ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: AUTOMATYKA z.94 Nr kol.970

Tadeusz Kaczorek
Politechnika Warszawska

DEKOMPOZYCJA W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI UKŁADÓW DWUWYMIAROWYCH NA UKŁADY JEDNOWYMIAROWE

Streszczenie. Podano nową metodę dekompozycji w dziedzinie częstotliwości liniowego układu dwuwymiarowego na dwa układy jednowymiarowe połączone w układ ze sprzężeniem zwrotnym, które opisują dynamikę tego układu wzdłuż różnych osi. Wykazano, że przy pewnych założeniach problem ten sprowadza się do realizowalnego fizykalnie rozwiązania $X(z_1), Y(z_2)$ macierzowego równania wielomianowego o postaci $X(z_1)\,P(z_2) + Q(z_1)\,Y(z_2) = D(z_1,z_2)$. Podano również metodę wyznaczania tego rozwiązania $X(z_1), Y(z_2)$.

1. Wstęp

Zagadnienie dekompozycji liniowych układów dwuwymiarowych (2-D) o separowalnych mianownikach na układy jednowymiarowe, które opisują dynamiki tych układów wzdłuż różnych osi, było rozpatrywane w pracach [4,5]. W pracy [2] podano metodę dekompozycji modelu Roessera na dwa układy jednowymiarowe połączone w układ ze sprzężeniem zwrotnym, które opisują dynamikę tego modelu wzdłuż różnych osi.

Celem tej pracy jest podanie nowej metody dekompozycji w dziedzinie częstotliwości liniowego układu dwuwymiarowego na dwa układy jednowymiarowe połączone w układ ze sprzężeniem zwrotnym, które opisują dynamikę tego układu wzdłuż różnych osi. Wykażemy, że przy pewnych założeniach problem dekompozycji można sprowadzić do wyznaczenia realizowalnego fizykalnie rozwiązania $X(z_1)$, $Y(z_2)$ macierzowego równania wielomianowego o postaci $X(z_1)\,P(z_2) + Q(z_1)\,Y(z_2) = D(z_1,z_2)$. Zostaną podane warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązania oraz algorytm wyznaczania tego rozwiązania. Otrzymane w tej pracy wyniki stanowią uogólnienie na przypadek 2-D wyników podanych w pracach [1,7,8] dla macierzowych równań wielomianowych jednej zmiennej niezależnej.

2. Sformułowanie zagadnienia

Pierścień wielomianów zmiennych z_1, z_2 o współczynnikach rzeczywistych oznaczać będziemy przez $R[z_1,z_2]$, a zbiór macierzy o elementach z $R[z_1,z_2]$ i wymiarach pxq oznaczać będziemy przez $R_{pq}[z_1,z_2]$. Niech $R(z_1,z_2)$ będzie ciałem funkcji wymiernych zmiennych z_1, z_2 o współczynnikach rzeczywistych, a $R_{pq}(z_1,z_2)$ – zbiorem macierzy o elementach z $R(z_1,z_2)$ i wymiarach pxq. Przez $\deg_{ir} D(z)$ oznaczmy stopień i-tego wiersza $D(z) \in R_{pq}[z]$, a przez $\deg_{ic} D(z)$ – stopień i-tej kolumny tej macierzy. Macierz $D(z) \in R_{pq}[z]$ nazywamy wierszowo-zredukowaną, jeżeli jej macierz współczynników przy najwyższych stopniach poszczególnych wierszy

$$D_{hr} = \lim_{z\to\infty} \operatorname{diag}\left[z^{-\mu_1} \dots z^{-\mu_p}\right] D(z)$$

ma rząd równy p, gdzie $\mu_i = \deg_{ir} D(z)$, $i = 1,\dots,p$.
Podobnie macierz $D(z) \in R_{pq}[z]$ nazywamy kolumnowo-zredukowaną, jeżeli jej macierz współczynników przy najwyższych stopniach poszczególnych kolumn

$$D_{hc} = \lim_{z\to\infty} D(z) \operatorname{diag}\left[z^{-\nu_1} \dots z^{-\nu_q}\right]$$

ma rząd równy q, gdzie $\nu_i = \deg_{ic} D(z)$, $i = 1,\dots,q$.
Macierz $T(z) \in R_{pq}(z)$ nazywamy właściwą, jeżeli $\lim_{z\to\infty} T(z) = D \in R_{pq}$, a ściśle właściwą, gdy $D=0$, przy czym R_{pq} jest zbiorem macierzy o elementach rzeczywistych i wymiarach pxq.

