

Maciej SIWCZYŃSKI

Wyższa Szkoła Inżynierska
Zielona Góra

SYNTEZA NIELINIOWYCH WYMIERNYCH UKŁADÓW AUTONOMICZNYCH

Streszczenie. W artykule wprowadzono pojęcie równania różniczkowego wymiernego. Jest to równanie różniczkowe w \mathbb{R}^n , którego prawą stroną jest wielowymiarowa funkcja wymierna. Wykazano, że półgrupa wymiernych transformacji współrzędnych przekształca zbiór równań wymiernych w siebie, a każde równanie wymierne jest realizowane za pomocą integratorów, sumatorów i układów mnożących. Twierdzenie to zastosowano do syntezy dwuwymiarowego układu autonomicznego realizującego z dowolną dokładnością zadany gładki cykl graniczny. Podano też metodę syntezy równania wymiernego, którego rozwiązanie spełniają wymierne warunki nieholonomiczne. Zamieszczony przykład nadaje się do syntezy przestrajanych generatorów drgań.

1. Równania różniczkowe wymierne

Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$ oznacza wektor w \mathbb{R}^n , a $p = (p_1, \dots, p_n)$ będzie multiindeksem o całkowitych, nieujemnych składowych p_1, \dots, p_n .

Suma skończonej liczby składników

$$a(x) = \sum_p a_p x^p = \sum_{p_1} \dots \sum_{p_n} a_{p_1 \dots p_n} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$$

jest wielomianem n -zmiennych. Z wyrażenia

$$ab(x) \triangleq \sum_p a_p x^p \sum_q b_q x^q = \sum_p c_p x^p,$$

gdzie

$$c_p = \sum_q a_{p-q} b_q,$$

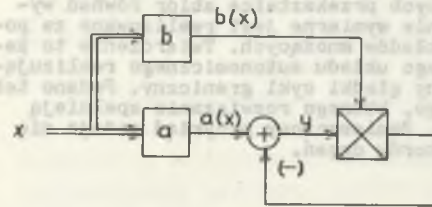
wynika, że iloczyn wielomianów jest wielomianem o współczynnikach danych splotem. Iloraz wielomianów

$$a/b(x) \hat{=} \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{\sum_p a_p x^p}{\sum_p b_p x^p}$$

jest funkcją wymierną wielu zmiennych.

Kombinacje, iloczyn i iloraz funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi, zatem zbiór funkcji wymiernych tworzy ciało. Wynika stąd, że złożenie funkcji wymiernych jest funkcją wymierną.

Macierz o elementach wymiernych będzie dalej nazywana krótko macierzą wymierną. Kombinacja, iloczyn i odwrotna macierzy wymiernych są macierzami wymiernymi.



Rys. 1. Blok realizacji wielowymiarowej funkcji wymiernej

Fig. 1. The block realising multidimensional rational function

Funkcja wymierna jest realizowalna za pomocą sumatorów i układów mnożących. Aby udowodnić to twierdzenie, trzeba wykazać, że istnieje układ sumująco-mnożący realizujący funkcję wymierną. Dowolny wielomian jest realizowany za pomocą sumatorów i układów mnożących. Na rys. 1 pokazano układ złożony z dwóch bloków realizujących wielomiany a , b , z układu mnożącego i węzła sumacyjnego.

Z analizy schematu wynika równanie wiążące multisygnał wejściowy $x = (x_1, \dots, x_n)$ z sygnałem wyjściowym y : $[1 + b(x)]y = a(x)$. Zatem układ ten realizuje funkcję wymierną $a/(1+b)(x)$.

Z wyrażień

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = \sum_p p_1 a_p x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n}$$

$$\frac{\partial a/b}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial a}{\partial x_1} b(x) - a \frac{\partial b}{\partial x_1}(x)}{[b(x)]^2} = c/d(x)$$

wynika, że pochodna cząstkowa wielomianu jest wielomianem, a pochodna cząstkowa funkcji wymiernej jest funkcją wymierną. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją wymierną, to jej gradient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

jest wektorem wymiernym. Jeżeli

$$F(x) = [F_1(x), \dots, F_m(x)]$$

jest wektorem wymiernym, to jacobian

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

jest macierzą wymierną.

