

Jan FEDOROWICZ

IZOTROPOWA TARCZA NIEOGRANICZONA  
OBCIĄŻONA WZDŁUŻ ŁUKU KOŁOWEGO

**Streszczenie.** W pracy rozpatruje się izotropową tarczę nieograniczoną. Obciążenie tarczy rozłożone jest w sposób ciągły na odcinku okręgu o promieniu  $R$ . Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano funkcję Greena dla tarczy nieograniczonej. Podano wzory w postaci zamkniętej na składowe tensora naprężenia oraz składowe wektora przemieszczenia dla czterech szczególnych przypadków obciążenia.

1. Wstęp

Rozwiązanie zagadnienia płaskiego stanu naprężenia odbywa się przez określenie funkcji naprężeń Airy'ego dobranej tak, że spełnia ona, oprócz podstawowego równania różniczkowego tarczy, określone warunki brzegowe. Dla wielu przypadków (nierregularna geometria konturu, działania sił skupionych w płaszczyźnie tarczy, nieciągłe warunki brzegowe), znalezienie funkcji Airy'ego okazuje się trudne. W tych przypadkach do określenia naprężeń w tarczach okazać się może pomocna znajomość odpowiedniej funkcji Greena. Niemniej jednak wymagana jest również pewna regularność zarówno od konturu tarczy jak i warunków brzegowych.

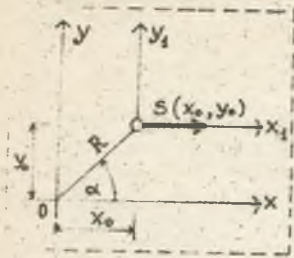
Rozwiązanie zagadnienia działania siły skupionej na nieograniczoną tarczę izotropową można znaleźć w wielu monografiach.

M.T. HUBER [1] otrzymał zamkniętą postać wzorów na składowe tensora naprężenia, stosując funkcję zmiennej zespolonej. W. NOWACKI [2] i S. ŁUKASIEWICZ [3] otrzymali tę samą, zamkniętą postać wzorów na składowe tensora naprężenia przez rozwiązanie równanie różniczkowego problemu sformułowanego na podstawie teorii dystrybucji

$$\Delta \Delta G = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \quad (1.1)$$

a M. SOKOŁOWSKI [4] rozpatrzył identyczne zagadnienie dla tarczy ortotropowej. Całki szczególne równania (1.1) posłużyły F. SZELĄGOWSKIEMU [5] do rozwiązania izotropowej tarczy nieograniczonej obciążonej siłą skupioną przekazaną przez pręt kołowy, a W. NOWACKIEMU [6] do określenia stanu naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej działaniem jądra termosprężystego.

W niniejszej pracy całki szczególne równania (1.1) wykorzystano do zbudowania rozwiązania tarczy nieograniczonej obciążonej w sposób ciągły na odcinku okręgu o promieniu  $R$ .



Rys. 2.1

## 2. Założenie

Składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla izotropowej tarczy nieograniczonej od siły skupionej  $P$  przyłożonej w początku układu współrzędnych w kierunku dodatniej osi  $x_1$  (rys. 2.1) mają postać:

$$\sigma_{x_1 x_1}(x_1, y_1) = -\frac{P}{4\pi h} \left[ (3+\nu) \frac{x_1}{r^2} - 2(1+\nu) \frac{x_1 y_1^2}{r^4} \right], \quad (2.1)$$

$$\sigma_{x_1 y_1}(x_1, y_1) = -\frac{P}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \frac{y_1}{r^2} + 2(1+\nu) \frac{x_1^2 y_1}{r^4} \right], \quad (2.2)$$

$$\sigma_{y_1 y_1}(x_1, y_1) = \frac{P}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \frac{x_1}{r^2} - 2(1+\nu) \frac{x_1 y_1^2}{r^4} \right], \quad (2.3)$$

$$u(x_1, y_1) = -\frac{P}{4\pi h E} \left[ (3-\nu)(1+\nu) \ln \frac{r}{A} + (1+\nu)^2 \frac{y_1^2}{r^2} \right], \quad (2.4)$$

$$v(x_1, y_1) = \frac{P}{4\pi h E} (1+\nu)^2 \frac{x_1 y_1}{r^2}, \quad (2.5)$$

gdzie:

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

$h$  - grubość tarczy,

$E, \nu$  - stałe materiałowe tarczy,

$A$  - rzędna punktów  $(0, \pm A)$  w układzie współrzędnych  $x_1 S y_1$ , dla których przyjęto, że  $u(0, \pm A) = 0$ .

