ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988
Seria: AUTOMATYKA z.94 Nr kol.970

Ewa Komorowska, Barbara Mażbic-Kulma,
Jolanta Stępień

Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa

ZAGADNIENIE DYSTRYBUCJI PRODUKTÓW NAFTOWYCH

Streszczenie. W referacie omówiono problem dystrybucji produktów naftowych. Zagadnienie to zapisano jako zadanie lokalizacji z ograniczonymi możliwościami dostaw. Przedstawiono model matematyczny tego problemu, a także opis metody jego rozwiązania. W przyjętej metodzie rozwiązania wykorzystano lemat i twierdzenie Czerenina.

W zakończeniu referatu przedstawiono przykład.

1. Wstęp

W 1985 roku w ramach umowy zawartej pomiędzy Biurem Projektów "NAFTOPROJEKT" a IBS PAN wykonana została w ZBO praca pt.: Opracowanie modelu transportowego dla rozwózki produktów naftowych. Głównym celem tej pracy było wyznaczenie rejonów oddziaływania poszczególnych magazynów produktów naftowych (tzn. przyporządkowanie im odbiorców zlokalizowanych na danym terenie), tak aby zminimalizować łączny koszt transportu tych produktów.

W trakcie wykonywania ww. umowy wyłonił się interesujący problem badawczy związany z rozbudową istniejącej sieci dystrybucyjnej produktów naftowych. Zagadnienie to jest bardzo ważne w dystrybucji produktów naftowych. Minimalizacja kosztów inwestycyjnych, eksploatacyjnych, jak i ogólnej energochłonności transportu znajduje swój wyraz w optymalnej organizacji przewozów.

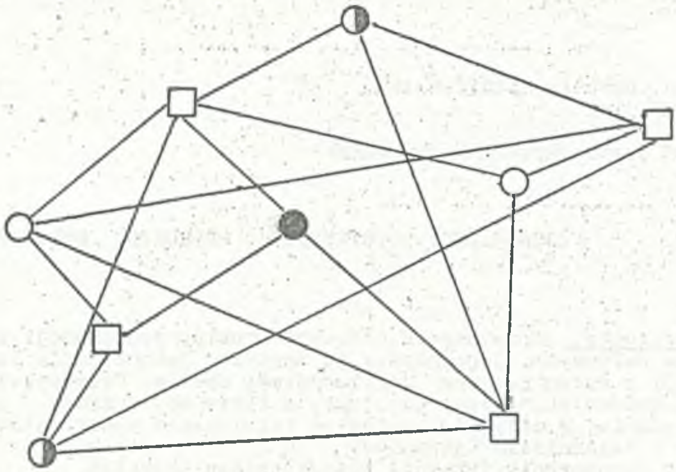
Tak więc w niniejszym referacie opisany zostanie problem rzeczywisty. Można go przedstawić następująco:

Wyznaczyć lokalizację nowych bądź rozbudowę istniejących magazynów produktów naftowych tak, aby zminimalizować sumę kosztów inwestycyjnych, eksploatacyjnych i transportowych.

Zauważmy teraz, że w przedstawionym powyżej zadaniu występują 3 rodzaje magazynów:

a) magazyny już istniejące o zadanej pojemności,
b) magazyny już istniejące, które można rozbudować, (tzn. powiększyć ich pojemność),
c) planowane miejsca budowy nowych magazynów.

Można to przykładowo przedstawić za pomocą następującego rysunku:



gdzie:

- magazyn typu a,
- magazyn typu b,
- magazyn typu c,
- odbiorcy produktów naftowych.

Rys.1.Przykładowa sieć magazynów
Fig.1.An exemple net of stores

Dla dalszych rozważań zakładać będziemy; że istniejące magazyny pro-duktów naftowych, których pojemność może być powiększona (rozbudowana), rozdzielimy na następujące dwa (fikcyjne) magazyny.

* magazyn istniejący o zadanej pojemności,
* miejsce budowy nowego magazynu.