Równaniem różniczkowym wymiernym nazwiemy równanie w R^n z wymierną prawą stroną:

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

gdzie

$$F(x) = [a_1/b_1(x), \dots, a_n/b_n(x)].$$

Nietrudno wykazać, że wymierna zamiana zmiennych

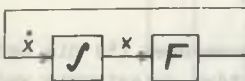
$$x = \phi(y) = [\alpha_1/\beta_1(y), \dots, \alpha_n/\beta_n(y)] \tag{2}$$

transformuje równanie różniczkowe wymierne w równanie różniczkowe wymierne. Istotnie działając transformacją (2) na równanie (1) otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\dot{y} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]^{-1} F[\phi(y)], \tag{3}$$

które na podstawie poprzednio wyprowadzonych twierdzeń o funkcjach wymiernych posiada wymierną prawą stronę.

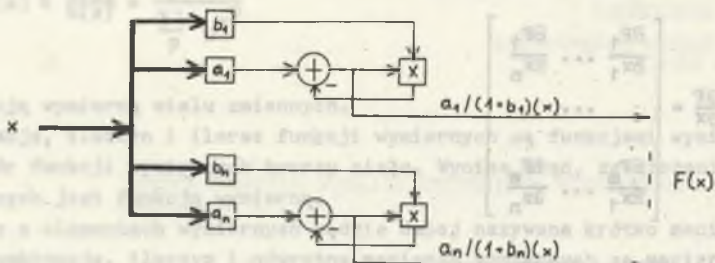
Powyższy rezultat można sformułować za pomocą następującego twierdzenia: Półgrupa wymiernych transformacji zmiennych przekształca zbiór równań różniczkowych wymiernych w siebie.



Rys. 2. Układ realizacji wymiernego równania różniczkowego

Fig. 2. The system realizing rational differential

Twierdzenie to ma istotne znaczenie podczas syntezy układów różniczkowych. Każdy taki układ jest realizowany w strukturze widocznej na rys. 2, w której blok wektor - funkcji wymiernej F utworzony jest poprzez multiplikację n -układów pokazanych na rys. 1. Strukturę takiego bloku ilustruje rys. 3.



Rys. 3. Blok realizacji wielowymiarowej wektorowej funkcji wymiernej
Fig. 3. The block realising multidimensional rational vector - function

2. Synteza układu wymiernego z pomocniczym wektorem sterowania

Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x} = F(x, u), \quad (4)$$

gdzie: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją wymierną od x, u . Zadaniem syntezy jest wybór wektora sterowania u w taki sposób, aby rozwiązania równania (4) spełniały warunek:

$$Q(x, \dot{x}) = 0, \quad \text{dla } t \in (0, \infty), \quad (5)$$

gdzie: $Q: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją wymierną.

Wykażemy, że postawione zadanie jest z pewną dokładnością realizowane w klasie różniczkowych równań wymiernych. Poszukujemy w tym celu wektora sterowania u , który zapewni spełnienie warunku

$$Q(x, \dot{x}) = \delta, \quad (6)$$

gdzie $\delta \in \mathbb{R}^m$ oraz $\|\delta(t)\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$. Tym samym warunek (5) nie będzie spełniony dokładnie, lecz z pewnym małym błędem δ , który zmienia się według równania różniczkowego liniowego

$$\dot{\delta} = T\delta, \quad (7)$$

gdzie T jest $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ - macierzą o wartościach własnych leżących poza prawą domkniętą półpłaszczyzną. Wstawiając równość (6) do równania (7) otrzymuje się:

$$\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial x} \ddot{x} = T Q(x, \dot{x}) \tag{8}$$

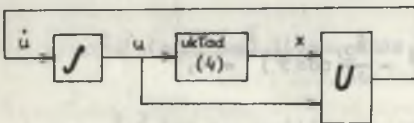
Równanie (8) musi być spełnione przez rozwiązanie równania (4) dla każdego $t \in [0, \infty)$, zatem wstawiając równanie (4) do (8), otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}} [x, F(x, u)] \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} &= T Q [x, F(x, u)] - \frac{\partial Q}{\partial x} [x, F(x, u)] F(x, u) - \\ &- \frac{\partial Q}{\partial x} [x, F(x, u)] \frac{\partial F}{\partial x} F(x, u), \end{aligned}$$

skąd

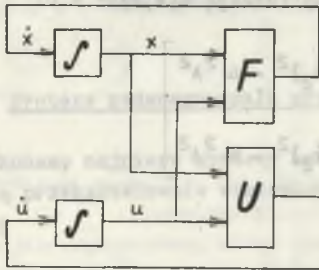
$$\begin{aligned} \dot{u} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}} [x, F(x, u)] \frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} \left(T Q [x, F(x, u)] - \frac{\partial Q}{\partial x} [x, F(x, u)] F(x, u) - \right. \\ &\left. - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} F(x, u) \right) = U(x, u). \end{aligned} \tag{9}$$