Ze wzorów (2.1) do (2.5) wynika, że punkt przyłożenia siły  $P$  jest punktem osobliwym dla naprężeń i przemieszczeń. Dokonując transformacji układu współrzędnych  $x_1 S y_1$  w układ  $xOy$  wg wzorów  $x_1 = x - x_0$ ,  $y_1 = y - y_0$ , składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia w układzie współrzędnych  $xOy$  przyjmą postać:

$$\sigma_{xx}(x, y; x_0, y_0) = -\frac{P}{4\pi h} \left[ (3+\nu) \frac{x-x_0}{r^2} - 2(1+\nu) \frac{(x-x_0)(y-y_0)^2}{r^4} \right], \quad (2.6)$$

$$\sigma_{xy}^*(x, y; x_0, y_0) = -\frac{P}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \frac{y-y_0}{r^2} + 2(1+\nu) \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)}{r^4} \right], \quad (2.7)$$

$$\sigma_{yy}^*(x, y; x_0, y_0) = \frac{P}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \frac{x-x_0}{r^2} - 2(1+\nu) \frac{(x-x_0)(y-y_0)^2}{r^4} \right], \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} u^*(x, y; x_0, y_0) = & -\frac{P}{4\pi h E} \left[ (3-\nu)(1+\nu) \ln \frac{r}{A} + \right. \\ & \left. + (1+\nu)^2 \frac{(y-y_0)^2}{r^2} - \bar{u}(0,0) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$v^*(x, y; x_0, y_0) = \frac{P}{4\pi h E} (1+\nu)^2 \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{r^2} - \bar{v}(0,0), \quad (2.10)$$

gdzie:

$$x_0 = R \cos \alpha,$$

$$y_0 = R \sin \alpha,$$

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2, \quad (2.11)$$

$$\bar{u}(0,0) = -\frac{P}{4\pi h E} \left[ (3-\nu)(1+\nu) \ln \frac{R}{A} + (1+\nu)^2 \sin^2 \alpha \right],$$

$$\bar{v}(0,0) = \frac{P}{4\pi h E} (1+\nu)^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku obciążenia wzory (2.6) do (2.10) na naprężenia i przemieszczenia wykazują osobliwość dla punktu  $S(x_0, y_0)$  przyłożenia siły.

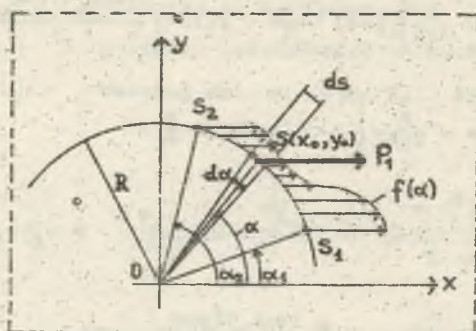
Przyjmując współrzędne punktu  $S(x_0, y_0)$  jako nowe zmienne niezależne, można wzory (2.6) do (2.8) na składowe tensora naprężenia traktować jako funkcje powierzchni wpływu oraz funkcje Greena dla naprężeń. Natomiast wzory (2.9), (2.10) na składowe wektora przemieszczenia uważać można za funkcje Greena dla przemieszczeń.

### 3. Sformułowanie problemu i jego rozwiązanie

Rozpatrzmy nieograniczoną tarczę izotropową o grubości  $h$ , której powierzchnia środkowa sparametryzowana jest ortokartezjańskim układem współrzędnych  $xOy$ . Na tarczę działa obciążenie rozłożone w sposób ciągły wzdłuż odcinka łuku o promieniu  $R$ , skierowane równoległe do osi  $x$  w jej dodat-



niem kierunku (rys. 3.1). Rozkład obciążenia opisany jest ciągłą funkcją  $f(\alpha)$  ( $\alpha$  - kąt nachylenia promienia wodzącego punktu  $S(x_0, y_0)$  względem dodatniej osi  $x$ ).



Rys. 3.1

Określmy składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia. Traktując obciążenie rozłożone na elementarnym odcinku okręgu  $ds$  jako siłę skupioną  $P_1$  w punkcie  $S(x_0, y_0)$  i biorąc pod uwagę fakt, że dla okręgu zachodzi,  $ds = R d\alpha$  otrzymamy:

$$dP_1 = f(\alpha) ds = R f(\alpha) d\alpha \quad (3.1)$$

Podstawiając wyrażenie (3.1) do wzorów (2.6) do (2.10) i całkując w przedziale występowania obciążenia ( $\alpha_1, \alpha_2$ ), otrzymamy:

$$\bar{\sigma}_{xx}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) \delta_{xx}^*(x, y; x_0, y_0) d\alpha, \quad (3.2)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) \delta_{xy}^*(x, y; x_0, y_0) d\alpha, \quad (3.3)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) \delta_{yy}^*(x, y; x_0, y_0) d\alpha, \quad (3.4)$$

$$\bar{u}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) u^*(x, y; x_0, y_0) d\alpha, \quad (3.5)$$

$$\bar{v}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = R \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\alpha) v^*(x, y; x_0, y_0) d\alpha, \quad (3.6)$$

gdzie wielkości oznaczone \* należy wprowadzić w postaci (2.5) do (2.10) dla  $P = 1$ .

Otrzymane wyrażenia (3.2) do (3.6) przedstawiają składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla obciążenia tarczy nieograniczonej wg rys. 3.1.

W sposób analogiczny otrzymać można rozwiązanie dla obciążenia rozłożonego ciągle na odcinku łuku o promieniu  $R$  skierowanego równoległe do osi  $y$  i działającego w jej dodatnim kierunku.

Rozwiązanie to otrzymać można również wprost z wyrażen (3.2) do (3.6) dokonując w nich po scałkowaniu cyklicznej zamiany zmiennych  $x$  i  $y$ .

#### 4. Szczególne przypadki obciążenia

Rozpatrzmy obecnie szczególne przypadki obciążenia izotropowej tarczy nieograniczonej podane na rys. 4.1a-d.

