ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria:AUTOMATYKA z.94 Nr kol.970

Mirosław Zaborowski
Politechnika Śląska

MODELE PRZEPŁYWU MATERIAŁÓW PRZEZ AGREGATY O PROCESACH TECHNOLOGICZNYCH DYSKRETNYCH*

Streszczenie. W pracy przedstawiono cztery różne modele matematyczne, za pomocą których można obliczyć przebiegi czasowe natężeń przepływu w zewnętrznych strumieniach materiałowych agregatu produkcyjnego. Wskazano zakres zastosowań tych modeli i związki między nimi.

1. Wprowadzenie

Sterowanie produkcją w zakładach przemysłowych jest w istocie sterowaniem przepływem materiałów. Wielkościami wyjściowymi obiektów sterowania produkcją, niezależnie od tego, czy chodzi o cały zakład, jego wydział, czy też o pojedynczy agregat produkcyjny, są natężenia przepływu w ich strumieniach materiałowych. W przypadku dyskretnych procesów technologicznych wielkości te są mierzone w sztukach na jednostkę czasu, co wcale nie oznacza, że muszą się wyrażać liczbami całkowitymi. Np. jeśli plan produkcji dobowej w fabryce samochodów wynosi 400 sztuk, to na jedną zmianę roboczą przypada 133,33 i z punktu widzenia planowania nie ma potrzeby zaokrąglania tej liczby. Również wielkości partii wyznaczane w trakcie harmonogramowania produkcji nie muszą być liczbami całkowitymi. Jeśli z obliczeń wynika wielkość partii równa np. 48,3, to nie warto jej zaokrąglać do 48 lub 49, ponieważ w praktyce i tak jest to tylko wielkość orientacyjna, a faktycznie można będzie wykonać w danym okresie np. tylko 35 sztuk. Posługiwanie się liczbami całkowitymi jest konieczne na poziomie sterowania obciążeniem chwilowym agregatu, gdzie na bieżąco wyznacza się chwile inicjujące ciągi operacji wykonywanych na kolejnych detalach i nonsensem byłoby założenie, że w którejś z tych chwil można wprowadzić do agregatu np. 0,4 sztuki.

Planowanie i harmonogramowanie produkcji z wykorzystaniem dyskretnych modeli matematycznych, a więc z uwzględnieniem warunku całkowitoliczbowości, prowadzi, jak wiadomo, do wielkich trudności obliczeniowych. Dlatego korzystanie z ciągłych modeli matematycznych wszędzie tam, gdzie jest to możliwe, jest bardzo wygodne [4]. Warunkiem ich praktycznej przydatności jest możliwość przejścia od planów i harmonogramów

* Praca była częściowo finansowana przez RP.I.02 "Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych"

wyrażonych w sposób ciągły do nieciągłych zmiennych decyzyjnych sterowania obciążeniem chwilowym agregatów. W związku z tym interesujące są zależności między modelami matematycznymi agregatów, stosowanymi na różnych poziomach systemów sterowania produkcją. W pracy przedstawiono model statyczny i model dynamiczny, w których natężenia przepływu są uważane za wielkości ciągłe, oraz model impulsowy i model symulacyjny, w których przebiegi czasowe natężeń przepływu są ciągami impulsów Diraca.

