

Zofia CICHOWSKA

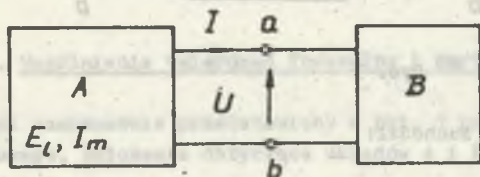
Instytut Podstawowych Problemów
Elektroniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

TWIERDZENIA THEVENINA I NORTONA DLA UKŁADU n-ZACISKOWEGO

Streszczenie. Korzystając z zasady wyodrębnienia i zasady superpozycji wykazano słuszność twierdzenia o zastępczym generatorze dla układu 2-zaciskowego. Następnie powtórzono tok rozumowania dla układu n-zaciskowego i uzyskano opis macierzowy tego układu w dwóch równoważnych postaciach. Przedstawiono dwie możliwe struktury układu zastępczego wynikające bezpośrednio z tych równań macierzowych. Przedstawione układy zbudowane są n-1 źródeł autonomicznych, n-1 dwójników o zadanych impedancjach (admitancjach) oraz n-1 źródeł sterowanych.

1. Twierdzenia Thévenina i Nortona dla układu 2-zaciskowego

Uzasadnienie twierdzeń Thevenina i Nortona o zastępczym generatorze można przeprowadzić w sposób odmienny od powszechnie stosowanego. Rozpatrzmy układ aktywny A zawarty między zaciskami ab współpracujący z układem B (rys.



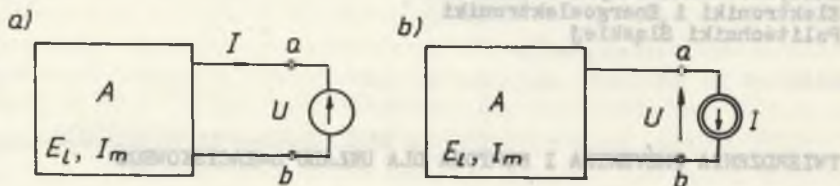
Rys. 1

1). Załóżmy, że układy A i B są to układy SLS, a więc stacjonarne, liniowe, skupione, złożone z elementów RLCM, źródeł autonomicznych i źródeł sterowanych. Układy te będziemy analizować symboliczną¹⁾ dla przebiegów sinusoidalnych w stanie ustalonym dla wspólnej częstotliwości sił elektromotorycznych i wydajności prądowych źródeł autonomicznych. Załóżmy, że układ A zawiera L autonomicznych źródeł napięciowych E_l i M autonomicznych źródeł prądowych I_m ($l \in \{1, \dots, L\}$, $m \in \{1, \dots, M\}$).

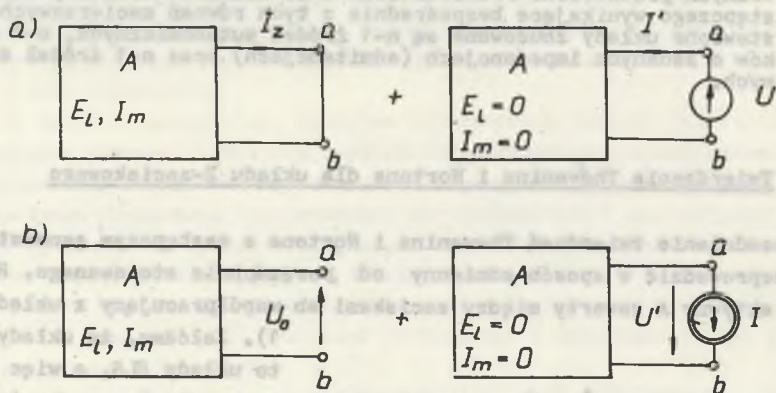
Poszukujemy aktywnego dwójnika równoważnego układowi A ze względu na zaciski ab. W tym celu zastąpimy zgodnie z zasadą wyodrębnienia układ B idealnym źródłem napięciowym lub prądowym o wartościach napięcia U lub prądu I