Weźmy pod uwagę macierz właściwą /ściśle właściwą/ $T(z) \in R_{pq}(z)$ w postaci:

$$T(z) = N_R(z) D_R^{-1}(z) = D_L^{-1}(z) N_L(z) \tag{1}$$

przy czym

$$N_R(z) \in R_{pq}[z],\ D_R(z) \in R_{qq}[z],\ D_L(z) \in R_{pp}[z],\ N_L(z) \in R_{pq}[z].$$

Lemat 1 [3]. Niech $D_R(z)$ będzie macierzą kolumnowo-redukowaną. Macierz T(z) określona zależnością (1), jest właściwa /ściśle właściwa/ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\deg_{ic} D_R(z) \geq \deg_{ic} N_R(z) \quad \left(\deg_{ic} D_R(z) > \deg_{ic} N_R(z)\right),\ i=1,\dots,q \tag{2}$$

Lemat 1' [3]. Niech $D_L(z)$ będzie macierzą wierszowo-redukowaną. Macierz T(z), określona zależnością (1), jest właściwa /ściśle właściwa/ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\deg_{ir} D_L(z) \geq \deg_{ir} N_L(z) \quad \left(\deg_{ir} D_L(z) > \deg_{ir} N_L(z)\right),\ i=1,\dots,p. \tag{2'}$$

Weźmy pod uwagę liniowy układ 2-D dyskretny o znanej macierzy transmitancji $T(z_1,z_2) \in R_{pq}(z_1,z_2)$ oraz dwa układy 1-D połączone w układzie ze sprzężeniem zwrotnym, których macierze transmitancji mają postacie:

$$T_1(z_1) = D_1^{-1}(z_1) N_1(z_1),\quad T(z_2) = N_2(z_2) D_2^{-1}(z_2) \tag{3}$$

przy czym $D_1(z_1) \in R_{pp}(z_1)$ jest wierszowo-zredukowana, $D_2(z_2) \in R_{pp}(z_2)$ jest kolumnowo-zredukowana, $N_1(z_1) \in R_{pq}[z_1]$ oraz $N_2(z_2) \in R_{qp}[z_2]$.
Macierz transmitancji układu zamkniętego jest określona wzorem

$$T_c(z_1,z_2) = \left[I_p + T_1(z_1) T_2(z_2)\right]^{-1} T_1(z_1) \tag{4}$$

gdzie I_p jest macierzą jednostkową stopnia p.

Zakładamy, że macierz $T(z_1,z_2)$ można przedstawić w postaci

$$T(z_1,z_2) = P(z_2) D^{-1}(z_1,z_2) Q(z_1) \tag{5}$$

przy czym $P(z_2) \in R_{pp}[z_2]$ jest kolumnowo-zredukowana, $D(z_1,z_2) \in R_{pp}[z_1,z_2]$ i $Q(z_1) \in R_{pq}[z_1]$.

Rozpatrywane w tej pracy zagadnienie można sformułować następująco. Dana jest macierz $T(z_1,z_2)$ w postaci(5), należy wyznaczyć $T_1(z_1)$ i $T_2(z_2)$ tak, aby $T(z_1,z_2) = T_c(z_1,z_2)$, przy czym $T_c(z_1,z_2)$ jest określone wzorem (4).

Definicja 1

Macierze $T_1(z_1)$, $T_2(z_2)$ nazywać będziemy dekompozycją macierzy $T(z_1,z_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\left[I_p + T_1(z_1)T_2(z_2)\right]^{-1} T_1(z_1) = T(z_1,z_2)$.

Zostaną sformułowane warunki, przy spełnieniu których macierz $T(z_1,z_2)$ może być zdekomponowana na $T_1(z_1)$ i $T_2(z_2)$.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Podstawiając (3) do (4) otrzymamy:

$$T_c(z_1,z_2) = \left[I_p + D_1^{-1}(z_1)N_1(z_1)N_2(z_2)D_2^{-1}(z_2)\right]^{-1} D_1^{-1}(z_1)N_1(z_1) = \tag{6}$$

$$= D_2(z_2)\left[D_1(z_1)D_2(z_2) + N_1(z_1)N_2(z_2)\right]^{-1} N_1(z_1)$$

Z porównania (5) i (6) wynika, że

$$D_2(z_2) = P(z_2), \quad N_1(z_1) = Q(z_1)$$

oraz

$$D_1(z_1)D_2(z_2) + N_1(z_1)N_2(z_2) = D(z_1,z_2)$$

Rozpatrywane zagadnienie zostało więc sprowadzone do wyznaczenia rozwiązania $X(z_1)$, $Y(z_2)$ równania

$$X(z_1)P(z_2) + Q(z_1)Y(z_2) = D(z_1,z_2) \tag{7}$$

takiego, że $T_1(z_1)$ i $T_2(z_2)$ są macierzami właściwymi o postaci(3).