2. Model statyczny

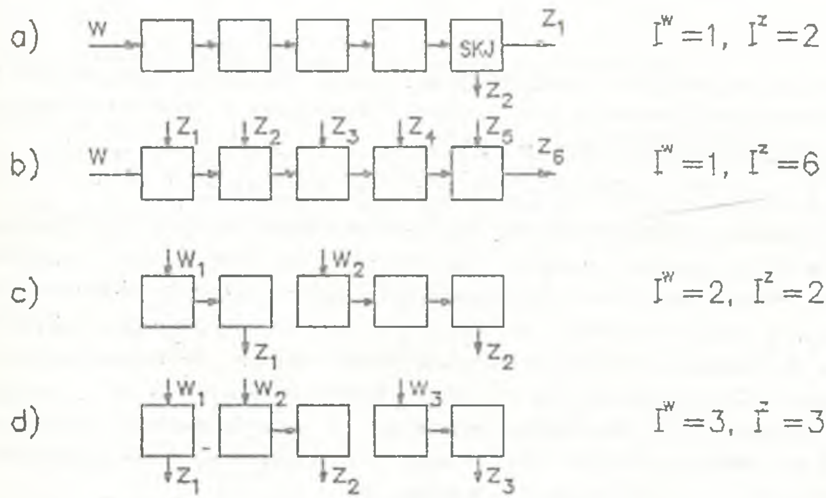
W modelach matematycznych systemów produkcyjnych agregaty produkcyjne są najczęściej reprezentowane przez swoje modele statyczne:

$$z_i^*(t) = \sum_{j=1}^{I^w} G_{i,j} w_j^*(t), \qquad \text{dla } i=1,\dots I^z \tag{1}$$

w których: w_j^*, z_i^*-natężenia przepływu w strumieniach wiodących i zależnych, I^w-liczba wiodących strumieni materiałowych agregatu, I^z-liczba strumieni zależnych, $G_{i,j}$-ilość detali (lub zespołów) z i-tego strumienia zależnego przypadająca przeciętnie na jedną sztukę z j-tego strumienia wiodącego. Współczynniki $G_{i,j}$ mogą przyjmować wartości niecałkowite. Jeśli np. na 100 detali w strunieniu wejściowym przypada średnio 98 wyrobów dobrych i 2 wybrakowane (rys.1a), to odpowiednie współczynniki modelu matematycznego wynoszą 0,98 i 0,02.

Model (1) obowiązuje w okresie pracy agregatu w jednym, określonym wariancie produkcyjnym, przy jednym, ustalonym zestawie operacji technologicznych. Problemy związane z przezbrojeniami, jak również ze zmianami wykonywanych zadań nie wymagającymi przezbrojenia, nie są rozpatrywane w tej pracy. Przy takim założeniu agregat ma na ogół tylko jeden strumień wiodący. Liczba strumieni zależnych dość często bywa większa od 1. Jest tak m.in. dla wszystkich agregatów z selekcją wyrobów na stanowisku kontroli jakości (rys.1a) i dla wszystkich procesów montażu (rys.1b).

Z liczbą strumieni wiodących większą od 1 mamy do czynienia w przypadku agregatów składających się z maszyn, których obciążenia chwilowe nie zawsze są ze sobą skoordynowane. Przykładem może być ciąg pras w tłoczni blach karoseryjnych fabryki samochodów (rys.1c,d). Struktura powiązań technologicznych poszczególnych pras nie zmienia się w okresie między przezbrojeniami, lecz jest różna w różnych wariantach produkcyjnych. Chcąc uważać za agregat każdy zbiór pras z jednym strumieniem wiodącym, trzeba byłoby się zgodzić na zmienność przynależności poszczególnych pras do agregatów, co stworzyłoby duże trudności w formalnym opisie problemów sterowania. Wygodniej jest więc przyjąć, że agregatem jest cały ciąg pras, a skutkiem tego założenia jest większa od 1 liczba strumieni wiodących w każdym z wariantów przedstawionych na rys.1c,d. Warto zauważyć, że



Rys.1. Przykłady struktur przepływu materiałów przez agregaty produkcyjne
Fig.1. Exemplary structures of material flow through manufacturing aggregates

niezależnie od liczby strumieni wiodących agregatu przepływ detali w danym strumieniu zależnym nadąża za przepływem w jednym tylko, odpowiadającym mu strumieniu wiodącym, a więc dla danego i jest tylko jedno j takie, że $G_{i,j}\neq 0$.

