ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: BUDOWNICTWO z. 59 Nr kol. 813

Jan FEDOROWICZ

IZOTROPOWA TARCZA NIEOGRANICZONA SPRĘŻONA KABLEM ZAKRZYWIONYM

Streszczenie. W pracy rozpatruje się izotropową tarczę nieograniczoną obciążoną oddziaływaniem sprężonego kabla zakrzywionego. Podano wzory w postaci zamkniętej na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla przypadku sprężenia tarczy nieograniczonej odcinkiem kabla o trasie kołowej.

1. Wstęp

W precy [2] rozpatrzono szczególne przypadki obciążenia izotropowej tarczy nieograniczonej, dla których podano w zamkniętej postaci wzory na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia.

W niniejszej pracy wykorzystano wyniki podane w [2] do zbudowania rozwiązania tarczy nieograniczonej obciążonej oddziaływaniem sprężonego odcinka kabla o trasie kołowej.

2. Założenia

Rozpatrzymy nieograniczoną tarczę izotropową o stałej grubości h, wykonaną z materiału liniowo sprężystego, której płaszczyzna środkowa sparametryzowana jest ortokartezjańskim układem współrzędnych. Obciążenie tarczy stanowi oddziaływanie odcinka kabla sprężającego o trasie kołowej.

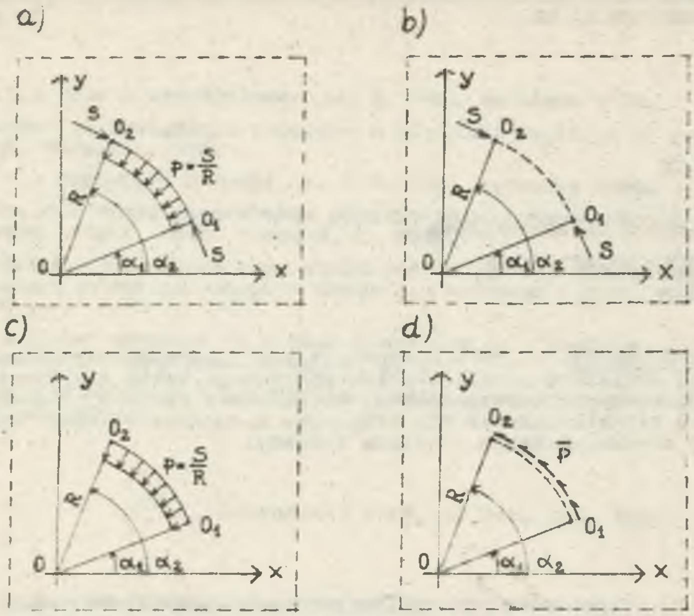
Promień trasy wynosi R, a środek okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych (rys. 2.1a).

Stan naprężenia i przemieszczenia wywołany powyższym obciążeniem określić można drogą superpozycji stanów dla dwóch przypadków obciążenia:

I) siłami skupionymi (rys. 2.1b) - odpowiednie naprężenia i przemieszczenia oznaczono przez σ^b_{xx}, σ^b_{xy}, σ^b_{yy}, u^b, v^b.

II) równomiernym naciskiem radialnym (rys. 2.1c) - naprężenia i przemieszczenia oznaczono przez σ^R_{xx}, σ^R_{xy}, σ^R_{yy}, u^R, v^R.

Dla oceny wpływu sił tarcia kabla o materiał tarczy rozpatrzono niezależnie przypadek obciążenia równomiernego $\bar{p}$ stycznego do trasy kabla (rys. 2.1d) - odpowiednie naprężenia i przemieszczenia oznaczono przez σ^S_{xx}, σ^S_{xy}, σ^S_{yy}, u^S, v^S.



Rys. 2.1

3. Rozwiązania składowe

3.1. Obciążenie siłami skupionymi

Stan naprężeń i przemieszczeń dla obciążenia wg rys. 2.1b otrzymamy drogą superpozycji stanów wywołanych siłą skupioną S, przyłożoną kolejno w punktach O_1 i O_2. Dokonując transformacji współrzędnych we wzorach na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla obciążenia siłą skupioną, przyłożoną w początku układu współrzędnych (rozwiązania podane, np. w [3], [4] a także [2] otrzymamy):

$$\sigma^{b}_{xx} = \frac{S}{4\pi h}\Big[(3+\nu)(a_1\sin\alpha_1 - b_1\sin\alpha_2) + (1-\nu)(a_3\cos\alpha_1 - b_3\cos\alpha_2) - 2(1+\nu)(a_4\cos\alpha_1 + a_2\sin\alpha_1 - b_4\cos\alpha_2 - b_2\sin\alpha_2)\Big], \qquad (3.1)$$

