ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Andrzej DRYGAJŁO

Instytut Elektroniki
Politechniki Śląskiej

SPECJALNE UKŁADY ORTOGONALNE DO FILTRACJI SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę generowania ortogonalnych macierzy transformujących i sposób bezpośredniego wykorzystania ich do budowy układów dyskretnych służących do pasmowo-przepustowej i pasmowo-zaporowej filtracji sygnałów. Podano opis czasowy i widmowy tych układów.

1. Wprowadzenie

W przetwarzaniu widmowym sygnałów dyskretnych najczęściej wykorzystywanym ortogonalnym układem ciągów bazowych, także ze względu na istnienie efektywnych algorytmów szybkiej transformacji Fouriera (FFT), jest układ zespolonych ciągów wykładniczych [1].

Obecny rozwój technologii elektronicznych układów cyfrowych sprawia, że coraz częściej można zaobserwować dążenie do zastosowania innych układów ortogonalnych, przede wszystkim rzeczywistych, dla których można zbudować algorytmy szybkich transformacji [2]. W ostatnich latach można zauważyć również tendencję do eliminowania z algorytmów przetwarzania sygnałów dyskretnych operacji mnożenia [3] i projektowania filtrów w przestrzeniach wartości całkowitych [4].

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania stanowią próbę uogólnienia wyników bądań z zakresu generowania układów ortogonalnych ciągów, przyjmujących jedynie wartości 1, -1 i 0 w przedziale określoności, jako ciągów bazowych w widmowym przetwarzaniu sygnałów [5]. Uogólnienie obejmuje układy ortogonalne nie zawierające ciągu stałego. Brak ciągu stałego sugeruje zastosowanie tego typu układów ortogonalnych do budowy dyskretnych diadycznych układów liniowych [6] służących do pasmowo-przepustowej i pasmowo-zaporowej filtracji sekwencyjnościowej sygnałów [7].

2. Specjalne układy ortogonalne ciągów trójwartościowych

Dogodne przedstawienie układów ortogonalnych dla bezpośredniego wykorzystania w przetwarzaniu sygnałów dyskretnych daje ujęcie macierzowe [1]. Zbiór N pierwszych ciągów podaje macierz ortogonalna o wymiarach N×N, w której m-ty wiersz zawiera wyrazy m-tego ciągu dla n = 0,1,2,...,N-1, gdzie $N = 2^p$ (p = 0,1,2,...). Tak zbudowana macierz stanowi macierz transformującą w zapisie dyskretnej transformacji względem danego układu ortogonalnego.

Elementy ortogonalne macierzy transformujących zawierających ciągi trójwartościowe mogą być zdefiniowane przy wykorzystaniu binarnego zapisu wskaźnika wierszy m i wskaźnika kolumn n. Szczególne macierze ortogonalne, dla których istnieje zwięzły zapis definiujący elementy macierzy, to macierz Hadamarda $\underline{H}$ i macierz jednostkowa $\underline{I}$. Macierz Hadamarda zawiera ortogonalne ciągi Walsha w uporządkowaniu naturalnym, natomiast macierz jednostkowa będąca macierzą transformującą tożsamościowo stanowi układ ortogonalny ciągów impulsowych.

Elementy macierzy Hadamarda $\underline{H}$ i macierzy jednostkowej $\underline{I}$ o wymiarach NxN definiują wzory:

$$h(m,n) = \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{m_i n_i}, \tag{1}$$

$$j(m,n) = \prod_{i=0}^{p-1} \delta_{m_i n_i}, \tag{2}$$

gdzie h(m,n), j(m,n) - elementy odpowiednio macierzy $\underline{H}$ i $\underline{I}$ w m-tym wierszu i n-tej kolumnie, m_i, n_i - współczynniki binarnego rozwinięcia liczb m i n, $\delta_{m_i n_i}$ - symbol Kroneckera.

