approximation in the case of equations of the lines of the field.

The further part of the paper contains an analysis of the properties of the trajectories of equations for the lines of forces of the electrostatic field in the vicinity of critical nondegenerate points as well as in the vicinity of critical degenerate points, in which the matrix of stability of the set of equations for the lines of forces of the electrostatic field has one eigenvalue which is equal to zero.

It has been found that these singular points have the character of saddle points and that almost all the lines of forces are saddle curves.

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ЛИНИИ СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Р е з ю м е

В статье представлен качественный анализ решений уравнений сил электростатического поля в окрестности особых точек поля. В первои части анализа определены условия какие должны выполнять корни характеристического управнения матрицы устойчивости системы уравнений первого приближения для системы уравнений линии сил поля. В дальнейщей части работы исследованы свойства интегральных кривых уравнений линии сил поля в окрестности критических невыражденных точек и в окрестности критических вырожденных точек, в которых матрица устойчивости системы уравнений линии сил поля обладаеть одним корнем характеристического уравнения равным нулю. Констатировано, что эти особые точки имеют характер седловых точек и что почти все линии сил это седловые кривые.