Z lematu 1 wynika, że $T_2(z_2)$ jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\deg_{ic} P(z_2) \geqslant \deg_{ic} Y(z_2) \qquad i=1,\dots,p \tag{8a}$$

gdyż zgodnie z założeniem $P(z_2)$ jest kolumnowo-zredukowana.

Załóżmy, że $X(z_1)$ jest wierszowo-zredukowana, tzn. $\det X_{hr} \neq 0$, przy czym X_{hr} jest macierzą współczynników przy najwyższych stopniach poszczególnych wierszy $X(z_1)$.

Analogicznie zgodnie z lematem 1' $T(z_1)$ jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\deg_{ir} X(z_1) \geqslant \deg_{ir} Q(z_1) \qquad i=1,\dots,p \tag{8b}$$

Rozpatrywane zagadnienie zostało więc sprowadzone do wyznaczenia rozwiązania $X(z_1)$, $Y(z_2)$ spełniającego warunki(8) oraz $\det X_{hr} \neq 0$.

Definicja 2

Rozwiązanie $X(z_1)$, $Y(z_2)$ równania(7) nazywać będziemy realizowalnym /fizykalnie/ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ono warunki(8) oraz $\det X_{hr} \neq 0$.

Zostaną sformułowane warunki konieczne i dostateczne istnienia realizowalnego rozwiązania $X(z_1)$, $Y(z_2)$ równania(7).

Niech

$$m_i = \max\left[\deg_{ir} Q(z_1),\ \deg_{ir}^{z_1} D(z_1,z_2)\right] \quad i=1,\dots,p \tag{9a}$$

$$n_j = \deg_{jc} P(z_2) \quad , \ j=1,\dots,p \tag{9b}$$

przy czym $\deg_{ir}^{z_j} D(z_1,z_2)$ oznacza stopień i-tego wiersza macierzy $D(z_1,z_2)$ względem z_j $(j=1,2)$.

Z(7) i (8) wynika, że

$$\deg_{ir} X(z_1) = m_i\ ,\ \deg_{jc} Y(z_2) \leq n_j \tag{10}$$

oraz

$$\deg_{jc}^{z_2} D(z_1,z_2) \leq n_j \quad , \ i,j = 1,\dots,p$$

Biorąc pod uwagę (9) i (10) możemy $Q(z_1)$, $P(z_2)$ i $D(z_1,z_2)$ napisać w postaci:

$$Q(z_1) = \sum_{i=0}^{m}\left(\mathrm{diag}\left[z_1^{m_1-i},\dots,z_1^{m_p-i}\right]\right)Q_i\ ,\ Q_i \in R_{pq} \tag{11a}$$

$$P(z_2) = \sum_{j=0}^{n} P_j\ \mathrm{diag}\left[z_2^{n_1-j},\dots,z_2^{n_p-j}\right]\ ,\ P_j \in R_{pp} \tag{11b}$$

$$D(z_1,z_2) = \sum_{i=0}^{m}\ \sum_{j=0}^{n}\left(\mathrm{diag}\left[z_1^{m_1-i},\dots,z_1^{m_p-i}\right]\right)D_{ij}\ \mathrm{diag}\left[z_2^{n_1-j},\dots,z_2^{n_p-j}\right] \tag{11c}$$

$$D_{ij} \in R_{pp}$$

przy czym $m = \max/m_1,\dots,m_p/$, a $n = \max/n_1,\dots,n_p$.