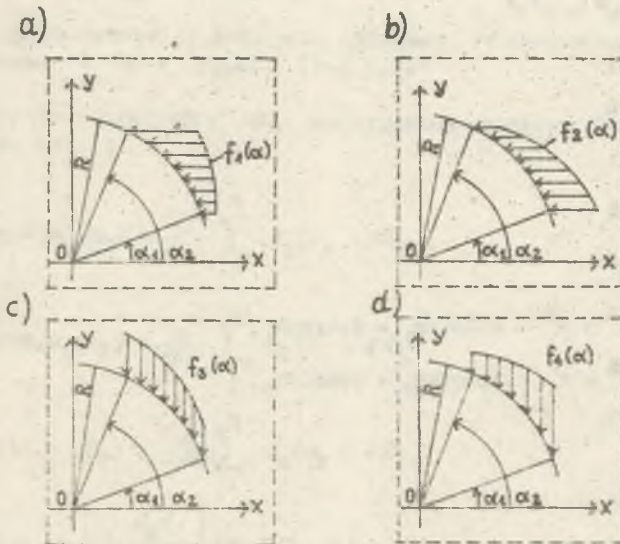
Przyjęto następujące funkcje obciążenia:

$$\text{I) rys. 4.1a} \quad f_1(\alpha) = -p_0 \sin \alpha, \quad (4.1a)$$

$$\text{II) rys. 4.1b} \quad f_2(\alpha) = -p_0 \cos \alpha, \quad (4.1b)$$

$$\text{III) rys. 4.1c} \quad f_3(\alpha) = -p_0 \sin \alpha, \quad (4.1c)$$

$$\text{IV) rys. 4.1d} \quad f_4(\alpha) = -p_0 \cos \alpha. \quad (4.1d)$$



Rys. 4.1

Wstawiając (4.1a-d) do wzorów (3.2) do (3.6) i uwzględniając zależności (2.6) do (2.11), otrzymamy wzory na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla obciążenia wg rys. 4.1a-d w postaci całek oznaczonych typu

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} g(\cos\alpha, \sin\alpha) d\alpha, \quad (4.2)$$

Całki tego typu dają się zawsze sprowadzić przez podstawienie

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \cos\alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin\alpha &= \frac{2t}{1+t^2}, & d\alpha &= \frac{2dt}{1+t^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

do całek z funkcji wymiernej. Pomijając znużony tok obliczeń, podczas którego korzystano z tablic [7], podano niżej wyniki końcowe dla poszczególnych przypadków obciążenia.

Wprowadzono dla skrócenia zapisu następujące oznaczenia:

$$a = x^2 + y^2 + R^2 + 2xR,$$

$$c = x^2 + y^2 + R^2 - 2xR,$$

$$\Delta = 4(x^2 + y^2 - R^2)^2,$$

$$d = x^2 - y^2,$$

$$m = 3x^2 - y^2,$$

$$n = 3y^2 - x^2,$$

$$\bar{m} = 3x^2 + y^2,$$

$$\bar{n} = 3y^2 + x^2,$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + R^2 - 2xR\cos\alpha_1 - 2yR\sin\alpha_1,$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + R^2 - 2xR\cos\alpha_2 - 2yR\sin\alpha_2,$$

$$r_0^2 = x^2 + y^2,$$

$$Q_1 = \ln\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right),$$

$$q_2 = Q_2 = \frac{a_2}{2} - \frac{c_2}{2},$$



$$q_3 = Q_3 = \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} - \cos^2 \frac{\alpha_1}{2},$$

$$q_4 = Q_4 = \frac{1}{2}(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1),$$

$$Q_5 = \arctg \frac{a \sin \frac{\alpha_2}{2} - 2yR \cos \frac{\alpha_2}{2}}{(x^2 + y^2 - R^2) \cos \frac{\alpha_2}{2}} - \arctg \frac{a \sin \frac{\alpha_1}{2} - 2yR \cos \frac{\alpha_1}{2}}{(x^2 + y^2 - R^2) \cos \frac{\alpha_1}{2}}$$

$$Q_6 = \frac{\cos^2 \frac{\alpha_2}{2}}{r_2^2} - \frac{\cos^2 \frac{\alpha_1}{2}}{r_1^2},$$

$$Q_7 = \frac{a \sin \alpha_2 - 4yR \cos^2 \frac{\alpha_2}{2}}{r_2^2} - \frac{a \sin \alpha_1 - 4yR \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}}{r_1^2}$$

$$q_5 = Q_8 = \cos^4 \frac{\alpha_2}{2} - \cos^4 \frac{\alpha_1}{2},$$

$$q_6 = Q_9 = \frac{1}{2}(\sin \alpha_2 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} - \sin \alpha_1 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}),$$

$$q_1 = \ln \left( \frac{a \sin \alpha_1 - 4yR \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}}{a \sin \alpha_2 - 4yR \cos^2 \frac{\alpha_2}{2}} \right).$$

Rozpatrując poszczególne przypadki obciążeń, otrzymuje się:

I) obciążenie  $f_1(\alpha) = -p_0 \sin \alpha$  (rys. 4.1a)

