ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Andrzej DRYGAJŁO
Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

DECYMACJA SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie. W pracy rozważono zagadnienia związane z konwersją częstotliwości próbkowania sygnałów dyskretnych. Zwrócono szczególną uwagę na problemy filtracji cyfrowej związane ze zmniejszeniem częstotliwości próbkowania, które wynikają z potrzeby eliminacji zjawiska stroboskopowego. Na początku omówiono teoretyczny model układów służących do decymacji, a następnie przedstawiono szereg struktur, które mogą być efektywnie użyte do budowy decymatorów. Rozważono metody projektowania antystroboskopowych cyfrowych filtrów SOI, a na końcu pracy wykazano, że istnieje możliwość budowy filtrów cyfrowych SOI o strukturze kaskadowej zwiększającej efektywność przetwarzania filtrów antystroboskopowych.

1. Wprowadzenie

W wielu zastosowaniach cyfrowego przetwarzania sygnałów zachodzi potrzeba zwiększenia częstotliwości próbkowania sygnału dyskretnego (interpolacja) lub zmniejszenia (decymacja). Oba procesy są całkowicie dyskretne i dotyczą zarówno sygnałów dolnopasmowych, jak i pasmowych. Z procesem konwersji częstotliwości próbkowania jest ściśle związany proces filtracji, mający na celu wyeliminowanie efektu stroboskopowego. W pracy rozpatrzono problemy liniowej nierekursywnej filtracji cyfrowej związane przede wszystkim z procesem decymacji. Dąży się do otrzymania struktury filtru o liniowej fazie dającej jednocześnie możliwości efektywnej zmiany częstotliwości odcięcia.

2. Konwersja częstotliwości próbkowania

Konwersja częstotliwości próbkowania jest cyfrowym procesem zmiany częstotliwości próbkowania $F = 1/T$ na częstotliwość próbkowania $F' = 1/T'$, gdzie T, T' są okresami próbkowania.

Zmniejszenie częstotliwości próbkowania zachodzi, gdy spełnione są nierówności:

$$F' < F \tag{1}$$

lub

$$T' > T . \tag{2}$$

Jeżeli stosunek

$$\frac{T'}{T} = \frac{F}{F'} = D \tag{3}$$

określony jest za pomocą współczynnika D, który jest liczbą całkowitą, to proces konwersji jest procesem decymacji [1]. Analiza procesu decymacji w dziedzinie częstotliwości pozwala na określenie zależności, jakie muszą być spełnione, aby nie wystąpił efekt stroboskopowy. Z twierdzenia o próbkowaniu wiadomo, że sygnał ciągły x(t) o ograniczonym widmie, dla którego $X(f) = 0$ dla $|f| > F_M$, jest jednoznacznie określony przez swoje próbki x(iT), i 0, ± 1, ± 2,..., jeżeli

$$F > 2 F_M . \tag{4}$$

Częstotliwość

$$F_N = F/2 \tag{5}$$

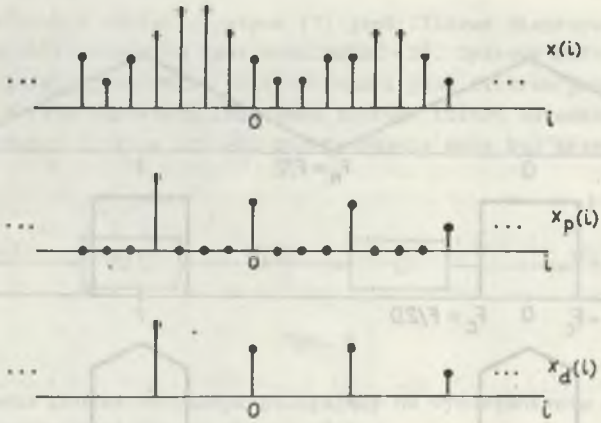
jest częstotliwością Nyquista.

W dziedzinie czasu proces decymacji ilustruje rys. 1.