Oczywiście odległość pomiędzy tymi magazynami będzie wynosiła 0. Przyjmując powyższe założenie, w dalszej części pracy rozpatrywać będzie-my tylko dwa rodzaje magazynów.

Zauważmy ponadto, że rozpatrywane przez nas zadanie rzeczywiste, jest problemem jednoasortymentowym. Wynika to z faktu, że nie można łączyć be-zyny, olejów itp.

Przyjmując powyższe założenia, przejdźmy teraz do opisu matematyczne-go tego problemu.

2. Sformułowanie matematyczne problemu

Wprowadzimy zatem następujące oznaczenia.

Oznaczenia:

i - numer dostawcy produktu,

$i \in M$ - zbiór numerów dostawców,

Zgodnie z przyjętym powyżej założeniem będziemy, zakładać, że zbiór M ma

następującą postać:

$M = M \cup M_0$

gdzie:

M - zbiór numerów potencjalnych lokalizacji magazynów produktów naftowych,

M_0 -zbiór numerów istniejących magazynów produktów naftowych,

j - numer odbiorcy produktów naftowych,

$j \in N$ - zbiór numerów odbiorców,

a_i - pojemność i-tego dostawcy,

b_j - pojemność j-tego odbiorcy,

f_i- stały koszt i-tego magazynu,

c_{ij}- koszt jednostkowy eksploatacyjno-transportowy.

Dla dalszych rozważań wprowadzimy teraz następujące zmienne decyzyjne:

$x_{ij} > 0$ - ilość produktu (np. benzyny) przewożona od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy,

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{- jeżeli i-ty magazyn będzie budowany} \\ 0 & \text{- w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zatem rozpatrywany przez nas problem można sformułować następująco:

Zminimalizować funkcję celu będącą sumą kosztów inwestycyjnych i transportowych następującej postaci eksploatacyjnej

$$\sum_{i \in M \cup M_0} f_i z_i + \sum_{i \in M \cup M_0} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}, \tag{2.1}$$

przy ograniczeniach:

a) ilość produktu przewożona od i-tego dostawcy jest równa zapotrzebowaniu j-tego odbiorcy,

$$\sum_{i \in M \cup M_0} x_{ij} = b_j \qquad \text{dla } j \in N \tag{2.2}$$

b) ilość produktu przewożona od i-tego dostawcy jest nie większa niż pojemność i-tego dostawcy,

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N} x_{ij} < a_i z_i && \text{dla } i \in M \\ &\sum_{j \in N} x_{ij} < a_i && \text{dla } i \in M \end{aligned} \tag{2.3}$$

3.Opis metody rozwiazania - problemu

W punkcie 2 pokazano,że zagadnienie lokalizacji magazynów produkt naftowych może być sklasyfikowane jako zadanie lokalizacji z ograniczc mi możliwościami dostaw. Przedstawiono sformułowanie matematyczne prob mu rzeczywistego. Poniżej omówione zostaną różne sformułowania problem lokalizacji z ograniczonymi możliwościami dostaw.
Najbardziej ogólne sformułowanie tego problemu ma następującą postać [

$$\min \sum_{i\in M} \varphi_i(x_i) + \sum_{i\in M}\sum_{j\in N} d_{ij}x_{ij} \tag{3.1}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = b_j \qquad j\in N \tag{3.2}$$

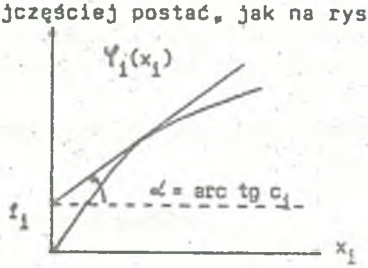
$$\sum_{i\in N} x_{ij} = x_i \qquad i\in M \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i\in M,\ j\in N \tag{3.4}$$

$$x_i \leqslant a_i \qquad i\in M \tag{3.5}$$

gdzie d_{ij} są to jednostkowe koszty związane z dostarczeniem towaru z i-tego magazynu do j-tego odbiorcy (koszty transportu). Ponadto z lokalizacją każdego magazynu $i \in M = \{1,2,\ldots,m\}$ związana jest funkc kosztów $\varphi_i(x)$, na którą składają się koszty budowy oraz kosz związane z eksploatacją magazynu.