$$\sigma^{b}_{xy} = \frac{S}{4\pi h}\Big[(1-\nu)(a_3\sin\alpha_1 - a_1\cos\alpha_1 + b_1\cos\alpha_2 - b_3\sin\alpha_2) + 2(1+\nu)(a_4\sin\alpha_1 - a_2\cos\alpha_1 + b_2\cos\alpha_2 - b_4\sin\alpha_2)\Big], \qquad (3.2)$$

$$\sigma^{b}_{yy} = \frac{S}{4\pi h}\Big[(3+\nu)(b_3\cos\alpha_2 - a_3\cos\alpha_1) + (1-\nu)(b_1\sin\alpha_2 - a_1\sin\alpha_1) -$$

$$- 2(1+\nu)(b_4\cos\alpha_2 + b_2\sin\alpha_2 - a_4\cos\alpha_1 - a_2\sin\alpha_1)\Big], \tag{3.3}$$

$$u^{b} = \frac{S}{4\pi hE}\Big[(1+\nu)^2\Big(a_5\cos\alpha_1 - b_5\cos\alpha_2 + \frac{(y-\bar{y}_o)^2}{r_1^2}\sin\alpha_1 - \frac{(y-\bar{\bar{y}}_o)^2}{r_2^2}\sin\alpha_2\Big)$$

$$+ (3-\nu)(1+\nu)\Big(\sin\alpha_1 \ln\frac{r_1}{A} - \sin\alpha_2 \ln\frac{r_2}{A}\Big)\Big] - \tilde{u}^{b}(0,0), \tag{3.4}$$

$$v^{b} = \frac{S}{4\pi hE}\Big[(1+\nu)^2\Big(b_5\sin\alpha_2 - a_5\sin\alpha_1 + \frac{(x-\bar{\bar{x}}_o)^2}{r_2^2}\cos\alpha_2 - \frac{(x-\bar{x}_o)^2}{r_1^2}\cos\alpha_1\Big) +$$

$$+ (3-\nu)(1+\nu)\Big(\cos\alpha_2 \ln\frac{r_2}{A} - \cos\alpha_1 \ln\frac{r_1}{A}\Big)\Big] - \tilde{v}^{b}(0,0); \tag{3.5}$$

gdzie:

$\bar{x}_o = R\cos\alpha_1,$

$\bar{y}_o = R\sin\alpha_1,$

$\bar{\bar{x}}_o = R\cos\alpha_2,$

$\bar{\bar{y}}_o = R\sin\alpha_2,$

$r_1^2 = (x-\bar{x}_o)^2 + (y-\bar{y}_o)^2,$

$r_2^2 = (x-\bar{\bar{x}}_o)^2 + (y-\bar{\bar{y}}_o)^2,$

$$a_1 = \frac{x-\bar{x}_o}{r_1^2},$$

$$a_2 = \frac{(x-\bar{x}_o)(y-\bar{y}_o)^2}{r_1^4}$$

$$a_3 = \frac{y-\bar{y}_o}{r_1^2},$$

$$a_4 = \frac{(x-\bar{x}_o)^2(y-\bar{y}_o)}{r_1^4},$$

$$a_5 = \frac{(x-\bar{x}_o)(y-\bar{y}_o)}{r_1^2}$$

$$b_1 = \frac{x-\bar{\bar{x}}_o}{r_2^2},$$

$$b_2 = \frac{(x-\bar{\bar{x}}_o)(y-\bar{\bar{y}}_o)^2}{r_2^4}$$

$$b_3 = \frac{y-\bar{\bar{y}}_o}{r_2^2},$$

$$b_4 = \frac{(x-\bar{\bar{x}}_o)^2(y-\bar{\bar{y}}_o)}{r_2^4},$$

$$b_5 = \frac{(x-\bar{\bar{x}}_o)(y-\bar{\bar{y}}_o)}{r_2^2},$$

$$\vec{u}^b(0,0) = \frac{-pR(1+\nu)}{4\pi hE}\left[(3-\nu)(\ln\frac{R}{A} + 1 + \nu\right](\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$\vec{v}^b(0,0) = \frac{pR(1+\nu)}{4\pi hE}\left[(3-\nu)\ln\frac{R}{A} + 1 + \nu\right](\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1),$$

h - grubość tarczy,

E,ν - stałe materiałowe trarczy,

A - rzędna punktów $(0,\pm A)$, dla których przyjęto, że $u(0,\pm A) = 0$.

3.2. Obciążenie radialne i styczne

Obciążenie radialne wg rys. 2.1c otrzymać możemy jako sumę dwóch obciążeń:

poziomego rozłożonego wg funkcji $p_x = -p\cos\alpha$
i pionowego rozłożonego wg funkcji $p_y = -p\sin\alpha$.