3. Model dynamiczny

Dynamika agregatów o procesach technologicznych dyskretnych wynika wyłącznie z czasów wykonywania operacji na poszczególnych maszynach, więc agregaty te można uważać za obiekty z czystymi czasami martwymi. Ich modele dynamiczne mają postać następujących równości:

$$z_i^d(t) = \sum_{j=1}^{I^w} G_{i,j}\, w_j^d(t-T_i^d), \qquad \text{dla } i=1,\dots I^z \tag{2}$$

w których: T_i^d–czasy martwe, w_j^d, z_i^d–natężenia przepływu, $I^w, I^z, G_{i,j}$–wielkości zdefiniowane tak samo jak dla modelu (1).

W przypadku produkcji niepotokowej lub potoku asynchronicznego agregat składa się z pojedynczej maszyny, a czas martwy jest równy jej tzw. jednostkowemu czasowi wykonania. W przypadku potoku synchronicznego z wymuszonym taktem, w tym potoku zautomatyzowanego, czas martwy jest wielokrotnością taktu produkcji, zależną od liczby maszyn (stanowisk roboczych) między wejściem strumienia wiodącego agregatu i wejściem lub wyjściem danego strumienia zależnego. W przypadku potoku synchronicznego bez wymuszonego taktu czas martwy jest w przybliżeniu równy analogicznej wielokrotności największego z jednostkowych czasów wykonania poszczególnych maszyn.

Odpowiednie wielkości wiodące modeli (1)(2) są sobie równe, a przy tym nigdy nie mogą być większe od wartości granicznych charakteryzujących aktualną zdolność produkcyjną agregatu:

$$w_j^d(t) = w_j^s(t) \le w_j^m(t), \qquad \text{dla } j = 1,\dots I^v \tag{3}$$

Przebiegi czasowe ograniczeń $w_j^m(t)$ są przedziałami stałe. Ich wartości normatywne w_j^n wyrażone w sztukach na godzinę określają tzw. godzinową możliwość produkcyjną i są odwrotnościami taktu produkcji bądź jednostkowych czasów wykonania wyrażonych w godzinach. Dlatego spadek w_j^m poniżej w_j^n powoduje wydłużenie rzeczywistych czasów martwych agregatu, czego jednak nie uwzględnia się w prostym modelu dynamicznym (2) o stałych czasach martwych T_i^d. Natężenia przepływu w strumieniach zależnych, obliczone na podstawie modeli statycznego i dynamicznego, są przesunięte w czasie (rys.2). Z (1),(2),(3) wynika bowiem, że

$$z_i^d(t) = z_i^s(t-T_i^d), \qquad \text{dla } i=1,\dots I^z \tag{4}$$

4. Model impulsowy

Do sterowania obciążeniem chwilowym agregatu przydatny jest model matematyczny, który nazwiemy "impulsowym":

$$z_i^i(t) = \sum_{j=1}^{I^v} 6_{i,j} w_j^i(t-T_i^d), \qquad \text{dla } i=1,\dots I^z \tag{5}$$

Model ten składa się z takich samych równań jak model dynamiczny, a różni się od niego interpretacją przebiegów czasowych natężeń przepływu, które tym razem uważamy za ciągi impulsów Diraca (rys.2):

$$w_j^i(t) = \sum_l w_{j,l}^j \delta(t-t_{j,l}^j), \qquad \text{dla } i=1,\dots I^v \tag{6}$$