Funkcja ta ma najczęściej postać, jak na rysunku 2.1



Rys.2.Postać funkcji kosztów lokalizacji i-tego magazynu.
Fig.2.The form a function of cost of localization of the i-th ...

Funkcja $\varphi_i(x)$ może być aproksymowana jako suma funkcji stałej f_i, tj. kosztów związanych z budową magazynu oraz funkcji liniowej o współczynniku kierunkowym c_i, tj. kosztów związanych z eksploatacją magazynu.

$$\varphi_i(x) = f_i \operatorname{sgn} x + c_i \qquad f_i > 0 \qquad c_i \geqslant 0 \tag{3.6}$$

Zauważmy teraz, że jeśli funkcja $\varphi_i(x)$ jest jednorodna, to $\varphi_i(x) = c_i x$

(a więc koszty stałe związane z budową magazynu są nieistotne).

Wprowadźmy binarną zmienną decyzyjną $z_i = 1(0)$, jeśli i-ty magazyn jest (nie jest) budowany. Oznaczymy też sumę $c_i + d_{ij}$ jako c_{ij}. Wówczas sformułowanie (3.1) - (3.5) przyjmie następującą równoważną postać [6]:

$$\min \sum_{i \in M} f_i z_i + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \tag{3.7}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \qquad j \in N \tag{3.8}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leqslant a_i z_i \qquad i \in M \tag{3.9}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i \in M,\ j \in N \tag{3.10}$$

$$z_i \in \{0,1\} \qquad i \in M \tag{3.11}$$

Zadanie o tej postaci jest liniowym zadaniem programowania mieszanego, dla którego najkorzystniejszą metodą rozwiązania jest algorytm podziału i oszacowań.

Zauważmy teraz, że rozwiązanie zadania o postaci (3.7) - (3.11) można przeprowadzić w dwóch etapach:

a) dla każdego binarnego wektora $z = (z_1, \ldots z_m)$ określić

$$F(z) = \sum_{i \in M} f_i z_i + \min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \tag{3.12}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j \qquad j \in N \tag{3.13}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leqslant a_i z_i \qquad i \in M \tag{3.14}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i \in M,\ j \in N \tag{3.15}$$

a następnie znaleźć wektor z^*, dla którego

$$F(z^*) = \min \{F(z) : z \in Z\}$$

gdzie - Z - zbiór wszystkich binarnych wektorów z;

b) dla danego ustalonego wektora z określić zbiór charakterystyczny

$\omega(z) = \{i : y_i = 1\}$.

Wówczas

$$F(\omega(z)) = \sum_{i \in \omega(z)} f_i + T(\omega(z)) \tag{3.16}$$

gdzie:

$$T(\omega) = \min \sum_{i \in \omega} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \tag{3.17}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i\in\omega} x_{ij} = b_j \qquad j \in N \qquad (3.18)$$

$$\sum_{j\in N} x_{ij} \leqslant a_i \qquad i \in \omega \qquad (3.19)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i\in\omega\ ,\ j\in N \qquad (3.20)$$

Zadanie(3.16) - (3.20) jest znanym zadaniem transportowym. Tak więc rozwiązanie zadania (3.7) - (3.11) daje się sprowadzić do wyboru takiego podzbioru $\omega^* \leqslant \{1,2,\ldots,m\}$, dla którego funkcja celu $F(\omega)$ osiąga minimum.

Oczywistym życzeniem jest,aby przejrzeć jak najmniej podzbiorów w zbiorze $M = \{1,2,\ldots,m\}$ (wektorów z).

Metoda podziału i oszacowań pozwala odrzucić nieperspektywiczne w określonym sensie podzbiory. Zwykle efektywność algorytmu podziału i oszacowań określana jest przez następujące czynniki:

a) sposób przeglądu drzewa rozwiązań (podzbiorów w zbiorze M),

b) obliczenie oszacowań w wierzchołkach drzewa (dolnych i górnych).