Dla przypadku obciążenie poziomego $p_x = -p\cos\alpha$ rozwiązanie podano w pracy [2] (wzory (4.19) do (4.33)).

Wzory na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla obciążenia działającego pionowo wg funkcji $p_1 = -p\sin\alpha$ otrzymamy z wyżej wymienionych wzorów, dokonując cyklicznej zamiany zmiennych. W sposób analogiczny obciążenie styczne wg rys. 2.1d, uważać można za sumę obciążenia poziomego $\bar{p}_x = -\bar{p}\sin\alpha$ i pionowego $\bar{p}_y = \bar{p}\cos\alpha$. Rozwiązanie tarczy dla obciązenia poziomego $\bar{p}_x = -\bar{p}\sin\alpha$ podano w pracy [2] (wzory (4.4) do (4.18)), a dla obciążenia $\bar{p}_y = \bar{p}\cos\alpha$ otrzymamy je, dokonując w wymienionych wzorach cyklicznej zamiany zmiennych.

Pomijając kolejne przekształcenia poniżej przedstawiono wyniki końcowe przeprowadzonej superpozycji.

Wprowadźmy oznaczenia pomocnicze:

$$r_o^2 = x^2 + y^2,$$

$$d = x^2 - y^2,$$

$$\Delta = 4(x^2+y^2-R^2)^2,$$

$$a = x^2 + y^2 + R^2 + 2xR,$$

$$m = x^2 + y^2 + R^2,$$

$$c = x^2 + y^2 + R^2 - 2xR,$$

$$q_2 = Q_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1,$$

$$Q_2 = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{a\sin\frac{\alpha_2}{2} - 2yR\cos\frac{\alpha_2}{2}}{\cos\frac{\alpha_2}{2}(x^2+y^2-R^2)} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{a\sin\frac{\alpha_1}{2} - 2yR\cos\frac{\alpha_1}{2}}{\cos\frac{\alpha_1}{2}(x^2+y^2-R^2)}$$

$$Q_3 = \ln\frac{r_1}{r_2},$$

$$q_3 = Q_4 = \cos^2\frac{\alpha_2}{2} - \cos^2\frac{\alpha_1}{2},$$

$$q_4 = Q_5 = 0.5(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

$$Q_6 = \frac{\cos^2\frac{\alpha_2}{2}}{r_2^2} - \frac{\cos^2\frac{\alpha_1}{2}}{r_1^2},$$

$$Q_7 = \frac{\sin\alpha_2}{2r_2^2} - \frac{\sin\alpha_1}{2r_1^2},$$

$$q_1 = \ln\frac{a\sin\alpha_1 - 4yR\cos^2\frac{\alpha_1}{2}}{a\sin\alpha_2 - 4yR\cos^2\frac{\alpha_2}{2}}.$$

W przypadku obciążenia radialnego (rys. 2.1c) otrzymamy:

1^o dla punktów płaszczyzny spełniających warunki $x^2 + y^2 \neq R^2$ i $x^2 + y^2 \neq 0$:

$$\sigma_{xx}^R = \frac{pR}{4\pi h}\sum_1^7 Q_i K_i^*, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{xy}^R = \frac{pR}{4\pi h}\sum_1^7 Q_i L_i^*, \tag{3.7}$$

$$\sigma_{yy}^R = \frac{pR}{4\pi h}\sum_1^7 Q_i M_i^*, \tag{3.8}$$

$$u^R = \frac{pR}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ln A + \sin\alpha_2\ln r_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin\alpha_1\ln r_1 + \sum_1^5 Q_i N_i^*\right] + (1+\nu)^2\sum_1^5 Q_i\bar{N}_i^*\right\} - \bar{u}^R(o,o). \qquad (3.9)$$

$$v^R = \frac{pR}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\ln A-\cos\alpha_2\ln r_2+\cos\alpha_1\ln r_1 + \right.\right.$$

$$+\sum_1^4 Q_i T_i^* + (1+\nu)^2\sum_1^4 Q_i\bar{T}_i^* - \bar{v}^R(o,o); \qquad (3.10)$$

