ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Zygmunt GARCZARCZYK
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O DŁUGOŚCI KROKU W DYSKRETNEJ METODZIE KONTYNUACJI

Streszczenie. W artykule przedstawiono teoretyczne oszacowanie maksymalnej długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji związanej z algorytmem rozwiązywania układu równań węzłowych opisujących nieliniowy obwód rezystancyjny. Pokazano, że w praktyce numerycznej wielkość ta winna być korygowana. Wskazano na możliwość dalszego zwiększenia wartości uzyskanego oszacowania.

1. Wstęp

Celem rozważań jest przedstawienie oszacowania długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji związanej z algorytmem rozwiązywania układu równań nieliniowych postaci

$$f(t) = Ag(A^t x+E) - AJ = 0. \tag{1}$$

Układ (1) dla n+1 węzłowego obwodu o m gałęziach stanowi układ n równań węzłowych z niewiadomymi potencjałami węzłowymi x_i, $i = 1,2,\ldots,n$. W równaniu tym A - oznacza zredukowaną macierz incydencji, E - wektor stałych wymuszeń napięciowych, J - wektor stałych wymuszeń prądowych, a $g(u) = [g_1(u_1), g_2(u_2),\ldots,g_m(u_m)]^t$ wektor charakterystyk prądowo-napięciowych rezystorów nieliniowych (liniowych). Przy tym $u = A^t x + E$ oznacza wektor napięć na rezystorach.

Jeżeli każda gałąź rozważanego obwodu zostanie zmodyfikowana tak, że rezystor o charakterystyce $i_k = g_k(u_k)$, $k = 1,2,\ldots,m$ zostanie zastąpiony równoległym połączeniem rezystora liniowego o konduktancji $(1-\lambda)G_k$ oraz rezystora o charakterystyce $i_k = \lambda\, g_k(u_k)$, to można pokazać [3], że dla $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ równanie węzłowe tego obwodu ma postać:

$$H(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\left\{AGA^t x - A(J-GE)\right\} = 0, \tag{2}$$

gdzie $G = \mathrm{diag}\,[G_1, G_2,\ldots,G_m]$.

Można zauważyć, że równanie (2) ma następujące własności:

a) Rozwiązanie układu dla wartości początkowej $\lambda_0 = 0$ jest łatwe do uzyskania, gdyż równanie

$$H(x,0) = AGA^t x - A(J-GE) = 0 \tag{3}$$

stanowi układ równań liniowych.

b) Dla wartości parametru $\lambda_N = 1$ redukuje się do równania (1), tzn.

$$H(x,1) = f(x) = 0. \tag{4}$$

Stosując metodę kontynuacji przyjmuje się, że H jest homotopią [2], tzn., że istnieje ciągłe odwzorowanie $x(\lambda)$ takie, że

$$H(x(\lambda), \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle. \tag{5}$$

Oznacza to, że rozwiązania $x(\lambda)$ równań (2) wyznaczane dla rosnącego ciągu wartości $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N = 1$ opisują pewną krzywą łączącą punkt $x(0)$ z zerem $x^* = x(1)$ funkcji $f(x)$.

Do rozwiązywania kolejnych równań

$$H(x, \lambda_i) = 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,N \tag{6}$$

wybrano metodę Newtona z przybliżeniem początkowym

$$x(\lambda_i)^{(0)} = x(\lambda_{i-1}), \tag{7}$$

wtedy

$$x(\lambda_i)^{(j+1)} = x(\lambda_i)^{(j)} - H_x(x(\lambda_i)^{(j)}, \lambda_i)^{-1} H(x(\lambda_i)^{(j)}, \lambda_i) \tag{8}$$

$j = 0,1,2,\ldots$

Równania (2) i (8) pozwoliły uzyskać zmodyfikowaną postać równań węzłowych tzw. dyskretnego obwodu równoważnego [1,3]:

$$A\left[\lambda G^{(j)} + (1-\lambda)G\right]A^t x^{(j+1)} = A\left[J^{(j)} - \lambda G^{(j)}E + (1-\lambda)(J-GE)\right] \tag{9}$$

$\forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle$

gdzie:

$G^{(j)}$ - diagonalna macierz dynamicznych konduktancji rezystorów nieliniowych dla napięć w j-tej iteracji

$$J^{(j)} = \lambda\left[J - J_Q^{(j)} + G^{(j)}\, U_Q^{(j)}\right]$$

$$U_Q^{(j)} = A^t\, x^{(j)} + E$$

$$J_Q^{(j)} = g(U_Q^{(j)}).$$

Rozwiązanie ciągu równań (9) będzie zbieżne do rozwiązania równania (1), jeżeli długość kroku

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{10}$$

będzie odpowiednio dobrana. Winna ona być tak duża, by zapewniała minimalny czas obliczeń konieczny do uzyskania x^*, a jednocześnie "dostatecznie mała" by zapewnić zbieżność metody iteracyjnej.

2. Oszacowanie długości kroku

Niech $x(\lambda)$ oznaczą krzywą spełniającą zależność (5) nazywaną dalej ścieżką homotopii, natomiast $\hat{x}(\lambda)$ niech oznacza krzywą utworzoną przez kolejne przybliżenia początkowe $x(\lambda_i)^{(o)}$ nazywają dalej ścieżką predykcji. Błąd predykcji $\|\hat{x}(\lambda) - x(\lambda)\|$ jest ściśle związany z długością kroku homotopii. Ponieważ w omawianym algorytmie

$$\hat{x}(\lambda) = x(0) = x^{(o)} \qquad \forall\lambda \in \langle 0,\bar{\lambda}\rangle\,,$$

więc, jeżeli x jest jedyną ścieżką w pewnej dziedzinie D, to

$$\|\hat{x}(\lambda) - x(\lambda)\| = \|x(\lambda) - x(0)\| = \tag{11}$$

$$= \left\|\int_0^{\lambda} \dot{x}(t)dt\right\| \leqslant \lambda \cdot \sup_{t\in\langle 0,\bar{\lambda}\rangle} \|\dot{x}(t)\| = \lambda\cdot\eta\,.$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej [2] otrzymuje się:

$$H(\hat{x}(\lambda),\lambda) = H(x(\lambda),\lambda) + \int_0^1 H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)\beta(\lambda,t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)\beta(\lambda,t)\,dt, \tag{12}$$

gdzie:

$$\alpha(\lambda,t) = x(\lambda) + t(\hat{x}(\lambda) - x(\lambda))$$

$$\beta(\lambda,t) = \hat{x}(\lambda) - x(\lambda)$$

$H_x(x,\lambda)$ oznacza macierz Jacobiego.

Wynika stąd następujące oszacowanie członu korekcji we wzorze (8)

$$\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda)\right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 \left[H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)\beta(\lambda,t)\right] dt\right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 \left[H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}(H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)-H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda))+I\right] (\hat{x}(\lambda)-x(\lambda))\,dt\right\|$$

$$\leqslant \left\| \hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\| \cdot \left\| \int_0^1 \left[H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}(H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)-H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda))+ I\right] dt\right\| .$$

Jeżeli przyjąć, że $\forall\ y,z \in D,\quad \lambda \in \langle 0,1\rangle$ zachodzi

$$\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}(H_x(y,t) - H_x(z,t))\right\| \leqslant \omega \left\|y-z\right\|, \tag{13}$$

te

$$\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda) \right\| \leqslant \left\| \hat{x}(\lambda) - x(\lambda) \right\| \int_0^1 \left[1 + \omega \left\| \alpha(\lambda,t) - \hat{x}(\lambda) \right\| \right] dt$$

$$= \left\| \hat{x}(\lambda) - x(\lambda) \right\| \int_0^1 \left[1 + \omega(1-t) \left\| \hat{x}(\lambda) - x(\lambda) \right\| \right] dt$$

$$= \left\| \hat{x}(\lambda) - x(\lambda) \right\| \left[1 + \tfrac{1}{2}\omega \left\| \hat{x}(\lambda) - x(\lambda) \right\| \right].$$

Uwzględniając oszacowanie (11) błędu predykcji otrzymuje się

$$\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda) \right\| \leqslant \eta\lambda \left(1 + \tfrac{1}{2}\omega\eta\lambda \right). \tag{14}$$