Przy różnych sposobach przeglądu drzewa rozwiązań oraz różnych sposobach wyliczania oszacowań otrzymuje się różne algorytmy rozwiązania dla zagadnienia lokalizacji z ograniczonymi możliwościami dostaw w postaci (3.7) - (3.11). Algorytmy te można znaleźć np. w [4,2,7,10]. Algorytm przeglądu zbioru rozwiązań problemu o postaci (3.7) -(3.11) może również wykorzystać właściwości funkcji celu w postaci (3.7) ,(jej submodularność).

Redukcja liczby wariantów lokalizacji magazynów możliwa jest w oparciu o pewną własność i twierdzenie.

Niech $M=\{1,2,\ldots,m\}$ będzie zbiorem możliwych lokalizacji. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru M, zaś ω dowolnym elementem Ω, $\omega \in \Omega$ (ω jest wariantem lokalizacji). Liczba wszystkich możliwych podzbiorów zbioru M wynosi 2^m, a więc jest to również maksymalna liczba możliwych rozwiązań (wariantów lokalizacji) zadania (3.7) - (3.11). Jeżeli F jest funkcją zdefiniowaną na zbiorze Ω , to w celu zredukowania liczby możliwych wariantów lokalizacji, przeglądanych w algorytmie, można wykorzystać następującą własność i twierdzenie:

Własność Czerenina.

Dla dowolnych podzbiorów $\omega_1, \omega_2 \subset M$

$$F(\omega_1) + F(\omega_2) - F(\omega_1 \cup \omega_2) - F(\omega_1 \cap \omega_2) \leqslant 0$$

Twierdzenie Czerenina.

Niech funkcja $F(\omega)$ spełnia własność Czerenina i niech ω^* będzie podzbiorem, dla którego funkcja celu przyjmie wartość optymalną. Wówczas dla dowolnego ciągu $\{\omega_i\}$ zawierającego ω^* ,takiego,że $\omega_i \subset \omega_{i+1}$, funkcja $F(\omega)$ jest monotonicznie nierosnąca dla $\omega_i \subset \omega^*$ i monotonicznie niemalejąca dla $\omega_i \supset \omega^*$.

Funkcja spełniająca powyższe twierdzenie nazywana jest funkcją submodularną. W pracy [3] Babayev wykazał,że twierdzenie Czerenina i własności,które sformułował Frieze w[6] dla funkcji submodularnych, są równoważne.
Można pokazać, że funkcja celu o postaci (3.7) spełnia własność Czerenina. Własność ta została wykorzystana w opisanym poniżej algorytmie,

ALGORYTM

Krok 0: -oblicz $L(M)$

$F^* = \infty$, $\omega^* = \{\emptyset\}$

$k = 0$, $R_k = \{\emptyset\}$

gdzie F^* oznacza najlepszą bieżącą wartość funkcji celu.

Krok 1: $k = k + 1$;

$\Omega_k = \{\emptyset\}$, $R_k = \{\emptyset\}$

utwórz wszystkie podzbiory $\omega_s \in \Omega_k^*$ dla k-tego poziomu, które zawierają perspektywiczne wierzchołki $\omega \in R_{k-1}$. Elementy zbioru $\Omega_k^* \subset \Omega_k$ muszą być generowane w porządku leksykograficznym.

Krok 2: Dla każdego $\omega \in \Omega_k^*$

a) jeśli $k(\omega) + L(M) < F^*$, idź do Kroku 2b), w przeciwnym przypadku ω jest nieperspektywiczny, zbadaj następny element zbioru Ω_k^*,

b) jeśli $k(\omega) + L(M) > F(\alpha)$ dla wszystkich poprzedników ω (tzn. $\alpha \in \Omega_{k-1}$, $\alpha \subset \omega$) ,to wierzchołek ω jest nieperspektywiczny, zbadaj następny element zbioru Ω_k^*.W przeciwnym przypadku idź do Kroku 2c),

c) oblicz $F(\omega)$.Wymaga to rozwiązania zagadnienia transportowego. Jeśli $F(\omega) > F(\alpha)$ dla wszystkich $\alpha \in R_{k-1}$ i $\alpha \subset \omega$, to ω jest nieperspektywiczny i należy przejść do badania następnego $\omega \in \Omega_k^*$.
W przypadku przeciwnym idź do Kroku 2d).

d) jeśli $F(\omega) < F^*$, to $F^* = F(\omega)$, $\omega^* = \omega$, $R_k = R_k \cup \{\omega\}$.