¹⁾ Rozważania można uogólnić na układy SLS o dowolnych przebiegach wymuszeń badane w stanie nieustalonym przy użyciu przekształcenia Laplace'a.

w przekroju ab (rys. 2). Obliczymy w układzie z rys. 2a prąd I , a w układzie z rys. 2b napięcie U za pomocą zasady superpozycji. W tym celu każdy z układów rozbijamy na dwa układy grupując w pierwszym wszystkie źródła układu A przy zwartej siłę elektromotorycznej U lub rozwartej wydajności prądowej I , a w drugim siłę elektromotoryczną U lub wydajność prądową I przy zwartej wszystkich siłach elektromotorycznych E_l i rozwartych wszystkich wydajnościach prądowych I_m , czyli przy $E_l = 0, l \in \{1, \dots, L\}$ oraz $I_m = 0, m \in \{1, \dots, M\}$ (rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

Zgodnie z zasadą superpozycji zachodzi:

$$I = I_z - I' = I_z - Y_0 U \tag{1}$$

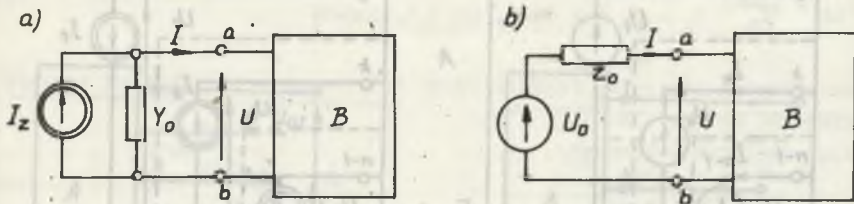
$$U = U_0 - U' = U_0 - Z_0 I. \tag{2}$$

Równania (1) i (2) są równoważnym opisem tego samego układu. Opisy te istnieją równocześnie z wyjątkiem przypadków granicznych, tj. $Y_0 = 0$ lub $Z_0 = 0$, a więc przypadków, gdy układ A jest idealnym źródłem prądowym lub napięciowym.

Warunki równoważności można wyrazić w postaci:

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{U_0}{I_z} \quad (3)$$

Wzory (3) podają możliwość pomiarowego lub obliczeniowego wyznaczenia impedancji Z_0 (konduktancji Y_0) dla układu A zawierającego źródła sterowane. Przy braku źródeł sterowanych w układzie A Z_0 można również wyznaczyć metodą transfiguracji. Sposób obliczania parametrów dwójników równoważnych na podstawie zmodyfikowanej metody węzłowej podano w pracy [3].



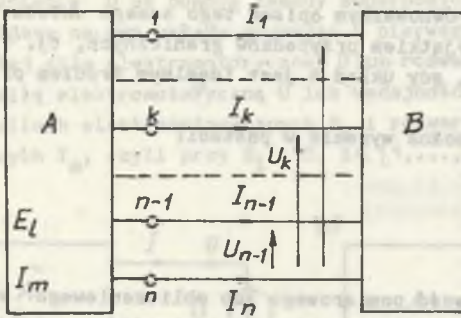
Rys. 4

Opisowi wyrażonemu wzorami (1) i (2) można przyporządkować obwody o prostych strukturach przedstawionych na rys. 4. Części zawarte na lewo od zacisków a b nazywane są dwójnikiem Nortona (rys. 4a) i dwójnikiem Thévenina (rys. 4b).

