ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

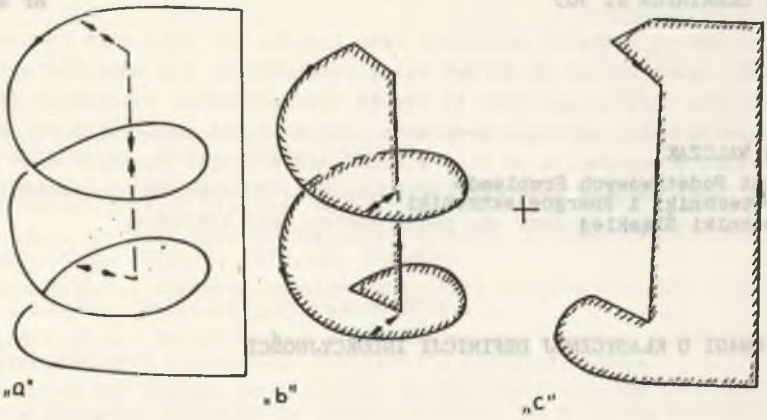
PEWNE UWAGI O KLASYCZNEJ DEFINICJI INDUKCYJNOŚCI

Streszczenie. Klasyczna definicja indukcyjności cewek cienkich wiąże się z pojęciem strumienia przenikającego powierzchnię ograniczoną konturem cewki. Problem rozpinalności powierzchni na cewkach będących dyfeomorficznymi obrazami okręgów jest trywialny, dla cewek zawęźlonych ulega on istotnej komplikacji. Komplikacja ta wiąże się z zagadnieniem możliwości rozpinania orientowalnych powierzchni na konturach zawęźlonych.
Problem zanurzenia (rozpinalności hiperpowierzchni) rozmaitości M^n w rozmaitości M^{n+1} stanowi aktualne zagadnienie topologii algebraicznej nierozwiązalne w pełni do chwili obecnej.
W pracy opisano dwa sposoby rozpinania powierzchni na zwartych rozmaitościach jednowymiarowych zanurzonych w przestrzeni R^3 wykorzystując metody Brunna i Seifferta. Podano szereg przykładów ilustrujących zastosowanie tych metod.

1. Wstęp

W topologii algebraicznej węzłem nazywamy jednowymiarową rozmaitość różniczkowalną zanurzoną w przestrzeni R^3. Jeżeli rozmaitość różniczkowalna jest zwarta, to taki węzeł nazywamy rączkowym.
Mówimy, że dwa węzły W_1, W_2 są tego samego typu, tzn. są sobie równoważne topologicznie, jeśli istnieje homeomorfizm przekształcający węzeł W_1 wraz z pewnym jego otoczeniem trójwymiarowym w węzeł W_2 (wraz z jego otoczeniem trójwymiarowym). Zagadnienie klasyfikacji topologicznej węzłów jest bardzo złożone i z punktu widzenia niniejszego artykułu nieistotne.
W dalszym ciągu artykułu przez słowo "węzeł" rozumiemy węzeł rączkowy określonego typu bez wnikania w problem, jakie niezmienniki topologiczne charakteryzują typ węzła.

Problem rozpilaności powierzchni orientowalnych na węzłach rączkowych wiąże się ściśle ze stosowalnością klasycznej definicji indukcyjności opartej na pojęciu strumienia magnetycznego. Problem ten dla węzłów homeomorficznych (wraz z pewnym otoczeniem) ze sferą S^1 jest stosunkowo prosty, chociaż nawet w tym przypadku mogą wystąpić komplikacje. Klasycznym przykładem jest tu problem rozpinania powierzchni na cewce cylindrycznej (rys. 1).