Twierdzenie Newtona-Kantorowicza [2] zapewnia zbieżność metody Newtona, jeżeli

$$\omega \left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda) \right\| \leqslant \tfrac{1}{2}. \tag{15}$$

Uwzględniając wzory (14) i (15) otrzymamy:

$$\omega\eta\lambda \left(1 + \tfrac{1}{2}\omega\eta\lambda \right) \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

A stąd wynika, że metoda będzie zbieżna, jeśli $\bar{\lambda} \in \langle 0, \lambda_{max} \rangle$, gdzie

$$\lambda_{max} = \frac{\sqrt{2}-1}{\omega\eta}. \tag{16}$$

Uzyskany wynik może stanowić podstawę doboru kroku homotopii, jeżeli globalne wielkości ω i η zostaną zastąpione przez ich lokalne estymatory $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\eta}_i$ szacowane w czasie obliczeń dla $\lambda = \lambda_i$.
Wtedy

$$\left[\bar{\lambda}_{max} \right]_i = \frac{\sqrt{2}-1}{\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\eta}_i}. \tag{17}$$

Ze względu na globalny charakter ω i η winny być spełnione nierówności:

$$\tilde{\omega}_i < \omega \quad , \quad \tilde{\eta}_i \leqslant \eta \quad . \tag{18}$$

Wynika stąd, że

$$[\bar{\lambda}max]_1 \geqslant \lambda max = \frac{\sqrt{2}-1}{\omega\eta}, \tag{19}$$

to znaczy, że dobierany krok może okazać się większy od oszacowanego teoretycznie. Zatem metoda doboru kroku w praktyce winna zawierać etap przewidywania i ewentualnej korekcji (redukcji) jego wielkości.

Wartość λ_{max}, a tym samym kroku homotopii, może zostać zwiększona, jeśli przybliżenia początkowe wybiera się według wzoru

$$\hat{x}(\lambda) = x^{(o)} + \lambda \dot{x}(0) = x^{(o)} - \lambda\, H_x(x^{(o)},0) H_\lambda\, (x^{(o)},0). \tag{20}$$

Błąd predykcji można wtedy oszacować, przy założeniu że

$$\| \dot{x}(\lambda) - x(0)\| \leqslant L.\lambda \qquad \forall \in \langle 0,\bar{\lambda}\rangle ,$$

następująco:

$$\| \hat{x}(\lambda) - x(\lambda)\| = \|x(0) + \lambda \dot{x}(0) - x(\lambda)\| = \|\int_0^\lambda \dot{x}(t)dt - \lambda\dot{x}(0)\| =$$

$$= \|\int_0^\lambda (\dot{x}(t) - \dot{x}(0))dt\| \leqslant \int_0^\lambda \|\dot{x}(t) - \dot{x}(0)\|\, dt \leqslant L.\int_0^\lambda t\, dt = \tag{21}$$

$$= \frac{L}{2}\lambda^2 = \eta_2 \lambda^2 .$$

Uwzględnienie tego oszacowania w zależnościach (14) i (15) prowadzi do rezultatu

$$\lambda_{max} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\omega\eta_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Jeżeli przyjąć, że $\eta_1 = \eta_2$, to widać, że λ_{max} ulega zwiększeniu.

LITERATURA

[1] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.

[2] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York 1970.

[3] Garczarczyk Z.: Metoda kontynuacji a dyskretne obwody równoważne w analizie nieliniowych obwodów rezystancyjnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 98, 1986.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

О ДЛИНЕ ШАГА В ДИСКРЕТНОМ МЕТОДЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Р е з ю м е

В статье представлена параметрическая оценка максимальной длины шага в дискретном методе продолжения решения по параметру, связанным с алгоритмом решения системы узловых уравнений, описывающих нелинейную резистивную цепь. Показано, что в расчетной практике это увеличение нужно корректировать. Указано на возможность увеличения длины шага.

ABOUT STEPSIZE IN THE DISCRETE CONTINUATION METHOD

S u m m a r y

In the paper a stepsize estimate for discrete contimation method related to the algorithm of the solution of node equations for nonlinear resistive networks is presented on a theoretical basis. It is shown that in numerical practice a stepsize quantity should be corrected. A further possibility to increase the estimate is shown.