2° dla punktów okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ za wyjątkiem punktów przyłożenia obciążenia (łuk okręgu zawarty między promieniami o nachyleniu α_1, α_2):

$$6^R_{xx} = \frac{pR}{4\pi h}\left[(1-\nu)\sum_1^2 K_i q_i + (3-\nu)\sum_3^4 \bar{K}_i q_i - 2q_2\right], \qquad (3.11)$$

$$6^R_{xy} = \frac{pR}{4\pi h}\left[(1-\nu)\sum_1^2 L_i q_i + (3-\nu)\sum_3^4 \bar{L}_i q_i\right], \qquad (3.12)$$

$$6^R_{yy} = \frac{pR}{4\pi h}\left[(1-\nu)\sum_1^2 M_i q_i + (3-\nu)\sum_3^4 M_i q_i - 2\nu q_2\right], \qquad (3.13)$$

$$u^R = \frac{pR}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ln A + \sin\alpha_2\ln r_2 - \sin\alpha_1\ln r_1\right.\right.$$

$$\left.\left. + N_3 q_1\right] - 2(1+\nu)^2(\bar{N}_2 q_2 + q_4)\right\} - \bar{u}^R(o,o), \qquad (3.14)$$

$$v^R = \frac{pR}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\ln A - \cos\alpha_2\ln r_2 + \cos\alpha_1\ln r_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_1^3 T_i q_i\right] + (1+\nu)^2\sum_2^3 \bar{T}_i q_i\right\} - \bar{v}^R(o,o); \qquad (3.15)$$

3° dla punktu O(o,o)

$$6^R_{xx} = -\frac{p}{4\pi h}\left[(1+\nu)(\alpha_2-\alpha_1) + \sin2\alpha_2-\sin2\alpha_1\right], \qquad (3.16)$$

$$6^R_{xy} = \frac{p}{8\pi h}\left[(1+\nu)(\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_1) - (3-\nu)(\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1)\right], \qquad (3.17)$$

$$\sigma^R_{yy} = \frac{-p}{4\pi h}\left[(1+\nu)(\alpha_2-\alpha_1) - \sin 2\alpha_2+\sin 2\alpha_1\right], \tag{3.18}$$

$$u^R = v^R = 0; \tag{3.19}$$

gdzie:

$$\overset{*}{u}{}^R(o,o) = \frac{pR}{4\pi hE}(3-\nu)(1+\nu)(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\ln\frac{R}{A},$$

$$\overset{*}{v}{}^R(o,o) = \frac{-pR}{4\pi hE}(3-\nu)(1+\nu)(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\ln\frac{R}{A}.$$

W przypadku obciążenia stycznego (rys. 2.1d) otrzymamy:

1^o dla punktów płaszczyzny spełniających warunki

$$x^2 + y^2 \neq R^2 \quad i \quad x^2 + y^2 \neq 0:$$

$$\sigma^S_{xx} = \frac{\bar{p}R}{4\pi h}\sum_{1}^{7} B^*_i Q_i, \tag{3.20}$$

$$\sigma^S_{xy} = -\frac{\bar{p}P}{4\pi h}\sum_{1}^{7} C^*_i Q_i, \tag{3.21}$$

$$\sigma^S_{yy} = -\frac{\bar{p}R}{4\pi h}\sum_{1}^{7} D^*_i Q_i, \tag{3.22}$$

$$u^S = \frac{\bar{p}R}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\ln A - \cos\alpha_2\ln r_2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos\alpha_1\ln r_1\right] + 4(1+\nu)\sum_{1}^{3} G^*_i Q_i\right\} - \overset{*}{u}{}^S(o,o), \tag{3.23}$$

$$v^S = -\frac{\bar{p}R}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ln A + \sin\alpha_2\ln r_2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sin\alpha_1\ln r_1\right] + 4(1+\nu)\sum_{1}^{3} H^*_i Q_i\right\} - \overset{*}{v}{}^S(o,o); \tag{3.24}$$

2^o dla punktów okręgu $x^2 + y^2 = R^2$, za wyjątkiem punktów przyłożenia obciążenia:

$$\sigma^S_{xx} = \frac{\bar{p}R}{4\pi h}\left[\sum_{y}^{4} B_i q_i - \frac{\nu}{2R}\, q_1 - 2(1+\nu)\sum_{3}^{4}\bar{B}_i q_i\right], \tag{3.25}$$

$$\sigma^S_{xy} = -\frac{\bar{p}R}{4\pi h}\left[(1-\nu)\sum_{1}^{4} C_i q_i + 2(1+\nu)\sum_{1}^{4}\bar{C}_i q_i\right]. \tag{3.26}$$

$$\sigma^S_{yy} = -\frac{\bar{p}R}{4\pi h}\left[\sum_1^4 D_i q_i + \frac{\nu}{2R} q_1 - 2(1+\nu)\sum_1^4 \bar{D}_i q_i\right], \tag{3.27}$$

$$u^S = \frac{\bar{p}R}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\ln A - \cos\alpha_2 \ln r_2 + \cos\alpha_1 \ln r_1 + \sum_1^3 G_i q_i\right] + (1+\nu)^2\sum_2^3 \bar{G}_i q_i\right\} - \tilde{u}^S(o,o), \tag{3.28}$$

$$v^S = \frac{\bar{p}R}{4\pi hE}\left\{(3-\nu)(1+\nu)\left[(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\ln A + \sin\alpha_2 \ln r_2 - \sin\alpha_1 \ln r_1 + \sum_1^4 H_i q_i\right] + (1+\nu)^2\sum_2^4 \bar{H}_i q_i\right\} - \tilde{v}^S(o,o), \tag{3.29}$$