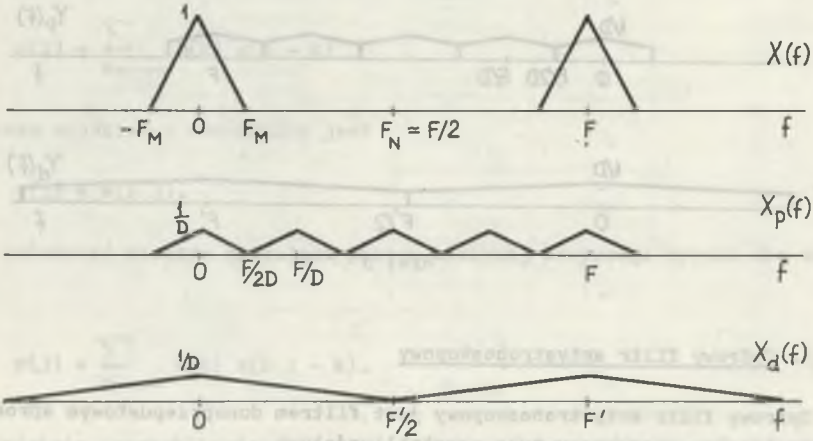
Sygnał x(i) powstaje w wyniku próbkowania sygnału ciągłego z częstotliwością próbkowania F . $x_p(i)$ powstaje w wyniku próbkowanie sygnału x(i) z częstotliwością F/D, a $x_d(i)$ w wyniku procesu decymacji. Sygnał $x_d(i)$ powstaje w wyniku D-krotnego zmniejszenia częstotliwości próbkowania.

W dziedzinie częstotliwości proces decymacji ilustruje rys. 2. X(f), $X_p(f)$ i $X_d(f)$ są widmami częstotliwościowymi sygnałów x(i), $x_p(i)$ i $x_d(i)$. Z rys. 2 można wywnioskować, że przy D-krotnym zmniejszeniu częstotliwości próbkowania efekt stroboskopowy nie wystąpi, jeżeli

$$F/D > 2 F_M . \tag{6}$$

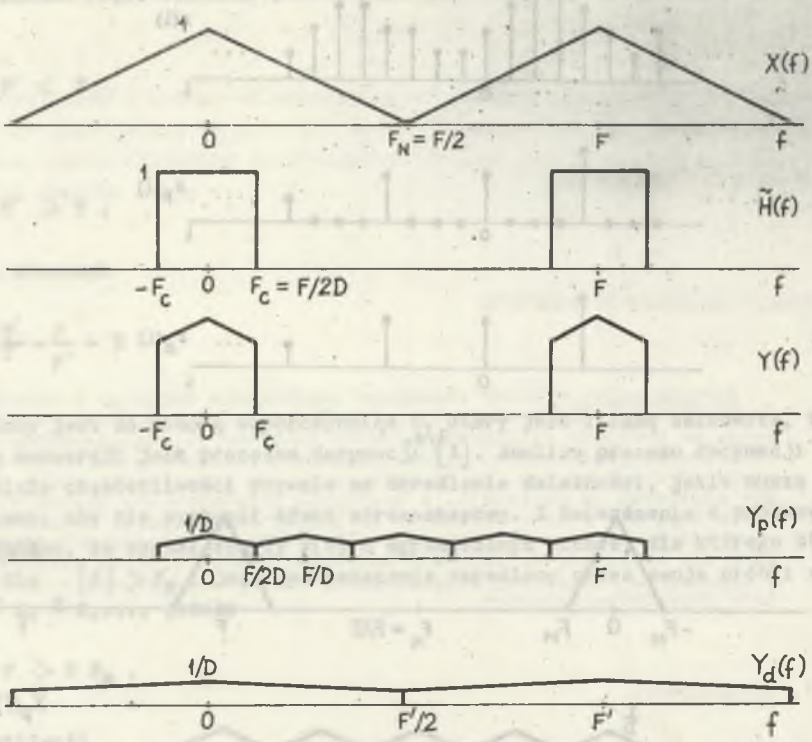


Rys. 1



Rys. 2

Przy założeniu, że częstotliwość próbkowania F jest tak dobrana, że $F = 2F_M$, proces decymacji prowadzi do pojawienia się efektu stroboskopowego. Aby tego uniknąć, należy przed D-krotną zmianą częstotliwości próbkowania zastosować idealny filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości odcięcia F/2D. Ilustruje to rys. 3.



Rys. 3

3. Cyfrowy filtr antystroboskopowy

Cyfrowy filtr antystroboskopowy jest filtrem dolnoprzepustowym aproksymującym idealną charakterystykę częstotliwościową

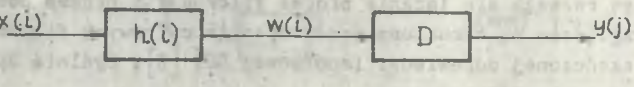
$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leqslant F/2D \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{7}$$

Odpowiedź impulsowa $\tilde{h}(i)$ odpowiadająca charakterystyce $\tilde{H}(f)$ wyraża się wzorem

$$\tilde{h}(i) = \frac{\sin(\pi i/D)}{(\pi i/D)} \tag{8}$$

dla $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$.