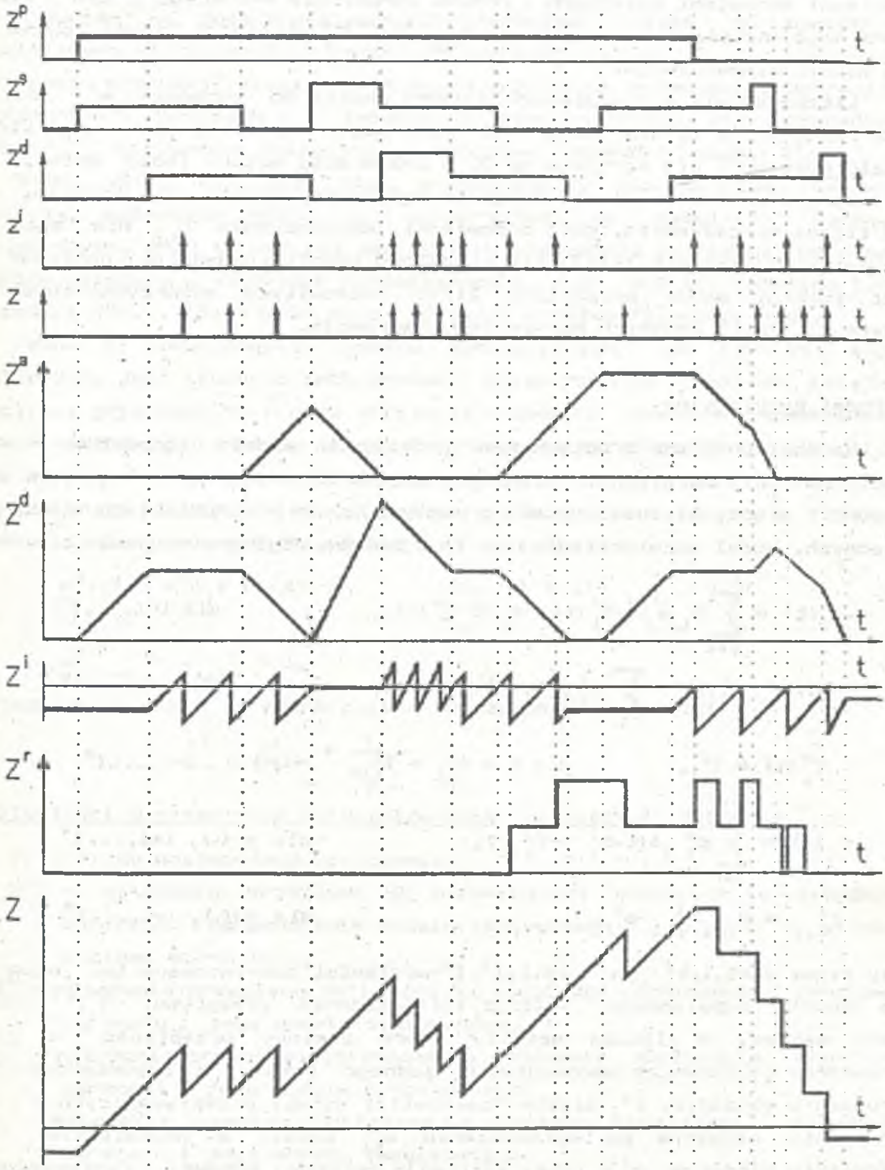
$$z_i^i(t) = \sum_l z_{i,l}^{ij} \delta(t-t_{j,l}^j-T_i^d), \qquad \text{dla } j=j(i),\ i=1,\dots I^z \tag{7}$$

$$z_{i,l}^{ij} = 6_{i,j} w_{j,l}^j, \qquad \text{dla } j=j(i),\ i=1,\dots I^z \tag{8}$$

przy czym: $\delta(t)$–jednostkowy impuls Diraca, l–zmienna bieżąca o wartościach całkowitych odpowiadająca zmiennej t reprezentującej ciągły upływ czasu, $t_{j,l}^j$–chwila, w której możliwe jest wprowadzenie detalu do agregatu w jego j-tym strumieniu wiodącym,

$$w_{j,l}^j = \begin{cases} 1, & \text{jeśli w chwili } t_{j,l}^j \text{ wprowadzany jest detal w j-tym strumieniu wiodącym,} \\ 0, & \text{jeśli w chwili } t_{j,l}^j \text{ nie wprowadza się detalu w j-tym strumieniu wiodącym,} \end{cases}$$