Rys. 1. Rozpinanie powierzchni na cewce cylindrycznej
Fig. 1. The spanning surface in the cylindrical coil

Jeśli długość cewki jest dostatecznie duża w porównaniu z jej średnicą, a skok linii śrubowej dostatecznie mały (brak ścisłego sprecyzowania tych terminów w literaturze), to każdy zwój cewki można zastąpić prądem pierścieniowym o tym samym natężeniu co prąd cewki pierwotnej. Tym samym cewkę cylindryczną zastępuje się pojedynczym zwojem, w którym płynie prąd o natężeniu równym iloczynowi prądu cewki pierwotnej cylindrycznej i liczby jej zwojów. Przypadek, w którym założenia pozwalające na przyporządkowanie cewce cylinrycznej zwoju kołowego nie są spełnione, jest w literaturze całkowicie pomijany, np. ([1], [2]).
Intuicyjnie można przypuszczać, że operacja polegająca na przyklejaniu dodatkowych dwukrotnie orientowalnych łuków (w celu zapewnienia niezmienności rozpływu prądu w cewce) do węzła powinna pozwolić na pozytywne rozwiązanie problemu rozpinalności orientowalnych powierzchni na węzłach.
Rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 1

Rozpiąć orientalną powierzchnię na cewce cylindrycznej, dla której nie są spełnione założenia umożliwiające przyporządkowanie jej zwoju kołowego (rys. 1).

Wprowadzamy dodatkowe dwukrotnie orientowalne łuki, tak jak to pokazano na rys. 1"a". Powierzchnię rozpiętą na cewce można przedstawić w postaci sumy dwóch orientowalnych powierzchni (rys. 1a, 1b). W celu łatwiejszego zaobserwowania faktu, że powierzchnia przedstawiona na rys. 1b jest orientowalna, można wprowadzić dalsze cięcia tej powierzchni (rys. 1b), co oznaczono na tym rysunku liniami kreskowanymi.

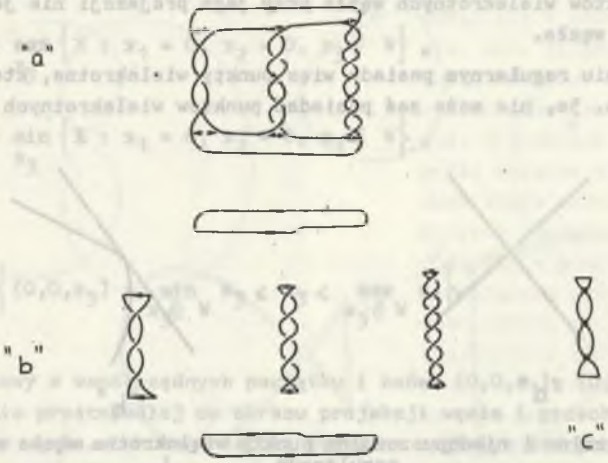
Problem rozpinania orientowalnych powierzchni na węzłach nie będących homeomorficznym obrazem sfery S^1 (wraz z pewnym trójwymiarowym jej otoczeniem) jest o wiele bardziej złożony. W niektórych przypadkach możliwe jest

intuicyjne dołączenie dwukrotnie orientowanych łuków do węzła tak, by można było na nim rozpiąć powierzchnię orientowalną.
Rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 2

Rozpiąć powierzchnię na nieodwracalnym węźle Trottera przedstawionym na rys. 2.

Gdy wprowadzimy pomocnicze dwukrotnie orientowalne łuki, tak jak to pokazano na rys. 2a (za pomocą linii kreskowanych), węzeł Trottera rozpada się na pięć węzłów homeomorficznych ze sferą S^1 (rys. 2b). Chcąc uprościć powierzchnię rozpiętą na zwojach bifilarnych (rys. 2b), można wprowadzić dodatkowe dwukrotnie orientowalne łuki w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku (łuki te na rys. 2c oznaczono kropkami).



Rys. 2. Rozpinanie powierzchni na węźle Trottera
Fig. 2. The spanning surface in the Trotter knots

Procedurę dołączania dodatkowych (dwukrotnie orientowalnych) łuków do danego węzła nazywać będziemy cięciem węzła. Przed przystąpieniem do syntezy efektywnych algorytmów umożliwiających proces rozpinania orientowalnych powierzchni na węzłach należy odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Czy dla każdego węzła należącego do zbioru węzłów topologicznie równoważnych istnieje postać kanoniczna, wspólna dla całego zbioru.
2. Jeśli odpowiedź na ww. pytanie jest pozytywna, to w jaki sposób należy dołączać dodatkowe łuki do węzła, by ulegał on rozpadowi na węzły elementarne homeomorficzne ze sferą S^1.