Otrzymana funkcja $U : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją wymierną od x, u , gdyż zbiór funkcji wymiernych tworzy ciało. W ten sposób równania (4) i (9) tworzą parę równań różniczkowych wymiernych



$$\dot{x} = F(x, u) \tag{4}$$

$$\dot{u} = U(x, u) \tag{9}$$



Podczas syntezy struktury realizującej parę równań (4), (9) trzeba rozpatryć dwa przypadki. Pierwsza struktura, w przypadku gdy układ (4) jest zadany, zilustrowana jest na rys. 4a, druga gdy układ (4) nie jest zadany, widoczna jest na rys. 4b. W obu przypadkach bloki F i U realizują funkcje wymierne $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Rys. 4. Struktury układów z pomocniczym wektorem sterowania
Fig. 4. The realisable structure of the systems with the auxiliary control vectors

Przykład

Dokonać syntezy struktury generatora dwóch drgań sinusoidalnych o nastawianej częstotliwości i nastawianym przesunięciu fazowym.

Żądane równania czasowe drgań są następujące:

$$x_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$x_2(t) = A \sin(\omega t - \varphi),$$

skąd otrzymuje się tożsamości:

$$\frac{x_1}{A} = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi$$

$$\frac{x_2}{A} = \sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi$$

$$\frac{\dot{x}_1}{A} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

$$\frac{\dot{x}_2}{A} = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi.$$

Stąd

$$\left(\frac{x_1}{A} \sin \varphi + \frac{\dot{x}_1}{\omega A} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A} \cos \varphi + \frac{\dot{x}_2}{\omega A} \sin \varphi\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{A} \cos \varphi - \frac{\dot{x}_1}{\omega A} \sin \varphi\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A} \sin \varphi - \frac{\dot{x}_2}{\omega A} \cos \varphi\right)^2 = 1.$$

Podstawiając $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ zapisujemy funkcję $Q(x, \dot{x})$:

$$Q(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} (c\omega x_1 - s\dot{x}_1)^2 + (s\omega x_2 - c\dot{x}_2)^2 - \omega^2 A^2 \\ (s\omega x_1 + c\dot{x}_1)^2 + (c\omega x_2 + s\dot{x}_2)^2 - \omega^2 A^2 \end{bmatrix}$$

Za obiekt sterowania można przyjąć dowolny sterowany układ równań wymiernych, na przykład dwa integratory:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases} \implies F(x,u) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Przyjmując

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$U(x,u) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}} [x, F(x,u)] \frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} \left(TQ [x, F(x,u)] - \frac{\partial Q}{\partial x} [x, F(x,u)] F(x,u) \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} (x,u) =$$

$$= \frac{1}{-4sc\omega x_1 u_2 + 4sc\omega x_2 u_1 + 4(s^4 - c^4)u_1 u_2} \begin{bmatrix} 2s(su_2 + c\omega x_2), & 2c(s\omega x_2 - cu_2) \\ -2c(cu_1 + s\omega x_1), & 2s(su_1 - c\omega x_1) \end{bmatrix}$$

$$\omega^2 A^2 + (c\omega x_1 - su_1)(3su_1 - c\omega x_1) + (s\omega x_2 - cu_2)(3cu_2 - s\omega x_2)$$

$$\omega^2 A^2 - (s\omega x_1 + cu_1)(3cu_1 + s\omega x_1) + (c\omega x_2 + su_2)(3su_2 + c\omega x_2)$$

3. Synteza zadanego cyklu granicznego

Dokonyamy najpierw syntezy kołowego cyklu granicznego, a następnie za pomocą przekształcenia wielomianowego nadamy mu pożądaną kształt. Układ wymierny

$$\dot{x}_1 = \omega [x_2 + x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)]$$