3^o dla punktu $O(o,o)$

$$\sigma^S_{xx} = \frac{-\bar{p}}{4\pi h}\left[2(\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1) + (1+\nu)(\cos^4\alpha_2-\cos^4\alpha_1)\right], \tag{3.30}$$

$$\sigma^S_{xy} = \frac{\bar{p}}{8\pi h}(1-\nu)(\sin 2\alpha_2-\sin 2\alpha_1); \tag{3.21}$$

$$\sigma^S_{yy} = \frac{\bar{p}}{8\pi h}\left[(3-\nu)(\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1) + (1+\nu)(\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_1)\right], \tag{3.32}$$

$$u^S = v^S = 0; \tag{3.33}$$

gdzie:

$$\tilde{u}^S(o,o) = -\frac{\bar{p}R}{4\pi hE}(1+\nu)\left[(3-\nu)\ln\frac{R}{A} + 1 + \nu\right](\cos\alpha_2-\cos\alpha_1),$$

$$\tilde{v}^S(o,o) = -\frac{\bar{p}R}{4\pi hE}(1+\nu)\left[(3-\nu)\ln\frac{R}{A} + 1 + \nu\right](\sin\alpha_2-\sin\alpha_1).$$

Gdzie we wzorach (3.6) do (3.25) oznaczono:

$$B_1^* = B_2^* = D_1^* = D_2^* = -2C_3^* = -\frac{4K_3^*}{(1-\nu)} = -\frac{4M_3^*}{(1-\nu)} = \frac{2L_1^*}{(1-\nu)} = \frac{2L_2^*}{(1-\nu)} = \frac{4xyR}{r_o^4},$$

$$B_3^* = \frac{1}{Rr_o^4}(2R^2 d - r_o^4) - \frac{\nu}{2R}.$$

$$B_4^* = D_4^* = -C_5^* = -K_5^* = 2M_5^* = L_4^* = -(3-\nu)\,\frac{x}{r_o^2},$$

$$B_5^* = D_5^* = C_4^* = K_4^* = -M_4^* = L_5^* = (3-\nu)\,\frac{y}{r_o^2},$$

$$B_6^* = D_6^* = -L_6^* = \frac{1}{2ar_o^2}\,(1+\nu)x\sqrt{\Delta}(3y^2-x^2+R^2),$$

$$B_7^* = D_7^* = -L_7^* = \frac{1}{2ar_o^2}\,(1+\nu)y\sqrt{\Delta}(3x^2-y^2+R^2\ +4xR),$$

$$D_3^* = \frac{1}{2Rr_o^4}\,(2dR^2 + r_o^4) + \frac{\nu}{2R},$$

$$C_1^* = C_2^* = \frac{4L_3^*}{(1-\nu)} = \frac{2dR}{r_o^4},$$

$$C_6^* = -K_6^* = M_6^* = \frac{1}{2ar_o^2}\,(1+\nu)y\sqrt{\Delta}(3x^2-y^2-R^2),$$

$$C_7^* = -K_7^* = M_7^* = \frac{1}{2ar_o^2}\,\sqrt{\Delta}(3xy^2-x^3-xR^2-2Rd)(1+\nu),$$

$$G_1^* = -4N_3^* = -2T_1^* = -2\bar{T}_1^* = \frac{-ym}{Rr_o^2},$$

$$G_2^* = 4\bar{N}_3^* = 2T_2^* = -\bar{T}_2^* = \frac{y\sqrt{\Delta}}{2Rr_o^2},$$

$$G_3^* = -\frac{xR}{2r_o^2},$$

$$H_1^* = 2N_1^* = -2\bar{N}_1^* = 4T_3^* = -\frac{xm}{Rr_o^2}$$

$$H_2^* = N_2^* = -\bar{N}_2^* = -4\bar{T}_3^* = \frac{x\sqrt{\Delta}}{2Rr_o^2},$$

$$H_3^* = \frac{yR}{2r_o^2}$$

$$K_1^* = -M_2^* = \frac{1}{r_o^4}\,(1-\nu)Rd - \frac{1+\nu}{R},$$

$$M_1^* = -K_2^* = \frac{-1}{r_o^4}\,(1-\nu)Rd - \frac{1+\nu}{R},$$

$$B_1 = \frac{1}{2R^3}\,(4x^2 - 3R^2),$$

$$B_2 = 4C_1 = 8\bar{C}_1 = D_2 = -4K_1 = 4M_1 = 2L_2 = \frac{4xy}{R^3},$$

$$B_3 = 8\bar{B}_3 = 2C_4 = 8\bar{C}_4 = D_3 = 8\bar{D}_3 = -4\bar{K}_4 = 4\bar{M}_4 = 4\bar{L}_3 = -\frac{4x}{R^2},$$