$1^0$  dla punktów płaszczyzny  $xOy$  za wyjątkiem punktów okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$  i punktu  $O(0,0)$

$$\sigma_{xx}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\pi h} \sum_1^9 Q_1(B_1 - \nu \bar{B}_1), \quad (4.4)$$

$$\sigma_{xy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\pi h} \sum_1^9 Q_1(C_1 - \nu \bar{C}_1), \quad (4.5)$$

$$\sigma_{yy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\pi h} \sum_1^9 Q_1(D_1 - \nu \bar{D}_1), \quad (4.6)$$

$$u(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\pi h E} \left\{ (3-\nu)(1+\nu) \left[ \cos \alpha_1 \ln \frac{r_1}{A} - \cos \alpha_2 \ln \frac{r_2}{A} + \right. \right.$$

$$\sigma = \sum_1^5 Q_1 G_1 + (1+\nu)^2 \sum_1^9 Q_1 \bar{G}_1 - \bar{u}^*(0,0), \quad (4.7)$$

$$\nu(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h E} (1+\nu)^2 \sum_1^9 Q_1 H_1 - \bar{\nu}^*(0,0); \quad (4.8)$$

2° dla punktów okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$  za wyjątkiem punktów przyłożenia obciążenia (łuk okręgu zawarty między promieniami o nachyleniu  $\alpha_1, \alpha_2$ , rys. 4.1a)

$$\sigma_{xx}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h} \left[ (3+\nu) \sum_1^4 q_1 B_1^* - 2(1+\nu) \sum_1^9 q_1 \bar{B}_1^* \right], \quad (4.9)$$

$$\sigma_{xy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \sum_1^4 q_1 C_1^* + 2(1+\nu) \sum_1^6 q_1 \bar{C}_1^* \right], \quad (4.10)$$

$$\sigma_{yy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \sum_1^4 q_1 D_1^* - 2(1+\nu) \sum_1^6 q_1 \bar{D}_1^* \right], \quad (4.11)$$

$$u(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h E} \left\{ (3-\nu)(1+\nu) \left[ \sin \alpha_2 \ln \frac{r_2}{A} - \sin \alpha_1 \ln \frac{r_1}{A} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_1^3 q_1 G_1^* + (1+\nu)^2 \sum_2^6 q_1 \bar{G}_1^* - \bar{u}^*(0,0) \right], \quad (4.12)$$

$$\nu(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h E} (1+\nu)^2 \sum_2^6 q_1 H_1^* - \bar{\nu}^*(0,0); \quad (4.13)$$

3° dla punktu  $O(0,0)$

$$\sigma_{xx}(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{-P_0}{8\pi h} \left[ (3+\nu)(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) + \right. \\ \left. + (1+\nu)(\cos^4 \alpha_2 - \cos^4 \alpha_1) \right], \quad (4.14)$$

$$\sigma_{xy}(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{-P_0}{16\pi h} \left[ (3-\nu)(\alpha_2 - \alpha_1) - (1-\nu)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(1+\nu)(\sin 4\alpha_2 - \sin 4\alpha_1) \right], \quad (4.15)$$



$$\sigma_{yy}(0,0;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{8\mu h} \left[ (1-\nu)(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) - (1+\nu)(\sin^4 \alpha_2 - \sin^4 \alpha_1) \right] \quad (4.16)$$

$$u(0,0;R,\alpha_1,\alpha_2) = 0, \quad (4.17)$$

$$v(0,0;R,\alpha_1,\alpha_2) = 0. \quad (4.18)$$

II) Obciążenie  $f_2(\alpha) = -p_0 \cos \alpha$  (rys. 4.1b)

1° dla punktów płaszczyzny  $xOy$  za wyjątkiem punktów okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$  i punktu  $O(0,0)$

$$\sigma_{xx}(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h} \sum_1^9 Q_1(K_1 - \nu \bar{K}_1), \quad (4.19)$$

$$\sigma_{xy}(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h} \sum_1^9 Q_1(M_1 - \nu \bar{M}_1), \quad (4.20)$$

$$\sigma_{yy}(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h} \sum_1^9 Q_1(N_1 - \nu \bar{N}_1), \quad (4.21)$$

$$u(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h E} \left\{ (3-\nu)(1+\nu) \left[ \sin \alpha_2 \ln \frac{r_2}{A} - \sin \alpha_1 \ln \frac{r_1}{A} + \sum_1^5 Q_1 \bar{L}_1 \right] + (1+\nu)^2 \sum_1^9 Q_1 \bar{L}_1 \right\} - \bar{u}^{**}(0,0), \quad (4.22)$$

$$v(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h E} (1+\nu)^2 \sum_1^9 Q_1 T_1 - \bar{v}^{**}(0,0); \quad (4.23)$$

2° dla punktów okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$  za wyjątkiem punktów przyłożenia obciążenia

$$\sigma_{xx}(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h} \left[ (3+\nu) \sum_1^4 q_1 K_1^* - 2(1+\nu) \sum_1^6 q_1 \bar{K}_1^* \right], \quad (4.24)$$

$$\sigma_{xy}(x,y;R,\alpha_1,\alpha_2) = \frac{p_0 R}{4\mu h} \left[ (1-\nu) \sum_1^4 q_1 M_1^* + 2(1+\nu) \sum_1^6 q_1 \bar{M}_1^* \right], \quad (4.25)$$

$$\sigma_{yy}(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h} \left[ (1-\nu) \sum_1^4 q_1 N_1^* - 2(1+\nu) \sum_1^6 q_1 \bar{N}_1^* \right]. \quad (4.26)$$

$$u(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h E} \left\{ (3-\nu)(1+\nu) \left[ \sin \alpha_2 \ln \frac{r_2}{A} - \sin \alpha_1 \ln \frac{r_1}{A} + \sum_1^4 q_1 L_1^* \right] + (1+\nu)^2 \sum_2^6 q_1 \bar{L}_1^* \right\} - \bar{u}^{**}(0,0), \quad (4.27)$$

$$v(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0 R}{4\pi h E} (1+\nu)^2 \sum_2^6 q_1 \bar{T}_1^* - \bar{v}^{**}(0,0); \quad (4.28)$$