$z_{i,l}^{ij}$–ilość detali, która zgodnie z modelem impulsowym przepłynie w i-tym strumieniu zależnym po czasie T_i^d od chwili wprowadzenia $w_{j,l}^j$ detali w odpowiednim strumieniu wiodącym, $j(i)$–funkcja przyporządkowująca każdemu



Rys.2. Przykładowe przebiegi czasowe rzeczywistego natężenia przepływu i jego różnie obliczanych odpowiedników oraz przebiegi zaległości między nimi

Fig.2. Exemplary courses of a real flow rate, its variously calculated counterparts and backlogs between them

indeksowi strumieni zależnych i indeks strumienia wiodącego j, dla którego $G_{i,j}\neq 0$, w_j^i, z_i^i-natężenia przepływu, $G_{i,j}, I^v, I^z, T_i^d$-wielkości zdefiniowane jak dla modelu dynamicznego.

Liczba detali wprowadzanych w danej chwili do agregatu $w_{j,l}^j$ jest na ogół równa 0 lub 1, ale można też wyobrazić sobie agregat, do którego detale wprowadza się porcjami po 2, 3 lub więcej sztuk. Ilość detali $z_{i,l}^{ij}$, obliczona dla strumienia zależnego na podstawie modelu impulsowego, może być liczbą niecałkowitą, gdyż odpowiedni współczynnik $G_{i,j}$ nie musi być całkowity. We wzorach (6),(7) nie określono granic sumowania, ponieważ nie jest istotny wybór przedziału liczb całkowitych wykorzystywanych do indeksacji chwil objętych horyzontem obserwacji.

5. Model symulacyjny

Najdokładniejszy z dotychczas omówionych modeli agregatów - model impulsowy - nie uwzględnia zmienności czasów martwych ani losowych wahań proporcji między liczbami detali przepływających w strumieniach wiodących i zależnych. Model odzwierciedlający te zjawiska mógłby mieć postać:

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^{I^v} H_{i,j} w_j(t-T_i^z(t)) - e_i(t-T_i^z(t)), \qquad \text{dla } i=1,\dots I^z \tag{9}$$

$$w_j(t) = w_j^i(t) = \sum_l w_{j,l}^j \delta(t-t_{j,l}^j), \qquad \text{dla } j=1,\dots I^v \tag{10}$$

$$T_i^z(t) = T_{i,l}^j, \qquad \text{dla } t = t_{j,l}^j + T_{i,l}^j, \qquad j=j(i),\ i=1,\dots I^z \tag{11}$$

$$z_i(t) = \sum_l z_{i,l}^j \delta(t-t_{j,l}^j - T_{i,l}^j), \qquad \text{dla } j=j(i),\ i=1,\dots I^z \tag{12}$$

$$z_{i,l}^j = H_{i,j} w_{j,l}^j - e_{i,l}^j, \qquad \text{dla } j=j(i),\ i=1,\dots I^z \tag{13}$$

przy czym: $\delta(t), l, t_{j,l}^j, w_{j,l}^j, j(i), I^v, I^z$-wielkości zdefiniowane tak samo jak dla modelu impulsowego, $w_j(t), z_i(t)$-natężenia przepływu, $T_i^z, T_{i,l}^j$-zmienne czasy martwe, $H_{i,j}$-liczba detali, które powinny przepłynąć w i-tym strumieniu zależnym po wprowadzeniu jednego detalu w odpowiednim j-tym strumieniu wiodącym, $z_{i,l}^j$-liczba (całkowita) detali przepływających w i-tym strumieniu zależnym po wprowadzeniu $w_{j,l}^j$ detali w odpowiednim j-tym strumieniu wiodącym, $e_{i,l}^j$- l-ta realizacja zmiennej losowej reprezentującej zakłócenia.