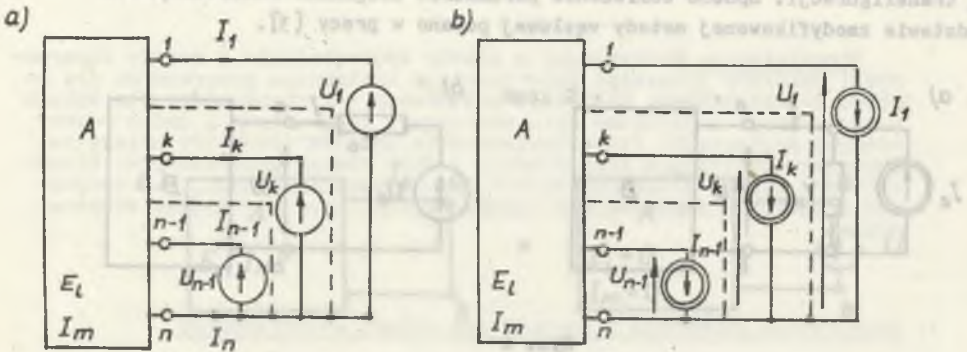
2. Uogólnienie twierdzeń Thévenina i Nortona dla układu n-zaciskowego

Tok rozumowania przedstawiony w pkt. 1 powtórzmy teraz dla układu n-zaciskowego. Założenia dotyczące układów A i B (rys. 5) są identyczne z poprzednimi.

Układ B zastępujemy w myśl zasady wyodrębnienia zespołem n-1 sił elektromotorycznych lub n-1 wydajności prądowych o wartościach napięć i prądów w przekroju 1...n. Wybór przewodu odniesienia jest dowolny, a więc układ źródeł zastępczych może być zrealizowany na n sposobów. Na rys. 6 przedstawiono te układy dla n-tego przewodu przyjętego jako przewód odniesienia. Obliczmy $J_1 \dots J_{n-1}$ w układzie z rys. 6a oraz napięcia $U_1 \dots U_{n-1}$ w układzie z rys. 6b za pomocą zasady superpozycji. Każdy z tych układów rozbijamy na



Rys. 5



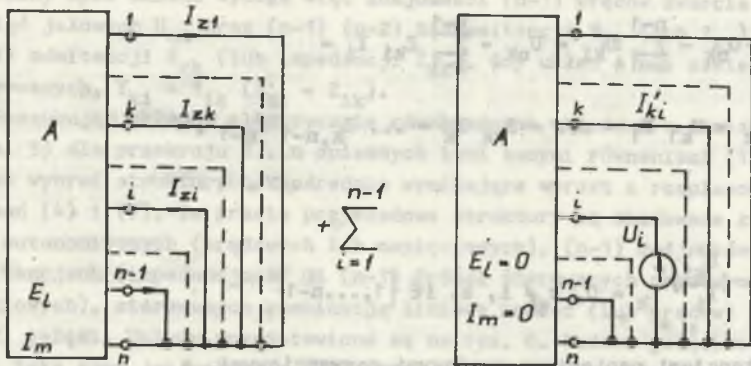
Rys. 6

n układów grupując w pierwszym wszystkie źródła autonomiczne części A, a w pozostałych kolejno $n-1$ źródeł napięciowych lub prądowych (rys. 7). Prąd płynący przez k -ty zacisk

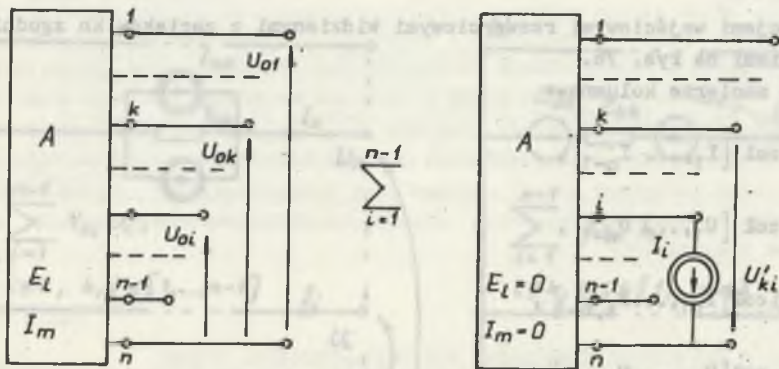
$$\begin{aligned}
 I_k &= I_{zk} - \sum_{i=1}^{n-1} I'_{ki} = I_{zk} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_{ki} U_i = \\
 &= I_{zk} - Y_{k1} U_1 - \dots - Y_{kk} U_k - \dots - Y_{k,n-1} U_{n-1},
 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$Y_{ki} = \left(\frac{I'_{ki}}{U_i} \right) U_k = 0, \quad k \neq i, \quad k, i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (5)$$