Dla N=8 macierze $\underline{H}$ i $\underline{I}$ mają postać:

$$\underline{H} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{matrix} & \begin{matrix} n_2\\ n_1\\ n_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0\,0\,0\\ 0\,0\,1\\ 0\,1\,0\\ 0\,1\,1\\ 1\,0\,0\\ 1\,0\,1\\ 1\,1\,0\\ 1\,1\,1 \end{matrix} \\ & m_2m_1m_0 \end{array} \qquad \underline{I} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{matrix} & \begin{matrix} n_2\\ n_1\\ n_0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0\,0\,0\\ 0\,0\,1\\ 0\,1\,0\\ 0\,1\,1\\ 1\,0\,0\\ 1\,0\,1\\ 1\,1\,0\\ 1\,1\,1 \end{matrix} \\ & m_2m_1m_0 \end{array}$$

Dokonując faktoryzacji macierzy $\underline{\underline{H}}$ o wymiarach NxN, $N = 2^p$ otrzymuje się iloczyn p macierzy rzadkich, z których każda jest macierzą ortogonalną, o elementach, które mogą być definiowane wykorzystując zapisy (1) i (2). Dalsze rozważania będą ilustrowane przykładami macierzy o wymiarach 8x8. W wyniku faktoryzacji macierzy $\underline{\underline{H}}$ otrzymuje się:

$$
\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix}
$$

$$
\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}_3 \cdot \underline{\underline{H}}_2 \cdot \underline{\underline{H}}_1 .
$$

Elementy macierzy $\underline{\underline{H}}_1$, $\underline{\underline{H}}_2$, $\underline{\underline{H}}_3$ mogą być definiowane następująco:

$$
h_1(m,n) = \prod_{i=1,2} \delta_{m_i n_i} \cdot (-1)^{m_0 n_0}
$$

$$
h_2(m,n) = \prod_{i=0,2} \delta_{m_i n_i} \cdot (-1)^{m_1 n_1}
$$

$$
h_3(m,n) = \prod_{i=0,1} \delta_{m_i n_i} \cdot (-1)^{m_2 n_2} .
$$

Z kolei każda z macierzy będąca iloczynem macierzy powyższych $\underline{\underline{H}}_4 = \underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_1$, $\underline{\underline{H}}_5 = \underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{H}}_3$, $\underline{\underline{H}}_6 = \underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_3$ jest również macierzą ortogonalną:

$$
\underline{\underline{H}}_4 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&-1&1&-1&0&0&0&0\\ 1&1&-1&-1&0&0&0&0\\ 1&-1&-1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&0&0&0&1&1&-1&-1\\ 0&0&0&0&1&-1&-1&1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{H}}_5 = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&-1&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&-1&0&0&1&-1\\ 1&1&0&0&-1&-1&0&0\\ 1&-1&0&0&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&-1&-1\\ 0&0&1&-1&0&0&-1&1 \end{bmatrix} \quad H_6 = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&-1&0&1&0&-1&0\\ 0&1&0&-1&0&1&0&-1\\ 1&0&1&0&-1&0&-1&0\\ 0&1&0&1&0&-1&0&-1\\ 1&0&-1&0&-1&0&1&0\\ 0&1&0&-1&0&-1&0&1 \end{bmatrix}
$$

Elementy tych macierzy definiują wzory:

$$h_4(m,n) = \delta_{m_2 n_2} \prod_{i=0,1} (-1)^{m_i n_i}$$

$$h_5(m,n) = \delta_{m_1 n_1} \prod_{i=0,2} (-1)^{m_i n_i}$$

$$h_6(m,n) = \delta_{m_0 n_0} \prod_{i=1,2} (-1)^{m_i n_i}$$

Ciągi trójwartościowe otrzymane w macierzach typu $\underline{H}$ oraz $\underline{H}_1 \div \underline{H}_6$ stanowią podstawę budowy specjalnych układów ortogonalnych. Dozwolone są takie kombinacje tych ciągów, dla których utworzoną z nich macierz ortogonalną N-wymiarową można rozłożyć na iloczyn p macierzy rzadkich ortogonalnych N-wymiarowych. Przykładowe dwie macierze dla N=8 utworzone w powyższy sposób mają postać:

$$\underline{D1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1 \\ 0&0&1&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&-1&0&0 \\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D2} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1 \\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{bmatrix}$$

W powyższy sposób można otrzymać układy ortogonalne nie zawierające ciągu stałego złożonego z jedności, jak to miało miejsce dla układów ortogonalnych klasycznych. Zatem przedstawiona w niniejszej pracy metoda rozszerza klasę układów ortogonalnych złożonych z ciągów trójwartościowych, przyjmujących wartości 1,-1 i 0 w przedziale określoności [5].