Krok 3: Jeśli $R_k = \{\emptyset\}$, idź do Kroku 1.
W przeciwnym przypadku algorytm kończy działanie, a ω^* jest rozwiązaniem optymalnym o wartości funkcji celu równej F^*.

4. Przykład obliczeniowy

Opracowany algorytm został oprogramowany na IBM PC w języku FORTRAN i przetestowany na danych rzeczywistych otrzymanych z Biura Projektowego "NAFTOPROJEKT" w Warszawie . Dane te dotyczyły lokalizacji magazynów produktów naftowych (benzyny, olejów napędowych) oraz ich dystrybucji do stacji benzynowych (odbiorców) dla kilku regionów) w kraju. Największy problem dla którego przeprowadzono obliczenia, obejmował 20 magazynów i 40 odbiorców. W przykładzie tym,stosując opisany powyżej algorytm,rozwiązano 30 zadań transportowych zamiast $2^7 = 128$ w przypadku pełnego przeglądu. Szczegółowy opis tego przykładu został podany w [9].

LITERATURA

[1] Aikens C.H.: "Facility location models for distribution planning" EJOR 22, pp.263-379.

[2] Akinc U., Khumawala B.M.: "An efficient branch and bound algorithm for the capacitated warechouses location problem" Man. Sci. vol. 23, No 6., 1977,pp.585 - 594.

[3] Babayev D.A.: "Comments on the note of Frieze" Math.Progr.7, 1974, pp. 248-252.

[4] Bartezzaghi E.,Coloroni A.,Palermo P.C.: "A search tree algorithm for plant location problems" EJOR,vol.7,No 4, 1981,pp. 371-379.

[5] Czerenin W.P., Chaczaturow W.R.: " Rieszenije mietodom posliedowatielnych rasczìotow odnow kłassa zadacz o razmieszczenii proizwodstwa " w książce: "Ekonomiko-matiematiczeskiej mietody" , Nauka , Moskwa 1965 , str. 279-290.

[6] Frieze A.A.: "A cost function propoerty for plant location problem" Math.Progr. No 7,.1974,pp.244-248.

[7] Khumawala B.M.: "An efficient branch-and-bound algorithm for the warechouse location problem" Man,Sci. No 18, 1972, B718-B731.

[8] Kim.K.: "Zadaczi razmieszczenia" prace CEMI,Moskwa 1984.

[9] E.Komorowska,B.Mażbic-Kulma,J.Stępień: "Analiza wybranych sformułowań zadania lokalizacji i ich możliwości zastosowań" - opracowanie IBS PAN ,1987 Warszawa. 1987.

[10] Nauss R.M.: "An improved algorithm for the capacitated facility location problem" Journal of Op.Res.Soc.No 29, 1978,pp. 1195-1201.

Recenzent:Doc.dr hab.inż.M.Zaborowski

Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

ВОПРОСЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕФТЕПРОДУКТОВ

Р е з ю м е

Одним из важнейших решений по капитальному строительству является планирование размещения новых складов, заводов и промежуточных складов.

В докладе представлена проблема размещения складов для нефтепродуктов в определенном районе. Проблема формулируется в виде задачи размещения с ограничениями по поставкам. В заключении представлены результаты вычислений для действительного примера.

DISTRIBUTION PROBLEM OF PETROL PRODUCTS

S u m m a r y

A strategic issue which concerns investment planners is where to best locate new warehouses, factories or intermediate stocking points. In this paper we consider the location problem of bulk warehouses for petrol products in a region. The problem is formulated as a capacitated facility location problem.

Computation results for a set of real-size problems are finally discussed.