Rys. 7a $k, i \in \{1, \dots, n-1\}$
 $l \in \{1, \dots, L\}, m \in \{1, \dots, M\}$.



Rys. 7b $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$
 $l \in \{1, \dots, L\}, m \in \{1, \dots, M\}$.

rys. /

są transmitancjami prądowo-napięciowymi zwarciovymi, a

$$Y_{kk} = \left(\frac{I'_{k1}}{U_k} \right) U_1 = 0, \quad k \neq 1, \quad k, i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (6)$$

są admittancjami wejściowymi zwarciovymi widzianymi z zacisków kn zgodnie z oznaczeniami na rys. 7a.

Analogicznie napięcie między zaciskami k-tym i n-tym

$$U_k = U_{ok} - \sum_{i=1}^{n-1} U'_{ki} = U_{ok} - \sum_{i=1}^{n-1} Z_{ki} I_i =$$

$$= U_{ok} - U_{k1} I_1 - \dots - Z_{kk} I_k - \dots - Z_{k,n-1} I_{n-1}, \quad (7)$$

gdzie:

$$Z_{ki} = \left(\frac{U'_{ki}}{I_1} \right)_{I_k = 0}, \quad k \neq i, \quad k, i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (8)$$

są transmitancjami napięciowo prądowymi rozwarciowymi, a

$$Z_{kk} = \left(\frac{U'_{ki}}{I_k} \right)_{I_1 = 0}, \quad k \neq i, \quad k, i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (9)$$

są impedencjami wejściowymi rozwarciowymi widzianymi z zacisków kn zgodnie z oznaczeniami na rys. 7b.

Oznaczając macierze kolumnowe

$$\mathbf{I} = \text{col} [I_1, \dots, I_{n-1}],$$

$$\mathbf{U} = \text{col} [U_1, \dots, U_{n-1}],$$

$$\mathbf{I}_z = \text{col} [I_{z1}, \dots, I_{z,n-1}],$$

$$\mathbf{U}_0 = \text{col} [U_{01}, \dots, U_{0,n-1}] \quad (10)$$

oraz macierze kwadratowe o wymiarze (n-1)

$$\mathbf{Y} = [Y_{ki}] \quad (11)$$

$$\mathbf{Z} = [Z_{ki}]$$

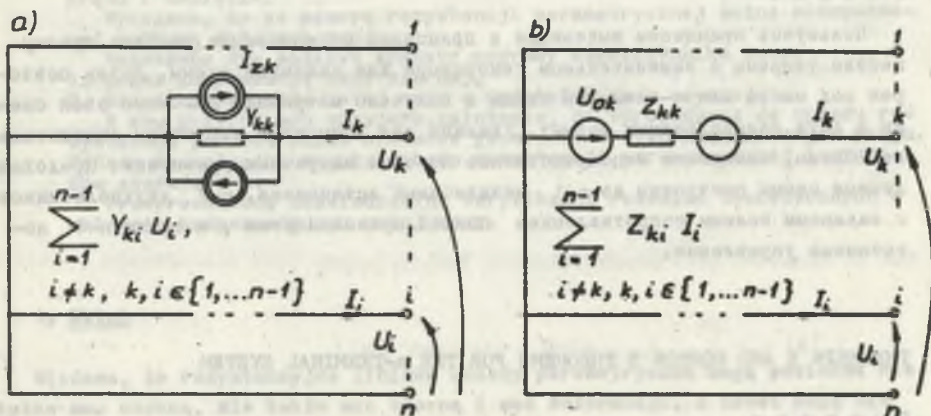
można układ z rys. 5 opisać równaniami macierzowymi