3<sup>o</sup> dla punktu  $O(0,0)$

$$\sigma_{xx}(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = -\frac{P_0}{16\pi h} \left[ (5+\nu)(\alpha_2 - \alpha_1) + (3+\nu)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) + \frac{1}{4}(1+\nu)(\sin 4\alpha_2 - \sin 4\alpha_1) \right], \quad (4.29)$$

$$\sigma_{xy}(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{-P_0}{8\pi h} \left[ (1-\nu)(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) - (1+\nu)(\cos^4 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) \right], \quad (4.30)$$

$$\sigma_{yy}(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0}{16\pi h} \left[ (1-3\nu)(\alpha_2 - \alpha_1) + (1-\nu)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) + \frac{1}{4}(1+\nu)(\sin 4\alpha_2 - \sin 4\alpha_1) \right], \quad (4.31)$$

$$u(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (4.32)$$

$$v(0,0; R, \alpha_1, \alpha_2) = 0; \quad (4.33)$$

gdzie:

$$\bar{u}^{**}(0,0) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{u}(0,0) \sin \alpha d\alpha = -\frac{P_0}{4\pi h E} \left[ (3-\nu)(1+\nu) \ln \frac{R}{A} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \frac{1}{3}(1+\nu)^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha_2 - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha_1 \right], \quad (4.34)$$

$$\bar{V}^*(0,0) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{V}(0,0) \sin \alpha d\alpha = \frac{p_0}{12\pi h E} (1+\nu)^2 (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}^{**}(0,0) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{u}(0,0) \cos \alpha d\alpha = \frac{-p_0}{4\pi h E} \left[ (3-\nu)(1+\nu) \ln \frac{R}{A} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \right. \\ \left. + (1+\nu)^2 (\sin^3 \alpha_2 - \sin^3 \alpha_1) \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\bar{v}^{**}(0,0) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{v}(0,0) \cos \alpha d\alpha = \frac{-p_0}{12\pi h E} (1+\nu)^2 (\cos^3 \alpha_2 - \cos^3 \alpha_1). \quad (4.37)$$

Występujące we wzorach (4.4) do (4.13) i (4.19) do (4.28) współczynniki funkcyjne  $B_1(x,y;R)$ ,  $\bar{B}_1(x,y;R)$ ,  $\bar{B}_1^*(x,y;R)$ ,  $\bar{B}_1^*(\bar{x},y;R)$ ,  $C_1(x,y;R)$ ... itd. są funkcjami wymiernymi ułamkowymi zmiennych  $x,y,R$ . Z uwagi na szczupłość miejsca ograniczono się w niniejszej pracy do przedstawienia tych współczynników jedynie dla naprężeń normalnych  $\sigma_{xx}$  dla obydwu przypadków obciążenia I i II.

Mają one postać:

$$B_1 = \frac{1}{8Rr_0^8} \left[ -5r_0^8 + 4R^2 r_0^2 (2x^4 - y^4 - 3x^2 y^2) + 3R^4 (r_0^4 - 2d^2) \right],$$

$$B_2 = B_5 = \frac{xyR}{r_0^8} \left[ r_0^2 (5x^2 + y^2) - 3R^2 d \right],$$

$$B_3 = -\frac{1}{r_0^6} \left[ r_0^2 (x\bar{m} + Rd) + xR^2 m \right],$$

$$B_4 = \frac{y}{r_0^6} \left[ r_0^2 (4x^2 + 2y^2 + xR) - R^2 m \right],$$

$$B_6 = -\bar{B}_6 = \frac{\Delta}{8ar_0^6} \left[ 0,5 x n \sqrt{\Delta} - 2y^2 Rm \right],$$

$$B_7 = -\bar{B}_7 = -\frac{y\sqrt{\Delta}}{8ar_0^6} \left[ 2xRn + 0,5 m \sqrt{\Delta} \right],$$

$$B_8 = -\bar{B}_8 = -K_9 = \bar{K}_9 = \frac{dR}{r_0^4},$$



$$B_9 = -\bar{B}_9 = K_9 = -\bar{K}_9 = -\frac{2xyR}{r_0^4},$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{8Rr_0^8} \left[ r_0^8 + 4x^2R^2r_0^2n + 3R^4(2d^2 - r_0^4) \right],$$

$$\bar{B}_2 = \bar{B}_5 = \frac{xyR}{r_0^8} \left[ 3R^2d - r_0^2n \right],$$

$$\bar{B}_3 = \frac{1}{r_0^8} \left[ (x+R)dr_0^2 + xRn \right],$$

$$\bar{B}_4 = \frac{y}{r_0^8} \left[ R^2n - xr_0^2(2x + R) \right]$$

$$K_1 = -\frac{xyR}{2r_0^8} \left[ 4x^2r_0^2 - 3R^2d \right],$$

$$\bar{K}_1 = -\frac{xyRd}{2r_0^8} \left[ 3R^2 - 2r_0^2 \right],$$

$$\bar{K}_2 = -\frac{1}{4Rr_0^8} \left[ 3R^4(6x^2y^2 - x^4 - y^4) - 2R^2r_0^2(6x^2y^2 - x^4 - y^4) - r_0^8 \right],$$