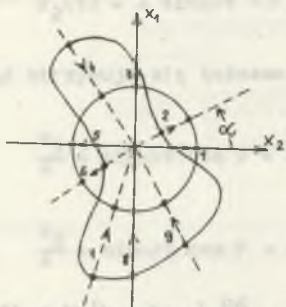
$$\dot{x}_2 = \omega [-x_1 + x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)]$$

(10)

posiada globalnie stabilny kołowy cykl graniczny. Istotnie przechodząc do współrzędnych biegunowych $x_1 = r \cos \alpha$, $x_2 = r \sin \alpha$ przekształcony układ równań (10) do postaci:

$$\dot{r} = \omega r(1 - r^2)$$

$$\dot{\alpha} = \omega.$$



Transformację wielomianową

$$x_1 = \sum_{i+j=n}^{i+j=1} a_{ij} y_1^i y_2^j$$

$$x_2 = \sum_{i+j=n}^{i+j=1} b_{ij} y_1^i y_2^j$$

(11)

Rys. 5. Przekształcenia gładkiego cyklu granicznego

Fig. 5. The smooth limit cycle radial change

dobieramy tak, aby przekształcała ona radialnie pożądaný cykl graniczny na okrąg jednostkowy (rys. 5). Niewiadome współczynniki transformacji wyznaczamy z równań liniowych:

$$\sum_{i+j=1}^{i+j=n} [r(\alpha)]^{i+j} (\cos \alpha)^i (\sin \alpha)^j a_{ij} = \cos \alpha,$$

$$\sum_{i+j=1}^{i+j=n} [r(\alpha)]^{i+j} (\cos \alpha)^i (\sin \alpha)^j b_{ij} = \sin \alpha.$$

(12)

Zależność $r(\alpha)$ wyznacza się z rys. 5. Po odpowiednim uporządkowaniu składników układ równań liniowych (12) przyjmuje postać (13).

Każdej parze odwzorowanych punktów - węzłów odpowiadają dwa równania, zatem związek między liczbą odpowiadających sobie par punktów p a stopniem wielomianu n ma postać:

$$p = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Stosując transformację (11) do układu równań (10) otrzymamy wymierny układ równań posiadający przybliżony zadany cykl graniczny.

Problem aproksymacji zadanego dwuwymiernego cyklu granicznego nie ma jednoznacznego rozwiązania. Ponadto można go rozwiązywać za pomocą dwuwymiarowej aproksymacji rzeczywistej, jak to przeprowadzono powyżej lub za pomocą jednowymiarowej aproksymacji zespolonej.

$$\begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ a_{30} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{03} \\ a_{40} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{01} \\ b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \\ b_{30} \\ b_{21} \\ b_{12} \\ b_{03} \\ b_{40} \\ \vdots \\ b_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{1c_1} & r_{1s_1} & r_{1c_1}^2 & r_{1s_1}^2 & r_{1c_1}^3 & r_{1s_1}^3 & r_{1c_1}^4 & r_{1s_1}^4 & \dots & r_{1s_1}^n \\ r_{2c_2} & r_{2s_2} & r_{2c_2}^2 & r_{2s_2}^2 & r_{2c_2}^3 & r_{2s_2}^3 & r_{2c_2}^4 & r_{2s_2}^4 & \dots & r_{2s_2}^n \\ r_{pc} & r_{ps} & r_{pc}^2 & r_{ps}^2 & r_{pc}^3 & r_{ps}^3 & r_{pc}^4 & r_{ps}^4 & \dots & r_{ps}^n \end{bmatrix}$$

Układ równań liniowych do wyznaczenia współczynników transformacji wielomianowej. Oznaczenia:

$$\begin{aligned} r_k &= r(\alpha_k) \\ c_k &= \cos \alpha_k \\ s_k &= \sin \alpha_k \end{aligned}$$

(13)