Zagadnienia te będą rozpatrzone w dalszej części artykułu.

2. Metoda cięć węzła oparta na twierdzeniu Brunna

Przed przystąpieniem do analizy metod cięć węzła wprowadźmy najpierw pewne pojęcia podstawowe:

Projekcją węzła W nazywamy odwzorowanie:

$$Pr : W \subset R^3 \longrightarrow R^2. \tag{1}$$

Punkt p należący do obrazu projekcji węzła nazywamy K-krotnym, jeśli jego przeciw obraz odpowiada k punktom węzła.

Węzeł znajduje się w położeniu regularnym, gdy:

1) wszystkie jego punkty wielokrotne mają krotność równą dwa,
2) liczba punktów wielokrotnych węzła jest skończona,
3) żaden z punktów wielokrotnych węzła przy jego projekcji nie jest obrazem wierzchołka węzła.

Węzeł w położeniu regularnym posiada więc punkty wielokrotne, których obraz pokazano na rys. 3a, nie może zaś posiadać punktów wielokrotnych pokazanych na rys. 3b.

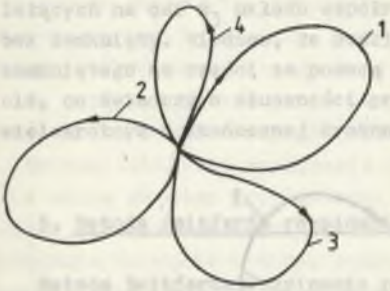
Rys. 3. Dopuszczalne i niedopuszczalne punkty wielokrotne węzła w położeniu regularnym

Fig. 3. The admissible and non-admissible multiple points for knot in the regulator position

Można wykazać ([3], s. 18), że:

- każdy węzeł rączkowy można przedstawić w położeniu regularnym,
- liczba regularnych położeń węzłów rączkowych jest co najwyżej przeliczalna, tzn. liczba wszystkich typów topologicznie równoważnych węzłów jest co najwyżej przeliczalna.

Mówimy, że węzeł rączkowy znajduje się w zmodyfikowanym położeniu regularnym, jeśli posiada on jeden punkt wielokrotny o skończonej krotności. Można wykazać [4], że każdy węzeł rączkowy znajdujący się w położeniu regularnym można sprawdzić do zmodyfikowanego położenia regularnego. Powyższe stwierdzenie nosi nazwę twierdzenia Brunna [4]. Przykład obrazu węzła znajdującego się w zmodyfikowanym położeniu regularnym przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Obraz węzła rączkowego w zmodyfikowanym położeniu regularnym

Fig. 4. The image of handle knot in the modified regular position

Przeanalizujmy obecnie procedurę rozpinania powierzchni orientowalnych na węźle znajdującym się w położeniu regularnym zmodyfikowanym. W tym położeniu jedynym punktem wspólnym gałęzi węzła (w obrazie projekcji) jest punkt wielokrotny leżący w początku układu współrzędnych. Przyklejmy do węzła dodatkowy łuk (dwukrotnie orientowalny) leżący na osi x_3 (rys. 5). Współrzędne początku i końca łuku oznaczmy przez $(0, 0, z_1)$, $(0, 0, z_2)$. Współrzędne z_1, z_2 początku i końca dodatkowego łuku dobierzmy zgodnie ze wzorami:

$$z_1 = \max_{x_3} \left\{ X : x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \in W \right\}, \tag{2}$$

$$z_2 = \min_{x_3} \left\{ X : x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \in W \right\}, \tag{3}$$

gdzie:

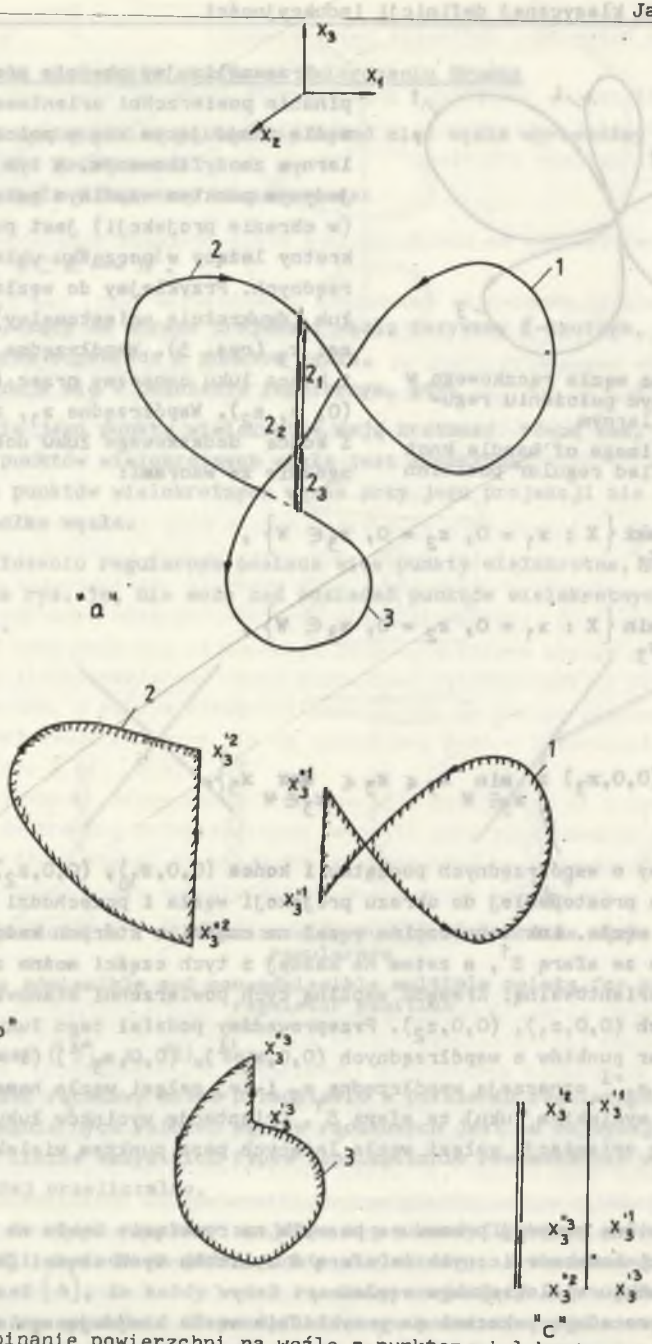
$$X = \left\{ (0,0,x_3) : \min_{x_3 \in W} x_3 \leq x_3 \leq \max_{x_3 \in W} x_3 \right\}. \tag{4}$$

Łuk dodatkowy o współrzędnych początku i końca $(0,0,z_1)$, $(0,0,z_2)$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do obrazu projekcji węzła i przechodzi przez punkt wielokrotny węzła. Łuk ten rozcina węzeł na części, z których każda jest homeomorficzna ze sferą S^1, a zatem na każdej z tych części można rozpiąć powierzchnię orientowalną. Krawędź wspólną tych powierzchni stanowi łuk o współrzędnych $(0,0,z_1)$, $(0,0,z_2)$. Przeprowadźmy podział tego łuku na części za pomocą par punktów o współrzędnych $(0,0,x_3'^{i})$, $(0,0,x_3''^{i})$ $(i = 1...n)$, gdzie $x_3'^{i}$, $x_3''^{i}$ oznaczają współrzędną x_3 i-tej gałęzi węzła homeomorficznej (wraz z tym wycinkiem łuku) ze sferą S^1. Orientację wycinków łuku przyjumemy zgodnie z orientacją gałęzi węzła leżących poza punktem wielokrotnym.