Jeśli $w_{j,l}^j$ przyjmuje tylko wartości 1 albo 0, to odpowiednie $H_{i,j}$, w przeciwieństwie do $G_{i,j}$, muszą być liczbami całkowitymi. Zmienna losowa e_i^j może przybierać tylko wartości całkowite spełniające warunek:

$$0 \le e_{i,l}^j \le H_{i,j} w_{j,l}^j, \qquad \text{dla } j=j(i),\ i=1,\dots I^z \tag{14}$$

Dla agregatów zorganizowanych w potok synchroniczny z wymuszonym taktem czasy martwe są deterministycznymi funkcjami czasu o wartościach zmieniających się w chwilach zmian nastawy taktu produkcji. Dla innych form organizacji produkcji czasy martwe są sumami czasów wykonywania operacji na poszczególnych maszynach i w związku z tym zmieniają się przypadkowo. Wartości $T^j_{i,l}$ są wówczas kolejnymi realizacjami zmiennej losowej T^j_i.

Model (9)...(13) jest zbyt skomplikowany dla potrzeb sterowania produkcją, natomiast można go wykorzystać do symulacji agregatów rzeczywistych, żeby sprawdzić, jak systemy sterowania oparte na prostszych modelach działają w warunkach niedokładności tych modeli. Dlatego układ zależności (9)...(13) będzie dalej nazywany modelem "symulacyjnym".

Jedną z niedogodności modelu symulacyjnego, jak również modelu impulsowego, jest trudność interpretacji ograniczeń na chwilowe natężenia przepływu, gdyż impulsy Diraca przyjmują w pewnych chwilach nieskończenie wielkie wartości. Graniczne natężenie przepływu określa dopuszczalną liczbę sztuk przepływających w jednostce czasu i praktycznie dotyczy czasu, który musi upłynąć między dwiema kolejnymi chwilami wprowadzenia detali w strumieniu wiodącym agregatu. Jeśli

$$w^m_j(t) = w^{mj}_{j,l} = \text{const.} \qquad \text{dla} \quad t \in [t^j_{j,l-1}, t^j_{j,l}] \tag{15}$$

oraz

$$w^j_{j,l-1} = w^j_{j,l} = 1, \tag{16}$$

wówczas ograniczenie to można zapisać w postaci nierówności:

$$t^j_{j,l} \ge t^j_{j,l-1} + \frac{1}{w^{mj}_{j,l}} \tag{17}$$

6. Zaległości w przepływie materiałów przez agregaty produkcyjne

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

w^p_j, z^p_i – natężenia przepływu w strumieniach wiodących i zależnych, obliczone na podstawie modelu statycznego i decyzji z wyższego poziomu sterowania,

w^s_j, z^s_i – natężenia przepływu obliczone na podstawie obciążenia chwilowego agregatu i jego modelu statycznego,

w^d_j, z^d_i – natężenia przepływu obliczone na podstawie obciążenia chwilowego agregatu i jego modelu dynamicznego,

w^i_j, z^i_i – natężenia przepływu obliczone na podstawie obciążenia chwilowego agregatu i jego modelu impulsowego,

w_j, z_i – rzeczywiste natężenia przepływu w agregacie produkcyjnym.

Całki z różnic między różnie obliczanymi natężeniami przepływu w danym strumieniu materiałowym będziemy nazywać "zaległościami" w przepływie materiałów. Zaległość całkowita dla i-tego strumienia zależnego wyraża się wzorem:

$$Z_i(t) = Z_i(t^o) + \int_{t^o}^{t} [z^p_i(\tau) - z_i(\tau)]d\tau \tag{18}$$

przy czym t^o jest np. chwilą ostatniej zmiany wariantu produkcyjnego lub ostatniej aktywizacji sprzężeń zwrotnych do nadrzędnego systemu sterowania. Analogicznie można zdefiniować zaległości całkowite dla strumieni wiodących W_j. Należy pamiętać, że wielkości te mogą być ujemne i wówczas nie można im przypisywać znaczenia pejoratywnego, kojarzonego zazwyczaj z pojęciem zaległości.