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_z - \mathbf{YU} \quad (12)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{ZI}. \quad (13)$$

Pełny opis układu wymaga więc znajomości $(n-1)$ prądów zwarcia I_{zk} lub napięć jałowych U_{ok} oraz $(n-1)$ $(n-2)$ transmitancji Y_{ki} (lub Z_{ki}), oraz $(n-1)$ admittancji Y_{kk} (lub impedancji Z_{kk}). Gdy układ A nie zawiera źródeł sterowanych, $Y_{ki} = Y_{ik}$ ($Z_{ki} = Z_{ik}$).

Poszukując układów elektrycznie równoważnych układowi n-zaciskowemu A (rys. 5) dla przekroju 1...n opisanych tymi samymi równaniami (12) lub (13) można wybrać struktury bezpośrednie wynikające wprost z rozpisanej postaci równań (4) i (7). Te proste przykładowe struktury są zbudowane z $(n-1)$ źródeł autonomicznych (prądowych lub napięciowych), $(n-1)$ dwójników o zadanych admittancjach (impedancjach) i $(n-1)$ źródeł sterowanych prądowych (lub napięciowych), sterowanych kombinacją liniową napięć (lub prądów) pozostałych $(n-2)$ gałęzi. Układy przedstawione są na rys. 8. Budowa gałęzi od 1 do $n-1$ jest taka sama jak gałęzi k -tej, gałąź n -ta w obydwu układach stanowi zwarcie. Układy te można nazwać: strukturą n-zaciskową Nortona (a) i strukturą n-zaciskową Thévenina (b).



Rys. 8

Istnienie obydwu opisów układu A wyrażonych równaniami (12) i (13) wymaga spełnienia warunku:

$$\det \mathbf{Y} \neq 0 \quad \text{lub} \quad \det \mathbf{Z} \neq 0 \tag{14}$$

Zachodzą wtedy warunki równoważności

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_2 \tag{15}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \tag{16}$$

LITERATURA

- [1] Brodzki M.: Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym. Skrypt Politechniki Śląskiej Gliwice 1979, ss. 71-76.
- [2] Fryze S.: Ogólna teoria transfiguracji obwodów elektrycznych. Przegląd elektrotechniczny nr 4-8, 1934.
- [3] Haji I.N.: Computation of Thévenin and Norton equivalents. Electronics Letters, 27th May 1976, vol 12, nr 11.

Recenzent:

Doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

ТЕОРИЯ ТЕВЕНИНА И НОРТОНА ДЛЯ n -ЗАЖИМНОЙ СХЕМЫ

Р е з ю м е

Пользуясь принципом выделения и принципом суперпозиции указано преимущество теоремы о заменительном генераторе для зажимной схемы. Затем повторен ход мысли для n -зажимной схемы и получено матричное описание этой схемы в двух эквивалентных формах. Указаны две возможные структуры заменительной схемы, следующие непосредственно из этих матричных уравнений. Представленные схемы построены из $n-1$ независимых источников, $n-1$ двухполюсников с заданным полным сопротивлением полной проводимостью, а также $n-1$ источников управления.

THEVENIN'S AND NORTON'S THEOREMS FOR THE n -TERMINAL SYSTEM

S u m m a r y

On the basis of the principles of isolation and of superposition it has been proved that the equivalent generator theorem (Thévenin's theorem) is true for the 2-terminal system.

Then, the proces of argumentation has been repeated for the n -terminal system.

As a result of this the system has been described as a matrix in two equivalent forms.

Two possible structures of the equivalent circuit resulting directly from the above matrix equations are presented. The presented systems incorporate $n - 1$ independent sources, $n - 1$ two-terminal networks with preset impedances (admittances) and $n - 1$ controlled sources.