3. Zastosowanie specjalnych układów ortogonalnych w algorytmach filtracji sygnałów dyskretnych

Wykorzystując macierzową postać utworzonych w niniejszej pracy układów ortogalnych jako macierzy transformujących, można sformułować definicje dyskretnych transformacji prostej i odwrotnej względem tych układów w postaci równań macierzowych:

$$\underline{X}_D = \frac{1}{N} \underline{D}\, \underline{x} , \tag{3}$$

$$\underline{x} = N\, \underline{D}^{-1} \underline{X}_D , \tag{4}$$

gdzie:

$\underline{X}_D$ - wektor dyskretnego widma o elementach $\underline{X}_D(m)$,
$\underline{x}$ - wektor dyskretnego sygnału o elementach $x(n)$,
$\underline{D}$ - ortogonalna macierz transformująca o wymiarach NxN,
$\underline{D}^{-1}$ - macierz odwrotna do macierzy $\underline{D}$.

Praktyczna przydatność transformacji (3) i (4) wynika z możliwości budowy uniwersalnego algorytmu szybkich transformacji zarówno względem wykorzystywanych dotychczas układów hybrydowych ciągów Hadamarda-Haara [8], jak i względem układów bazowych otrzymanych w niniejszej pracy.

Transformacja sygnału dyskretnego danego w punktach $n = 0,1,2,\dots,N-1$, gdzie $N = 2^p$, $p = 0,1,2,\dots$ do przestrzeni danego układu ortogonalnego $\underline{D}$ wymaga jedynie wykonania od $2(N-1)$ do $N\log_2 N - N/2$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych przy wykorzystaniu algorytmu szybkich transformacji.

W pracy [7] przedstawiono zasadę budowy dyskretnych układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego wykorzystującą algorytmy szybkich transformacji bazujące na układach ortogonalnych ciągów trójwartościowych. Macierze ortogonalne przedstawione w niniejszej pracy mogą być również użyte do budowy tego typu układów liniowych. Proces przetwarzania opisany jest wtedy równaniami macierzowymi:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{D}^T \underline{D}\, \underline{x} , \tag{5}$$

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{D}_1^T \dots \underline{D}_p^T \underline{D}_p \dots \underline{D}_1 \underline{x} , \tag{6}$$

gdzie:

$\underline{x}$, $\underline{y}$ - wektory dyskretnych sygnałów odpowiednio wejściowego i wyjściowego,
$\underline{D}$ - ortogonalna macierz transformująca o wymiarach NxN,

$\underline{D}_i$ - ortogonalne macierze rzadkie,

$\underline{D}^T$, $\underline{D}_i^T$ - macierze transponowane względem macierzy $\underline{D}$, $\underline{D}_i$.

Tak skonstruowane układy diadyczne opisują algorytm ortogonalnej sekwencyjnościowej filtracji cyfrowej w przestrzeni ciągów Walsha, dla którego elementy diagonalne macierzy filtrującej $\underline{G}^W$ przyjmują wartości będące całkowitymi ujemnymi potęgami liczby 2 [8]. Ponadto pozwalają one na tłumienie składowej stałej, co nie było dotychczas możliwe przy wykorzystaniu jedynie hybrydowych ciągów Hadamarda-Haara. Przykładowe 8-punktowe algorytmy wykorzystujące macierze $\underline{D1}$ i $\underline{D2}$ realizują dwie charakterystyki widmowe filtrów sekwencyjnościowych odpowiednio o charakterze środkowo-przepustowym i środkowo-zaporowym.