Poszukiwać będziemy realizowalnego rozwiązania $X(z_1)$, $Y(z_2)$ równania (7) w postaci:

$$X(z_1) = \sum_{i=0}^{m}\left(\mathrm{diag}\left[z_1^{m_1-i},\dots,z_1^{m_p-i}\right]\right)X_i,\ X_i \in R_{pp}$$

$$Y(z_2) = \sum_{j=0}^{n} Y_j\ \mathrm{diag}\left[z_2^{n_1-j},\dots,z_2^{n_p-j}\right],\ Y_j \in R_{qp} \tag{12}$$

Podstawiając (11) i (12) do (7) oraz porównując macierze współczynników przy tych samych potęgach z_1 i z_2 otrzymamy:

$$X_iP_j + Q_iY_j = D_{ij} \quad \begin{cases} i = 0,1,\dots,m \\ j = 0,1,\dots,n \end{cases} \tag{13}$$

Jak wiadomo [6,9] równanie (13) ma rozwiązanie X_i, Y_j wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} Q_i & D_{ij} \\ 0 & P_j \end{bmatrix} = \text{rząd}\ Q_i + \text{rząd}\ P_j \tag{14}$$

Równanie (7) ma więc realizowalne rozwiązanie $X(z_1)$, $Y(z_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (14) jest spełniony dla $i = 0,1,\dots,m$, $j = 0,1,\dots,n$.

Korzystając z oznaczeń

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdots \\ X_m \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \cdots \\ Q_m \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \bar{P} = \begin{bmatrix} P_o & P_1 \ldots & P_n \end{bmatrix} \\ \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_0 & Y_1 \ldots & Y_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{00} & D_{01} & \ldots & D_{on} \\ D_{10} & D_{11} & \ldots & D_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m0} & D_{m1} & \ldots & D_{mn} \end{bmatrix}$$

możemy układ równań (13) napisać w postaci

$$\bar{X}\,\bar{P} + \bar{Q}\,\bar{Y} = \bar{D} \tag{15}$$

Równanie (15) ma rozwiązanie $\bar{X}$, $\bar{Y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy [6,9]

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} Q_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ Q_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_0 & P_1 & \ldots & P_n \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} Q_0 & D_{00} & D_{01} & \ldots & D_{on} \\ Q_1 & D_{10} & D_{11} & \ldots & D_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_m & D_{m0} & D_{m1} & \ldots & D_{mn} \\ 0 & P_0 & P_1 & \ldots & P_n \end{bmatrix} \tag{16a}$$

lub

$$(I - \bar{Q}\,\bar{Q}^{+})\,\bar{D}\,(I - \bar{P}^{+}\,\bar{P}) = 0 \tag{16b}$$

przy czym $\bar{Q}^{+}(\bar{P}^{+})$ jest macierzą pseudoodwrotną spełniającą warunek

$$\bar{Q}\,\bar{Q}^{+}\bar{Q} = \bar{Q}$$

Niech Q_{hr} będzie macierzą współczynników przy najwyższych stopniach poszczególnych wierszy macierzy $Q(z_1)$, a P_{hc} (Y_{hc}) - macierzą współczynników przy najwyższych stopniach poszczególnych kolumn macierzy $P(z_2)\big(Y(z_2)\big)$. Z zależności (13) mamy

$$\begin{bmatrix} X_{hr} & Q_{hr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{hc} \\ Y_{hc} \end{bmatrix} = D_{oo} \tag{17}$$

<u>Lemat 2</u>. Macierz X_{hr} jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\det D_{00} \neq 0$.

<u>Dowód</u>. Z założenia $\det P_{hc} \neq 0$. Jeżeli $\det X_{hr} \neq 0$, to $\text{rząd}\begin{bmatrix} X_{hr} & Q_{hr} \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} P_{hc} \\ Y_{hc} \end{bmatrix} = p$ i z (17) wynika, że $\det D_{00} \neq 0$. Aby wykazać dostateczność, zauważmy, że założenie $\det P_{hc} \neq 0$ implikuje $\det H \neq 0$, przy czym

$$H = \begin{bmatrix} P_{hc}^{T} & Y_{hc}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{hc} \\ Y_{hc} \end{bmatrix}$$

Z zależności (17) mamy

$$\left[X_{hr}\ Q_{hr}\right] = D_{00}\, H^{-1} \left[P_{hc}^{T}\ Y_{hc}^{T}\right]$$

Macierz $X_{hr} = D_{00}\, H^{-1} \cdot P_{hc}^{T}$ jest więc nieosobliwa.

Z definicji 2, lematu 2 i warunku (16) wynika natychmiast następujący

Lemat 3. Równanie (7) ma realizowalne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (16) i det $D_{00} \neq 0$.

Podstawiając do (15) i korzystając z (16b) łatwo sprawdzić, że macierze

$$\bar{X} = (I - \bar{Q}\bar{Q}^{+})\bar{D}\bar{P}^{+} + Z - (I - \bar{Q}\bar{Q}^{+})Z\bar{P}\bar{P}^{+} \tag{18}$$

$$\bar{Y} = \bar{Q}^{+}\bar{D} - \bar{Q}^{+}Z\bar{P} + (I - \bar{Q}^{+}\bar{Q})\,V$$

są rozwiązaniem tego równania, a Z i V są dowolnymi macierzami odpowiednich wymiarów.