$$K_2 = \frac{1}{4Rr_0^8} \left[ 2R^2(3x^6 - y^6 - 3x^4y^2 - 7x^2y^4) + 3R^4(6x^2y^2 - x^4 - y^4) - 5r_0^8 \right],$$

$$K_3 = \frac{y}{r_0^8} \left[ 2r_0^2(2x^2 + y^2 + 2xR) - R^2n \right],$$

$$K_4 = \frac{1}{2r_0^8} \left[ r_0^2(2x\bar{m} + Rd) + 2xR^2n \right],$$

$$K_5 = \frac{1}{4Rr_0^8} \left[ 5r_0^8 + 2R^2r_0^2(3x^4 - y^4 - 6x^2y^2) + 3R^4(6x^2y^2 - x^4 - y^4) \right],$$

$$K_6 = -\bar{K}_6 = \frac{y}{2Rr_0^8} \left[ xR \left[ 16y^2R^2r_0^6 - 4r_0^{10} + 4R^4(3x^6 + x^4y^2 - 7x^2y^4 - 5y^6) - \right. \right. \\ \left. \left. - 8R^6dr_0^2 \right] - nr_0^{10} + R^2r_0^4(12x^4y^2 + 8x^2y^4 - 4y^6) + \right. \\ \left. + R^4(6x^8 + 6y^8 - 8x^6y^2 - 28x^4y - 8x^2y^6) + R^6(12x^4y^2 + \right. \\ \left. + 8x^2y^4 - 4y^6) + R^8(y^4 - 2x^2y^2 - 3x^4) \right],$$

$$K_7 = -\bar{K}_7 = -\frac{1}{8a^2 R r_0^6} \left\{ xRn\sqrt{\Delta} \left[ (r_0^2 + R^2)^2 - 4y^2 R^2 \right] - 4R^2 r_0^6 d + \right. \\ \left. + 8y^2 R^4 r_0^2 m - 16x^2 y^2 R^6 + 4R^6 d^2 \right\},$$

$$\bar{K}_3 = -\frac{y}{r_0} \left[ 2xr_0^2(x+R) - R^2 m \right],$$

$$\bar{K}_4 = -\frac{1}{2r_0^6} \left[ dr_0^2(2x+R) + 2xR^2 n \right],$$

$$\bar{K}_5 = -\frac{1}{4Rr_0^8} \left[ r_0^8 + R^2(6x^2 y^2 - x^4 - y^4)(3R^2 - 2r_0^2) \right],$$

$$B_1^* = 2K_2^* = -\frac{y^2}{2R^3},$$

$$B_2^* = \bar{B}_5^* = -2K_1^* = K_6^* = \frac{xy}{R^3},$$

$$B_3^* = -K_4^* = -\frac{x}{R^2},$$

$$B_4^* = K_3^* = \frac{y}{R^2},$$

$$\bar{B}_1^* = -\frac{x^2 y^2}{2R^5},$$

$$\bar{B}_2^* = \frac{xy(2x^2 - R^2)}{2R^5},$$

$$\bar{B}_3^* = \frac{(R-x)(2x^2 - R^2)}{2R^4},$$

$$\bar{B}_4^* = \frac{xy(2x-R)}{2R^4},$$

$$\bar{B}_6^* = -\bar{K}_5^* = \frac{y^2 - x^2}{2R^3},$$

$$\bar{K}_1^* = -\frac{x^3 y}{2R^5},$$

$$K_2^* = \frac{1}{4R^5} (4x^4 - R^4 - 2x^2 R^2),$$

$$K_3^* = \frac{y}{R^4} (x^2 - xR),$$

$$K_4^* = \frac{1}{4R^4} (4x^3 - 2xR^2 - 2x^2R + R^3).$$

Wzory (4.14) do (4.18) otrzymać można również bezpośrednio ze wzorów (4.4) do (4.8) stosując przejście graniczne przy  $x \rightarrow 0$  i  $y \rightarrow 0$ . Analogicznie otrzymać można wzory (4.29) do (4.33) ze wzorów (4.19) do (4.23). Natomiast wzory (4.9) do (4.13) można otrzymać bezpośrednio ze wzorów (4.4) do (4.8) stosując przejście graniczne przy  $x^2 + y^2 \rightarrow R^2$ . Analogicznie otrzymać można wzory (4.24) do (4.28) ze wzorów (4.19) do (4.23). Oznacza to, iż funkcje (4.9) do (4.18) (4.24) do (4.28) uciągają funkcje (4.4) do (4.8) ((4.19) do (4.23)) w punkcie  $O(0,0)$  oraz w punktach okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$  za wyjątkiem punktów, w których przyłożone jest obciążenie.

Wzory na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla obciążenia wg rys. 4.1c otrzymać możemy bezpośrednio ze wzorów (4.19) do (4.33) przez cykliczną zamianę zmiennych  $x$  i  $y$ .