Nierówność $z_i \neq z_i^p$ można interpretować jako skutek nierówności: $z_i^a \neq z_i^p$, $z_i^d \neq z_i^a$, $z_i^i \neq z_i^d$, $z_i \neq z_i^i$ (rys.2). Dlatego warto zbadać, jak zaległości całkowite zależą od zaległości cząstkowych wynikających z różnic między różnie obliczanymi natężeniami przepływu. W tym celu wystarczy pod znakiem całki (18) dodać i odjąć wielkości pośrednie z_i^a, z_i^d, z_i^i:

$$\int_{t^o}^{t} [z_i^p(\tau)-z_i(\tau)]d\tau = \int_{t^o}^{t} [z_i^p(\tau)-z_i^a(\tau)+z_i^a(\tau)-z_i^d(\tau)+z_i^d(\tau)-z_i^i(\tau)+z_i^i(\tau)-z_i(\tau)]d\tau$$

Prowadzi to do wniosku, że

$$Z_i(t) = Z_i^a(t) + Z_i^d(t) + Z_i^i(t) + Z_i^r(t) \tag{19}$$

przy czym

$$Z_i^a(t) = Z_i^a(t^o) + \int_{t^o}^{t} [z_i^p(\tau)-z_i^a(\tau)]d\tau \tag{20}$$

$$Z_i^d(t) = Z_i^d(t^o) + \int_{t^o}^{t} [z_i^a(\tau)-z_i^d(\tau)]d\tau \tag{21}$$

$$Z_i^i(t) = Z_i^i(t^o) + \int_{t^o}^{t} [z_i^d(\tau)-z_i^i(\tau)]d\tau \tag{22}$$

$$Z_i^r(t) = Z_i^r(t^o) + \int_{t^o}^{t} [z_i^i(\tau)-z_i(\tau)]d\tau \tag{23}$$

Również dla strumieni wiodących:

$$W_j(t) = W_j^a(t) + W_j^d(t) + W_j^i(t) + W_j^r(t) \tag{24}$$

przy czym zaległości składowe są zdefiniowane równościami analogicznymi do (20)..(23).

Rozkład zaległości całkowitych na składowe umożliwia analizę wewnętrznej struktury zapasów w systemach produkcyjnych, co może być wykorzystywane przy projektowaniu sprzężeń zwrotnych operatywnego sterowania produkcją [4].

LITERATURA

[1] Gordon G.: Symulacja systemów. WNT, Warszawa 1974.

[2] Kowalowski H. i inni: Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych. WNT, Warszawa 1984.
[3] Lis S.: Organizacja i ekonomika procesów produkcyjnych w przemyśle maszynowym. PWN, Warszawa 1984.
[4] Zaborowski M.: Sterowanie operatywne dyskretnymi procesami produkcji. Sprawozdania z I i II etapu prac w ramach programu badań podstawowych RP.I.02. Gliwice 1986,1987. Niepublikowane.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.K.Wala
Wpłynęło do Redakcji do 1988-04-30.

МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО АГРЕГАТАМ С ДИСКРЕТНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Р е з ю м е

В работе представлены четыре разные математические модели, предназначенные для расчёта временных пробегов внешних материальных потоков производственного агрегата. Указаны применения этих моделей и соотношения между ними.

THE MODELS OF MATERIAL FLOW THROUGH MANUFACTURING AGGREGATES WITH DISCRETE TECHNOLOGICAL PROCESSES

S u m m a r y

Four different mathematical models which are intended to calculate flow rate courses in exterior material streams of a manufacturing aggregate have been presented in this paper. Applications of the models and relations between them have been shown.