$$\underline{G1}^W = \mathrm{diag}\left[1/2, 1/2, 1, 1, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4\right]$$

$$\underline{G2}^W = \mathrm{diag}\left[1/2, 1, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1, 1/2\right].$$

Układy te mogą być opisane również w dziedzinie czasowej za pomocą odpowiedzi impulsowej układu [6]:

$$\underline{g1}' = \left[1/2, 1/4, -1/8, -1/8, 0, 0, 0, 0\right]$$

$$\underline{g2}' = \left[1/2, 0, 1/4, 0, -1/8, 0, -1/8, 0\right]$$

Złożoność obliczeniowa takich realizacji wynosi jedynie od 4(N-1) do $2N\log_2 N - N$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych.

4. Podsumowanie

W pracy rozszerzono metodę wyznaczania układów ortogonalnych ciągów trójwartościowych o sposób generowania układów ortogonalnych nie zawierających ciągu stałego. Pozwoliło to na znaczne rozszerzenie możliwości budowy dyskretnych diadycznych układów liniowych, wykorzystujących do realizacji bezpośrednio algorytmy szybkich transformacji. Rozwiązanie to prowadzi do realizacji układów filtrujących o charakterze pasmowo-przepustowym i pasmowo-zaporowym aproksymujących charakterystyki sekwencyjnościowe za pomocą elementów z przestrzeni całkowitych potęg liczby 2 przy jednoczesnym zmniejszeniu złożoności obliczeniowej.

Metodę przedstawioną w niniejszej pracy można zastosować do budowy cyfrowych filtrów 2-D w sposób podany w pracach [9, 10].

LITERATURA

[1] Ahmed N., Rao K.R.: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin 1975.

[2] Elliott D.F., Rao K.R.: Fast Transforms - Algorithms, Analyses, Applications. Academic Press, New York 1982.

[3] Lüder E., Höfer K.: Fast Digital Filters without Multipliers. AEÜ, Band 36, Heft 7/8, 1982, ss. 275-278.

[4] Lim Y.C., Parker S.R., Constantinides A.G.: Finite Wordlength FIR Filter Design Using Integer Programming Over Discrete Coefficient Space. IEEE Trans. ASSP-30, August 1982, ss. 661-664.

[5] Drygajło A.: Zastosowanie ortogonalnych funkcji trójwartościowych do analizy widmowej sygnałów dyskretnych. VI SPETO, Gliwice-Ustroń 1983, ss. 53-62.

[6] Drygajło A.: Dyskretne diadyczne układy liniowe. VII SPETO, Gliwice--Ustroń 1984, ss. 207-215.

[7] Drygajło A.: Ortogonalne filtry cyfrowe. VII KK TOiUE, Kazimierz Dolny 1984, ss. 306-311.

[8] Drygajło A.: Zastosowanie szybkich transformacji bazujących na funkcjach schodkowych do przetwarzania sygnałów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1983.

[9] Drygajło A., Ihnatowicz J.: On the Construction of Two-Dimensional Digital Filters by Fast Hadamard-Haar Hybrid Transforms. ECCTD 83, Stuttgart 1983, ss. 450-453.

[10] Drygajło A.: Dyadic Sequency Filters in Image Processing. Proc. of the First Image Symposium, Biarritz, 1984, tom 1, ss. 519-523.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Karol Rumatowski

Wpłynęło do Redakcji 15 czerwca 1985 r.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе представлен метод генерации ортогональных матриц преобразований и их прямого применения в строении дискретных систем для полосовой и полосно-заграждающей фильтрации сигналов. Системы описаны во временной и спектральной областях.

SPECIAL ORTHOGONAL SYSTEMS FOR DISCRETE SIGNAL FILTERING

S u m m a r y

In the paper a method of generating of orthogonal transform matrices and their application to discrete system construction for bandpass and bandstop signal filtering is presented. Systems are described in time and spectral domain.