W ten sam sposób dochodzi się ze wzorów (4.4) do (4.18) do rozwiązania dla przypadku obciążenia wg rys. 4.1d.

Przy korzystaniu z powyższych wzorów pamiętać należy o tym, że funkcja  $Q_5(x, y; R, \alpha_1, \alpha_2)$  jest osobliwa dla  $\alpha_1, \alpha_2 = \pi$ . Dla tych wartości  $\alpha_1, \alpha_2$  należy zatem za wartość funkcji przyjmować wartość graniczną przy  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \pi$  z prawej lub lewej strony.

## 5. Zakończenie

Rozpatrzmy na zakończenie dwa przypadki obciążenia tarczy nieograniczonej pokazane na rys. 5.1a i b. Dla obciążenia wg rys. 5.1a wzory na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia otrzymamy ze wzorów (4.19) do (4.23) podstawiając za  $\alpha_1 = 0$  i  $\alpha_2 = 2\pi$  i pamiętając o osobliwości funkcji  $Q_5$  w punkcie  $\alpha = \pi$ .

Otrzymamy:

$$1^0 \text{ dla } x^2 + y^2 > R^2$$

$$G_{xx} = \frac{p_0}{8hr_0^3} \left[ 2R^2 r_0^2 (3x^4 - y^4 - 6x^2 y^2) + 3R^4 (6x^2 y^2 - x^4 - y^4) + \right. \\ \left. + \nu (2R^2 r_0^2 - 3R^4) (x^4 + y^4 - 6x^2 y^2) \right],$$

$$G_{xy} = \frac{p_0 xyR^2}{2hr_0^3} \left[ r_0^2 \nu - 3R^2 d - \nu (r_0^2 \nu + 3R^2 d) \right],$$



$$\sigma_{yy} = \frac{P_0}{8hr_0^3} \left[ (3R^4 - 2R^2r_0^2)(x^4 + y^4 - 6x^2y^2) - \right. \\ \left. - \nu \left[ 3R^4(6x^2y^2 - x^4 - y^4) - 2R^2r_0^2(6x^2y^2 + x^4 - 3y^4) \right] \right],$$

$$u = \frac{P_0}{4hE} \left[ -(3-\nu)(1+\nu) \frac{xR^2}{r_0^2} + (1+\nu)^2 \frac{x}{2r_0^2} \left[ 4y^2r_0^2R^2 - R^4 \right] \right],$$

$$v = -\frac{P_0}{8hE} (1+\nu)^2 \frac{y}{r_0} (2R^2r_0^2d - R^4);$$

2° dla  $x^2 + y^2 < R^2$

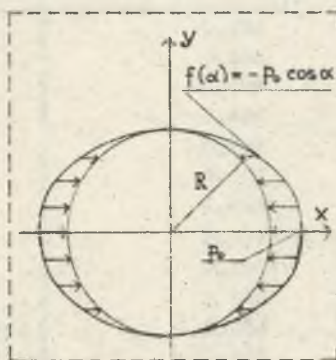
$$\sigma_{xx} = -\frac{P_0}{8h} (5+\nu),$$

$$\sigma_{xy} = 0,$$

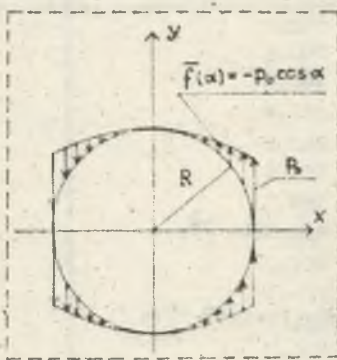
$$\sigma_{yy} = \frac{P_0}{8h} (1-3\nu),$$

$$u = -\frac{P_0}{8hE} (1+\nu)(5-3\nu)x, \quad v = \frac{P_0}{8hE} (1+\nu)^2 y.$$

a)



b)



Rys. 5.1

Wykres naprężeń  $\sigma_{xx}$  w przekroju  $y = 0$  pokazano na rys. 5.2a dla  $R = 10$  a wartości naprężeń  $\sigma_{xx}$  podano w tabelicy 5.1.

Dla obciążenia wg rys. 5.1b wzory opisujące stan naprężenia i przemieszczenia otrzymamy ze wzorów (4.4) do (4.8) podstawiając ze  $\alpha_1 = 0$   $\alpha_2 = 2\pi$ , dokonując cyklicznej zamiany zmiennych  $x$  i  $y$  oraz zmieniając znaki. W tym przypadku otrzymamy:

1° dla  $x^2 + y^2 > R^2$

$$\sigma_{xx} = \frac{P_0 xy R^2}{2hr_0^3} \left[ (3+\nu)y^2 r_0^2 - (1+3\nu)x^2 r_0^2 + 3(1+\nu)R^2 d \right],$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{P_0}{8hr_0^3} \left[ 2R^2 r_0^2 (6x^2 y^2 + x^4 - 3y^4) + 3R^4 (x^4 + y^4 - 6x^2 y^2) - \right. \\ \left. - \nu (2R^2 r_0^2 - 3R^4) (x^4 + y^4 - 6x^2 y^2) \right],$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{P_0 xy R^2}{2hr_0^3} \left[ r_0^2 (x^2 + 5y^2) + 3R^2 d + \nu (r_0^2 n + 3R^2 d) \right],$$

$$u = \frac{P_0}{8hE} (1+\nu)^2 \frac{y}{r_0} (2R^2 r_0^2 d - R^4 m),$$

$$v = \frac{P_0}{4hE} \left[ (3-\nu)(1+\nu) \frac{xR^2}{r_0} + (1+\nu)^2 \frac{x}{2r_0} (4y^2 R^2 r_0^2 - R^4 n) \right];$$