Przykład 3

Przedstawiona powyżej procedura pozwala na rozcięcie węzła na skończoną liczbę części homeomorficznych ze sferą S^1. Liczba tych części jest równa krotności punktu wielokrotnego węzła.

Opisaną procedurę pokazano na przykładzie węzła znajdującego się w zmodyfikowanym położeniu regularnym, dla krotności punktu wielokrotnego równej 3. Zauważmy, że przedstawiona procedura jest słuszna dla dowolnego węzła znajdującego się w położeniu regularnym zmodyfikowanym.



Rys. 5. Rozpinanie powierzchni na węźle z punktem wielokrotnym o krotności równej 3

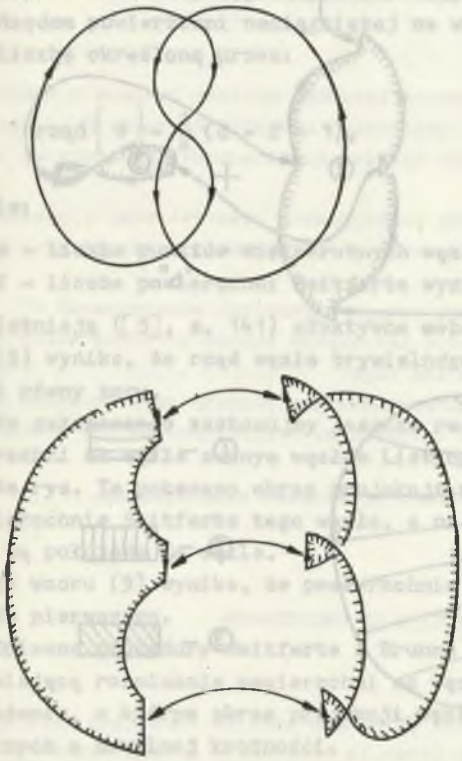
Fig. 5. The spanning surface in the knot with multiple points of multiplication factor equal 3

Dodatkowy łuk wprowadzany w celu rozcięcia węzła można traktować jako układ dwóch przeciwnie skierowanych kolinearnych wektorów o równej długości leżących na osi x_3 układu współrzędnych. Układ tych wektorów tworzy wielobok zamknięty. Wiadomo, że podział wektorów wchodzących wskład wieloboku zamkniętego na części za pomocą par punktów nie może spowodować jego otwarcia, co świadczy o słuszności przedstawionej procedury dla węzła z punktem wielokrotnym o skończonej krotności.

3. Metoda Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach

Metoda Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach opisana przez Foxta ([5], str. 140) polega na dołączaniu do węzła dodatkowych zorientowanych konturów, w wyniku czego węzeł rozpada się na skończoną liczbę części homeomorficznych ze sferą S^1. Metoda ta wymaga, by węzeł znajdował się w położeniu regularnym, tzn. by obraz projekcji węzła zawierał wyłącznie punkty wielokrotne o krotności równej dwa. W punktach wielokrotnych węzła dołącza się dodatkowe dwukrotnie orientowalne łuki, których początki i końce znajdują się w punktach węzła odpowiadających punktowi wielokrotnemu obrazu projekcji. Przyporządkowanie tych łuków gałęziom węzła przeprowadza się w sposób następujący. Przyjmijmy dowolny punkt węzła nie będący jego punktem wielokrotnym jako "punkt startu". Poruszając się z tego punktu zgodnie z orientacją węzła dochodzimy do punktu wielokrotnego, w którym przeskakujemy na drugą gałąź węzła. Poruszając się po tej gałęzi węzła zgodnie z jej orientacją dochodzimy do następnego punktu wielokrotnego, w którym przeskakujemy na następną gałąź węzła. Procedurę tę powtarzamy tyle razy, aż znajdziemy się w "punkcie startu". Krzywa zamknięta