$$B_4 = 8\bar{B}_4 = -2C_3 = -8\bar{C}_3 = D_4 = 8\bar{D}_4 = 4\bar{K}_3 = -4\bar{M}_3 = 4\bar{L}_4 = \frac{4y}{R^2},$$

$$C_2 = 2\bar{C}_2 = -\frac{2L_1}{(1-\nu)} = \frac{1}{R^3}(y^2-x^2),$$

$$D_1 = \frac{1}{2R^3}(4x^2-R^2),$$

$$G_1 = 0.5H_2 = 0.5\bar{H}_2 = -0.5\bar{N}_2 = T_1 = -\frac{x}{2R},$$

$$G_2 = \bar{G}_2 = -2H_1 = -2D_3 = T_2 = -\bar{T}_2 = -\frac{y}{R},$$

$$G_3 = -\bar{G}_3 = H_4 = \bar{H}_4 = T_3 = -\bar{T}_3 = -N_5^* = \bar{N}_5^* = T_4^* = -\bar{T}_4^* = 1,$$

$$H_3 = \bar{H}_3 = N_4^* = \bar{N}_4^* = 0,$$

$$K_2 = -M_2 = \frac{2x^2}{R^3}.$$

Wzory (3.11) do (3.15) ((3.25) do (3.29)) otrzymać można bezpośrednio ze wzorów (3.6) do (3.10) ((3.20) do (3.24)) stosując przejście graniczne przy $x^2 + y^2 \to R$.

W podobny sposób, stosując przejście graniczne przy $x \to o$ i $y \to o$ do wzorów (3.6) do (3.10), ((3.20 do (3.24)) otrzymać można wzory (3.16) do (3.19) ((3.30) do (3.33)). Oznacza to, iż funkcje (3.11) do (3.19)((3.25) do (3.33)) uciąglają funkcje (3.6) do (3.10) ((3.20) do (3.24)) w punkcie O(o,o) oraz w punktach okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ za wyjątkiem punktów, w których przyłożone jest obciążenie.

Korzystając z otrzymanych powyżej wyników pamiętać należy o tym, że funkcja $Q_2(x,y;R\alpha_1,\alpha_2)$ jest osobliwa dla $\alpha_1, \alpha_2 = \pi$. W punkcie tym należy zatem za wartość funkcji przyjmować jej wartość graniczną przy $\alpha_1, \alpha_2 \to \pi$ z prawej lub lewej strony.

Przyjmując we wzorach (3.6) do (3.8), że obciążenie rozłożone jest wzdłuż całego okręgu ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$) otrzymamy:

1° dla $x^2 + y^2 < R^2$

$$\sigma_{xx}^R = +\sigma_{yy}^R = \frac{-1}{2h}(1+\nu)p,$$

$$\sigma_{xy}^R = 0,$$

$$u^R = -\frac{p}{2hE}(1-\nu^2)x,$$

$$v^R = -\frac{p}{2hE}(1-\nu^2)y;$$

2^o dla $x^2 + y^2 > R^2$

$$\sigma^R_{xx} = -\sigma^R_{yy} = \frac{1}{2r_o^4 h}(1-\nu)pR^2 d,$$

$$\sigma^R_{xy} = \frac{1}{hr_o^4}(1-\nu)pR^2 xy.$$

$$u^R = -\frac{p}{2hE}(1-\nu^2)\frac{R^2 x}{r_o^2}; \quad v^R = -\frac{p}{2hE}(1-\nu^2)\frac{R^2 y}{r_o^2};$$

a więc wyrażenia identyczne, jakie otrzymał F. ANDERMANN w pracy [1].

Suma rozwiązań dla obciążeń wg rys. 2.1b i c (wzory (3.1) do (3.19)) daje wyrażenia na składowe tensora naprężenia i wektora przemieszczenia dla tarczy sprężonej odcinkiem kołowym kabla:

$$\sigma_{xx} = \sigma^b_{xx} + \sigma^R_{xx}, \tag{3.34}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma^b_{xy} + \sigma^R_{xy}, \tag{3.35}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma^b_{yy} + \sigma^R_{yy}, \tag{3.36}$$