2° dla  $x^2 + y^2 < R^2$

$$\sigma_{xx} = 0,$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P_0}{8h} (3-\nu),$$

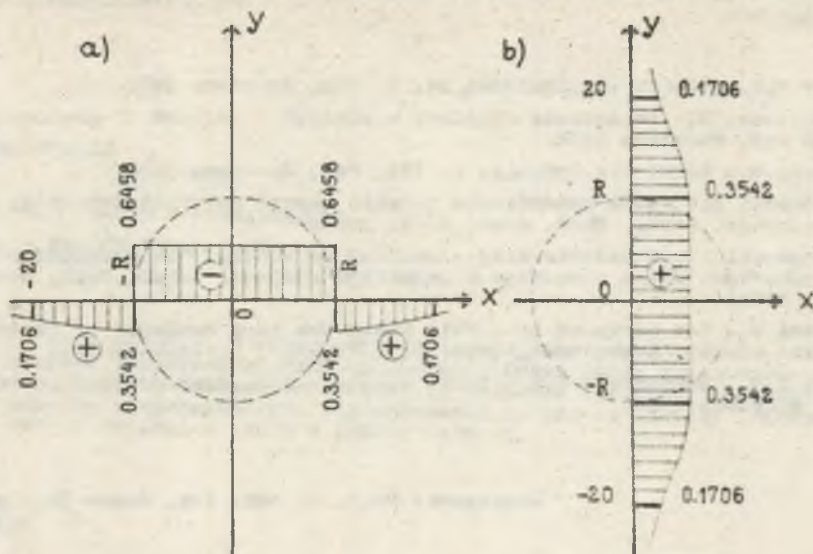
$$\sigma_{yy} = 0,$$

$$u = -\frac{P_0}{8hE} (1+\nu)^2 y,$$

$$v = \frac{P_0}{8hE} (1+\nu)(7-\nu)x.$$

Rysunek 5.2b przedstawia wykres naprężeń  $\sigma_{xy}$  dla przekroju  $x = 0$ . Wartości tych naprężeń podano w tabelicy 5.1.

Omówione w niniejszej pracy przypadki obciążenia tarczy nieograniczonej mogą stanowić podstawę dalszych rozważań. Biorąc za punkt wyjścia uzyskane wyniki, można otrzymać rozwiązanie tarczy nieograniczonej obciążonej, np. oddziaływaniem odcinka kabla sprężającego o trasie kołowej.



Rys. 5.2

Tablica 5.1

Rzędna punktu $y, x$	$G_{xx}$ dla obciążenia wg rys. 5.1a mnożnik $\frac{p_0}{h}$	$G_{xy}$ dla obciążenia wg rys. 5.1b mnożnik $\frac{p_0}{h}$
20	0.171	0.170
19	0.186	0.185
18	0.203	0.202
17	0.222	0.221
16	0.243	0.242
15	0.265	0.265
14	0.290	0.290
13	0.315	0.315
12	0.339	0.338
11	0.356	0.355
10,0001	0.354	0.354
9,9999	-0.646	0.354
9	-0.646	0.354
8	-0.646	0.354
7	-0.646	0.354
6	-0.646	0.354
5	-0.646	0.354
4	-0.646	0.354
3	-0.646	0.354
2	-0.646	0.354
1	-0.646	0.354
0	-0.646	0.354



## LITERATURA

- [1] Huber M.T.: Teoria sprężystości cz. I. PWN, Warszawa 1954.
- [2] Łukasiewicz S.: Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach. I PPN PAN, Warszawa 1976.
- [3] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. III. PWN, Warszawa 1966.
- [4] Sokołowski M.: Pewne zagadnienie płaskie teorii sprężystości ciała ortotropowego. Arch. Mech. Stos. 6, 1, 1954.
- [5] Szelegowski F.: Działanie siły skupionej na tarczę nieograniczoną za pośrednictwem pręta sztywnego o przekroju kołowym. Arch. Mech. Stos. 3, 2, 1951.
- [6] Nowacki W.: The stresses in a thin plate due to a nucleus of thermoelastic strain. Arch. Mech. Stos. 9, 1, 1957.
- [7] Rzyk I.M., Gradsztejn I.S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa 1964.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Roman Janiczek

## ИЗОТРОПНАЯ БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛАСТИНА С КОЛОЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ

## Р е з ю м е

В работе рассматривается изотропная бесконечная пластина. Нагрузка пластины распределена равномерно по дуге радиусом  $R$ . Для решения вопроса использовано функции Грина. Даны окончательные формулы для компонента тензора напряжений и для компонентов вектора перемещений в случае выделяющихся способов нагрузки.

## ISOTROPIC INFINITE DISC LOADED ALONG A CIRCULAR ARC

## S u m m a r y

An isotropic infinite disc is considered being loaded continuously on the circular interval of a radius  $R$ . Green function for the infinite disc is used to solve the problem. The results in the closed form are given for components of a stresses tensor and a displacement vector for four special cases of load are given.