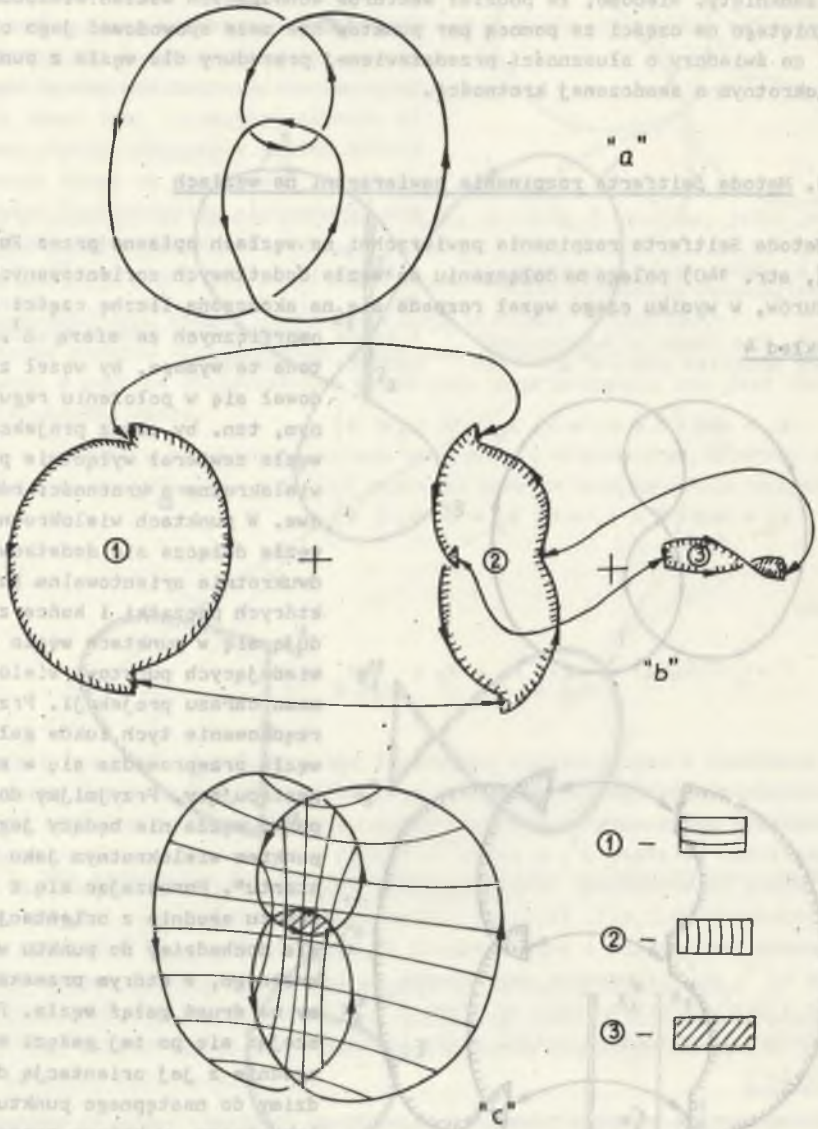
Przykład 4



Rys. 6. Okręgi Seitferta dla węzła trzylistnego

Fig. 6. The Seitfert circles fot the trefoil knots

Przykład 5



Rys. 7. Powierzchnie Seitferta dla węzła Listinga

Fig. 7. The Seitfert surface for the Listing knots

uzyskana opisaną powyżej metodą jest homeomorficzna z okręgiem i nosi nazwę okręgu Seitferta. Dobierając "punkt startu" we wszystkich gałęziach węzła znajdujących się poza jego punktami wielokrotnymi wyznacza się okręgi Seitferta przyporządkowane danemu węzłowi.

Na okręgach Seitferta (z uwagi na to, że są one homeomorficzne z okręgiem) można zawsze rozpiąć powierzchnie orientowalne.

Metodę Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach pokazano na przykładzie węzła zwanego trzylistnym, posiadającego w obrazie projekcji trzy punkty wielokrotne (rys. 6). Na tym rysunku odpowiadające sobie łuki (tzn. dołączone do węzła w danym punkcie wielokrotnym) oznaczono strzałkami. Powierzchnie Seitferta nie mogą się ze sobą przecinać, mogą mieć one wspólne części brzegów (odpowiadające dołączanym dwukrotnie i przeciwnie orientowalnym łukom) lub też mogą zawierać się w sobie (w obrazie projekcji). Metoda Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach pozwala określić jeden z niezmienników topologicznych określających typ węzła.