$$u = u^b + u^R, \tag{3.37}$$

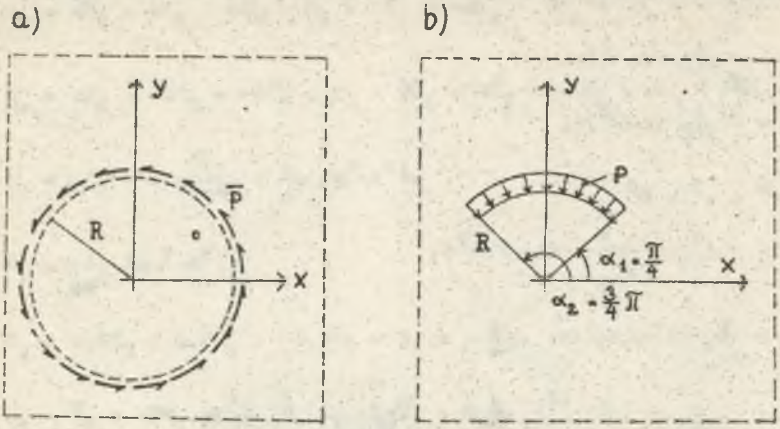
$$v = v^b + v^R. \tag{3.38}$$

Wzory (3.20) do (3.33) otrzymane dla obciążenia stycznego do osi kabla pozwalają uwzględnić wpływ tarcia kabla o materiał tarczy na stan naprężenia w tarczy nieograniczonej.

4. Zakończenie

Rozpatrzmy na zakończenie dwa przypadki obciążenia tarczy nieograniczonej pokazane na rys. 4.1a i b.

Dla obciążenia wg rys. 4.1a wzory opisujące stan naprężeń i przemieszczeń otrzymamy ze wzorów (3.20) do (3.24), podstawiając za $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 2\pi$ i uwzględniając osobliwość funkcji Q_2 w punkcie $\alpha = \pi$



Rys. 4.1

Otrzymamy:

1^o dla $x^2 + y^2 > R^2$

$$-\sigma^S_{yy} = \sigma^S_{xx} = \frac{2\bar{p}R^2 xy}{hr_o^4},$$

$$\sigma^S_{xy} = -\frac{\bar{p}R^2 d}{hr_o^4},$$

$$u^S = -\frac{\bar{p}}{hE}(1+\nu)\frac{y}{r_o^2},$$

$$v^S = \frac{\bar{p}}{hE}(1+\nu)\frac{x}{r_o^2};$$

2^o dla $x^2 + y^2 < R^2$

$$\sigma^S_{xx} = \sigma^S_{xy} = \sigma^S_{yy} = 0,$$

$$u^S = -\frac{\bar{p}}{hE}(1+\nu)y,$$

$$v^S = \frac{\bar{p}}{hE}(1+\nu)x.$$

We współrzędnych biegunowych wzory na naprężenia przyjmę postać:

1^o dla $x^2 + y^2 > R^2$

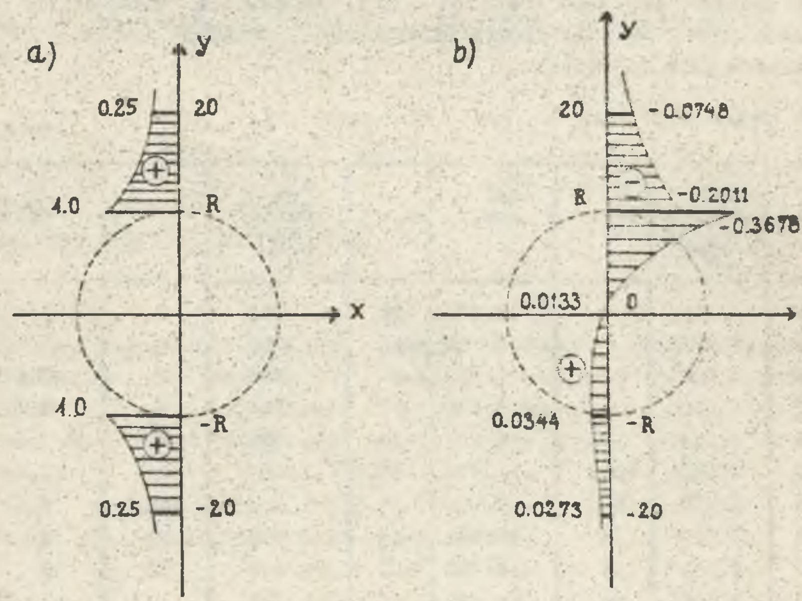
$$\sigma^S_{r_o r_o} = \sigma^S_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$\sigma_{r_o\varphi} = -\frac{pR^2}{hr_o^2},$$

2^o dla $x^2 + y^2 < R^2$

$$\sigma^S_{r_o r_o} = \sigma^S_{r_o\varphi} = \sigma^S_{\varphi\varphi} = 0.$$

Na rys. 4.2a pokazano wykres naprężeń σ^S_{xy} w przekroju x = 0, a w tablicy 4.1 podano wartości tych naprężeń.