Twierdzenie

Rozpatrywane zagadnienie ma rozwiązanie, jeżeli:

1/ macierz $T(z_1, z_2)$ można przedstawić w postaci (5),

2/ det $D_{00} \neq 0$,

3/ warunek (16) jest spełniony.

Dowód tego twierdzenia wynika natychmiast z lematu 3 oraz z faktu, że jeżeli $T(z_1, z_2)$ można przedstawić w postaci (5), to rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia realizowalnego rozwiązania $X(z_1)$, $Y(z_2)$ równania (7).

Jeżeli warunki twierdzenia są spełnione, to poszukiwane $T_1(z_1)$, $T_2(z_2)$ można wyznaczyć stosując następujący

Algorytm

krok 1 Dla danej $T(z_1, z_2)$ wyznaczyć $P(z_2)$ kolumnowo-zredukowaną oraz $D(z_1, z_2)$, $Q(z_1)$ spełniające (5).

krok 2 Korzystając ze wzorów (18) wyznaczyć realizowalne rozwiązanie $X(z_1)$, $Y(z_2)$ równania (7).

krok 3 Korzystając ze wzorów (3) wyznaczyć poszukiwane macierze $T_1(z_1)$, $T_2(z_2)$

Uwaga:

Korzystając z dowolności macierzy Z i V występujących w (18) możemy je tak dobrać, aby były spełnione dodatkowe warunki, np. $X(z_1)$ lub $Y(z_2)$ były macierzami wielomianowymi możliwie najniższego stopnia.

LITERATURA

[1] Emre E., Silverman L.M., The equation XR+QR= ! : A characterization of solutions, SIAM J.Control and Optimization, vol19, No 1, January 1981, pp.33-38

[2] Kaczorek T., Decomposition of Roesser model and new conditions for local controllability and local observability. Intern.Journal Control 1988 /in press/.

[3] Kailath T., Linear Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1980.

[4] Lin T., Kawamata M., Higuchi T., Decomposition of 2-D separable denominator systems. Uniquence, existence and applications. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-34, May 1987.

[5] Lin T., Kawamata M., Higuchi T., New necessary and suffucient conditions for local controllability and local observability of 2-D separable denominator systems. IEEE Trans.Autom.Contr. vo.AC-32, No 3, pp.254-256, 1987.

[6] Roth W.E., The equation AX-YB=C and AX-XB=C in matrices. Proc.Am.Soc. 3, pp.329, 1952

[7] Wolovich W.A., Skew prime polynomial matrices, IEEE Trans.Autom.Contr. vol.AC-23, No 5, pp.880-887, Oct.1971

[6] Żak S., On the polynomial matrix equation AX+YB=C, IEEE Trans.Autom. Control, vol.AC-30, No 12, pp.1240-1242, Dec.1986.

[9] Ziętak J.K., The Chebysher solution of the linear matrix equation AX+YB=C, Numer. Math.46, pp.455-478, 1985.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.J.Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

РАЗЛОЖЕНИЕ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ДВУХМЕРНЫХ СИСТЕМ НА ОДНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В статье приведён новый метод разложения в частотной области линейной двухмерной системы на две одномерные соединённые в систему с обратной связью. Одномерные системы соответствуют динамическим свойствам исходной двухмерной системы в разных направлениях. Показано, что при соответствующих предположениях, решение этой проблемы можно свести к нахождению физически реализуемого решения $X(z_1)$, $Y(z_2)$ матричного полиномного уравнения $X(z_1)P(z_2) + Q(z_1)Y(z_2) = D(z_1,z_2)$. Дан метод нахождения этого решения.

DECOMPOSITION OF 2-D LINEAR SYSTEMS INTO 1-D SYSTEMS IN FREQUENCY DOMAIN

S u m m a r y

A method is presented for the decomposition in frequency domain of 2-D linear systems into two equivalent 1-D systems having dynamics in different directions and connected in a feedback system.
It is shown that under some assumptions the decomposition problem can be reduced to finding a realizable solution to the matrix polynomial equation $X(z_1)\,P(z_2) + Q(z_1)\,Y(z_2) = D(z_1, z_2)$.
A procedure for finding a realizable solution $X(z_1)$, $Y(z_2)$ to the equation is given.