Rzędem powierzchni naciągniętej na węzeł a zarazem rzędem węzła nazywamy liczbę określoną przez:

$$\text{rząd}\left\{ W \right\} = \frac{1}{2}(d - f + 1), \tag{5}$$

gdzie:

d - liczba punktów wielokrotnych węzła w położeniu regularnym,

f - liczba powierzchni Seitferta wyznaczonych dla danego węzła.

Istnieją ([5], s. 141) efektywne metody wyznaczania rzędu węzła. Ze wzoru (5) wynika, że rząd węzła trywialnego, tzn. homeomorficznego ze sferą S^1, jest równy zeru.

Na zakończenie zastosujmy jeszcze raz metodę Seitferta do rozpięcia powierzchni na węźle zwanym węzłem Listinga (przykład 5).

Na rys. 7a pokazano obraz projekcji węzła Listinga, na rys. 7b pokazano powierzchnie Seitferta tego węzła, a na rys. 7c pokazano, jak te powierzchnie są położone na węźle.

Ze wzoru (5) wynika, że powierzchnia rozpięta na węźle Listinga jest rzędu pierwszego.

Opisane procedury Seitferta i Brunna można łatwo połączyć w jedną umożliwiającą rozpinanie powierzchni na węzłach rączkowych znajdujących się w położeniu, w którym obraz projekcji węzła zawiera skończoną liczbę wielokrotnych o dowolnej krotności.

LITERATURA

1 E.I. Tamm: Podstawy teorii elektryczności. WNT, Warszawa 1967.

2 R.M. Fano, L.J. Chu, R.B. Adler: Electromagnetic Fields, Energy and Forces. J. Wiley N. York. 1963.

3 R.H. Crowell, R.H. Fox: Introduction to Knot Theory. G. C. N. York. 1963.

4 H. Brunn: Topologische Betrachtungen. Z. für Math. und Phys. Bd. 37. 1892. str. 106-116.

5 M.K. Fort: Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Engl. Cliffs. N. Jersey. 1952.

Recenzent:

Doc. dr hab. inż. Stanisław K. Krzemiński

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КЛАССИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИНДУКТИВНОСТИ

Р е з ю м е

Классическая дефиниция индуктивности линейных катушек связана с понятием потока, проникающего поверхность ограниченную контуром катушки. Проблема растягивания поверхности на катушках будущих диффеоморфичными образами округов, очень тривиальна.

Для катушек защеплённых, проблема подвергается существенному сложнению. Осложнение связано с вопросом возможности растягивания орнентированных поверхностей на контурах защепления.

Проблема погружения (растягивания гиперповерхности) многообразия M^n в многообразие M^{n+1} предотавляет собой актуальный вопрос алгебраической топологии неразрешённый полностью до сих пор.

В работе описаны два способа растягивания поверхности на компактных многообразнях, имеющих одно измерение погружённых в пространстве при помощи методов Брунна и Сейтферта.

Представлен ряд примеров, поясняющих применение этих методов.

SOME REMARKS ABOUT CLASSICAL DEFINITION OF INDUCTANCE

S u m m a r y:

Classical definition of inductance of linear coil is connected with an idea of a flux penetrating surface (that is limited of a coil contour). The problem of surface spanning on the coils, with are diffeomorfic images of circles is trival. For the linking coils, this problem is much more complicated, thet complication concerns a problem of possibility of the spanning oriented surface on the linking contours.

The problem of immersion (of the spanning hypersurface) of manifold M^n in manifold M^{n+1} is very for algebraic topology, not quite solvable till now.

In this paper two kinds of surface spanning on the one dimensional compact manifolds immersioned in a space R^3 by the use of Brunn's and Seifert's methods are described. There are many illustrating examples for the application of these methods.