Rys. 4.2

Tablica 4.1

$\varepsilon = 1.0_{10}-5$

y_i	σ^S_{xy} mnożnik $\frac{p}{h}$	y_i	σ^S_{xy} mnożnik $\frac{p}{h}$
-20	0.250	-(10-ε)	0.000
-19	0.277	-9	0.000
-18	0.309	-8	0.000
-17	0.346	-7	0.000
-16	0.391	-6	0.000
-15	0.444	-5	0.000
-14	0.510	-4	0.000
-13	0.592	-3	0.000
-12	0.694	-2	0.000
-11	0.826	-1	0.000
-(10+)	1.000	0	0.000

Dla obciążenia wg rys. 4.1b wzory na naprężenia i przemieszczenia są identyczne jak wzory (3.6) do (3.19) dla $\alpha_1 = 0.25\pi$ i $\alpha_2 = 0.75\pi$.

W tablicy 4.2 podano wartości naprężeń σ^R_{xx}, σ^R_{yy} dla tego przypadku obciążenia w przekroju leżącym w osi symetrii. Wykres naprężeń σ^R_{xx} w przekroju x = 0 pokazano na rys. 4.2b.

Do obliczeń przyjęto $\nu = \frac{1}{6}$, R = 10 m. Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej ODRA-1204, dla której opracowano odpowiednie programy na podstawie wzorów (3.6) do (3.33).

Tablica 4.2

y_i	σ^R_{xx} mnożnik $\frac{p}{100\,h}$	y_i	σ^R_{xx} c.d.	y_i	σ^R_{yy} mnożnik $\frac{p}{10\,h}$	y_i	σ^R_{yy} c.d.
-20	2.728	5	-11.073	-20	-1.221	5	-3.667
-19	2.796	6	-15.859	-19	-1.263	6	-3.689
-18	2.867	7	-21.204	-18	-1.307	7	-3.675
-17	2.936	8	-26.729	-17	-1.354	8	-3.545
-16	3.013	9	-32.025	-16	-1.405	9	-3.619
-15	3.088	10-ε	-36.776	-15	-1.460	10-ε	-3.614
-14	3.163	10+ε	-20.109	-14	-1.518	10+ε	6.365
-13	3.238	11	-16.926	-13	-1.581	11	5.642
-12	3.311	12	-14.757	-12	-1.649	12	5.048
-11	3.380	13	-13.160	-11	-1.723	13	4.558
-10	3.443	14	-11.967	-10	-1.802	14	4.145
- 9	3.495	15	-10.875	- 9	-1.888	15	3.792
- 8	3.532	16	-10.000	- 8	-1.982	16	3.487
- 7	3.546	17	- 9.243	- 7	-2.083	17	3.222
- 6	3.527	18	- 8.581	- 6	-2.194	18	2.990
- 5	3.460	19	- 7.996	- 5	-2.313	19	2.786
- 4	3.326	20	- 7.476	- 4	-2.443	20	2.606
- 3	3.095			- 3	-2.582		
- 2	2.727			- 2	-2.731		
- 1	2.165			- 1	-2.888	$\varepsilon = 1.0_{10}{}^{-5}$	
0	1.332			0	-3.040		
1	0.125			1	-3.211		
2	-1.583			2	-3.364		
3	-3.440			3	-3.499		
4	-7.079			4	-3.603		

Omówione w niniejszej pracy przypadki obciążenia tarczy nieorganiczonej stanowić mogą podstawę do rozwiązania problemu rozkładu naprężeń i przemieszczeń w belce-ścianie obciążonej oddziaływaniem sprężającego kabla zakrzywionego.

LITERATURA

[1] Andermann F.: Tarcze prostokątne - obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1966.

[2] Fedorowicz J.: Izotropowa tarcza nieograniczona obciążona wzdłuż łuku kołowego. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Budownictwo z. 59, 1983.

[3] Łukasiewicz S.: Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach. I PPN PAN, Warszawa 1976.

[4] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. III. PWN, Warszawa 1966.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Roman Janiczek

ИЗОТРОПНАЯ БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛАСТИНА ПОД НАГРУЗКОЙ ЗАКРУЧЕННОГО КАБЕЛЯ

Р е з ю м е

В работе рассматривается изотропная бесконечная пластина, подвержена действию напряженного закрученного кабеля. Приведены окончательные формулы для компонентов тензора напряжений и вектора перемещения в случае напряжения бесконечной пластины отрезком кабеля кольцевой формы.

ISOTROPIC DISC PRESTRESSED BY A CURVED CABLE

S u m m a r y

An isotropic infinite disc loaded by a prestressed curved cable is considered. The results in the closed form are presented in the case of an infinite disc prestressed by a curved cable.