LITERATURA

- [1] Gauszus E.W.: Issledowanije dinamiczeskich sistiem metodom toczecznych preobrazowanij. Nauka, Moskwa 1976.
- [2] Kowalew K.M.: Nieliniejnije zadaczi upravlienija i nabludienija w teorii dinamiczeskich sistiem. Naukowa Dumka, Kijew 1980.
- [3] Newcomb R.W.: Nonlinear Differential Systems: A Canonic, Multivariable Theory. Proc. IEEE, 6, 1977, pp. 930-936.
- [4] Sibirskij K.S.: Algebraiczeskije invarianty differencjalnych urawnienij i metric: "Sztiiuca", Kiszyniew 1976.
- [5] Sibirskij K.S.: Wwiedienije w algebraiczeskiju teoriju invariantow differencjalnych urawnienij. "Sztiiuca", Kiszyniwe 1982.
- [6] Siwczyński M.: Zynteza pewnej klasy nieliniowych układow autonomicznych w obecności zakłócenia. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, s. Elektryka z. 16, 1981 ss. 149-156.

Recenzent:

Doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Przyjęto do Redakcji dn. 15 kwietnia 1986 r.

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе введено понятие рационального дифференциального уравнения. Это дифференциальное уравнение в \mathbb{R}^n с многомерной рациональной функцией в правой части. Доказано, что полугруппа рациональных координатных преобразований, переводит множество рациональных уравнений в себя и что произвольное рациональное уравнение можно реализовать в аналоговой схеме с помощью умножителей и интегрирующих и операционных усилителей. Эта теорема применена к синтезу двумерной автономной системы, которая с произвольной точностью реализует заданный гладкий предельный цикл. Представлен также метод синтеза рационального уравнения, которое имеет траектории на одном неголомном многообразии. Показанный пример можно применить к синтезу генераторов синусоидальных колебаний с частотной и фазовой перестройкой.

NONLINEAR RATIONAL AUTONOMOUS SYSTEMS SYNTHESIS

Summary:

In the paper the rational differential equation was defined. It is the differential equation, in \mathbb{R}^n with the multidimensional rational function on the right side. The rationals transformations semigroup were proved to

map the set of rational equations into inside, and that each rational differential equation can be formed using integrators, sum amplifiers and multipliers. The theorem was used to design twodimensional autonomous differential system which realizes desirable smooth limit cycle with any accuracy. The method of synthesis of the rational differential equation with solutions on the nonholonomous manifold was given too. An example of synthesis of the oscillator with frequency and phase control was included.

FORMA WYKAZU O KLASYCZNYCH URZĄDZENIACH

W niniejszym artykule przedstawiono metodę syntezy układów nieliniowych, które realizują dowolny cykl graniczny z dowolną dokładnością. Wykorzystano twierdzenie o możliwości wyrażenia równań różniczkowych nieliniowych za pomocą całek, sumatorów i mnożników. Wykorzystano to do zaprojektowania dwuwymiarowego układu autonomicznego, który realizuje dowolny cykl graniczny z dowolną dokładnością. Podano również metodę syntezy równań różniczkowych nieliniowych z rozwiązaniami na nieholonomicznej powierzchni. Przytoczono przykład syntezy oscylatora z kontrolą częstotliwości i fazy.

1. WSTĘP

W niniejszym artykule przedstawiono metodę syntezy układów nieliniowych, które realizują dowolny cykl graniczny z dowolną dokładnością. Wykorzystano twierdzenie o możliwości wyrażenia równań różniczkowych nieliniowych za pomocą całek, sumatorów i mnożników. Wykorzystano to do zaprojektowania dwuwymiarowego układu autonomicznego, który realizuje dowolny cykl graniczny z dowolną dokładnością. Podano również metodę syntezy równań różniczkowych nieliniowych z rozwiązaniami na nieholonomicznej powierzchni. Przytoczono przykład syntezy oscylatora z kontrolą częstotliwości i fazy.

W niniejszym artykule przedstawiono metodę syntezy układów nieliniowych, które realizują dowolny cykl graniczny z dowolną dokładnością. Wykorzystano twierdzenie o możliwości wyrażenia równań różniczkowych nieliniowych za pomocą całek, sumatorów i mnożników. Wykorzystano to do zaprojektowania dwuwymiarowego układu autonomicznego, który realizuje dowolny cykl graniczny z dowolną dokładnością. Podano również metodę syntezy równań różniczkowych nieliniowych z rozwiązaniami na nieholonomicznej powierzchni. Przytoczono przykład syntezy oscylatora z kontrolą częstotliwości i fazy.