Filtr cyfrowy o charakterystyce (7) jest filtrem nieprzyczynowym, a tym samym nie spełnia warunków realizowalności [2]. Cyfrowy filtr antystroboskopowy spełniający warunki realizowalności jest filtrem przyczynowym i stabilnym. Jeżeli odpowiedź impulsowa takiego filtru oznaczona jest przez h(i), to schemat blokowy procesu przetwarzania może być przedstawiony jak na rys. 4.



Rys. 4

D oznacza proces decymacji polegający na wyodrębnieniu każdej D-tej próbki z sygnału wyjściowego filtru w(i).

Zakładając, że filtr antystroboskopowy jest filtrem liniowym niezmiennym względem przesunięcia, otrzymuje się zależność

$$w(i) = \sum_{k=-\infty} h(k)\, x(i - k) \tag{9}$$

Sygnałem wyjściowym decymatora jest

$$y(j) = w(D\, j). \tag{10}$$

Stąd zależność czasowa opisująca proces liniowej decymacji wyraża się wzorem

$$y(j) = \sum_{k=-\infty} h(k)\, x(D\, j - k). \tag{11}$$

W dziedzinie częstotliwościowej proces liniowej decymacji opisuje zależność:

$$Y(f') = \frac{1}{D}\left(H(f'/D)\, X(f'/D) + H((f' - F')/D)\, X((f' - F')/D) + \ldots\right) \tag{12}$$

Cyfrowy filtr antystroboskopowy powinien w maksymalnym stopniu zapewnić spełnienie zależności

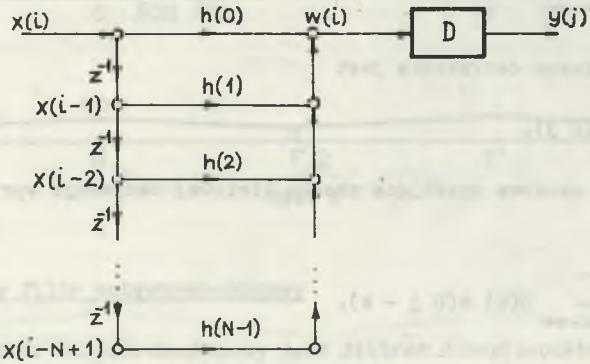
$$Y(f') \simeq \frac{1}{D}\, X(f'/D). \tag{13}$$

Bezpośrednie zastosowanie schematu przetwarzania z rys. 4 wymaga obliczania próbek sygnału w(i) z częstotliwością próbkowania F sygnału wejścio-

wego x(i), gdy sygnał wyjściowy y(j) składa się z próbek powtarzających się częstotliwością F′ D-krotnie mniejszą. Próbki y(j) powstają przez pozostawienie co D-tej próbki przebiegu w(i). Pozostałe obliczone próbki sygnału w(i) są najczęściej nie wykorzystane. Podejście takie jest uzasadnione jedynie w przypadku konieczności sygnalizacji stopnia spełnienia warunku Shannona-Kotielnikowa. Z punktu widzenia procesu decymacji podejście powyższe jest nieefektywne. W celu zwiększenia efektywności przetwarzania filtru antystroboskopowego rozważa się łącznie proces filtracji i proces decymacji. Dogodne w tym względzie są struktury przetwarzania cyfrowych filtrów nierekursywnych o skończonej odpowiedzi impulsowej SOI [3]. Ogólnie opisane są one za pomocą równania różnicowego

$$w(i) = h(0)\,x(i) + h(1)\,x(i-1) + \ldots + h(N-1)\,x(i-N+1). \qquad (14)$$

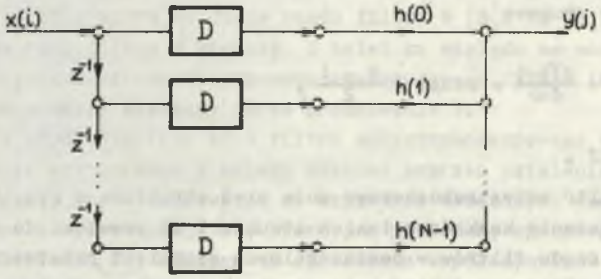
Filtry SOI są filtrami przyczynowymi i absolutnie stabilnymi dla dowolnych skończonych wartości współczynników odpowiedzi impulsowej h(i). Decymator wykorzystujący filtr SOI ma strukturę opisaną grafem przepływu sygnału z rys. 5.



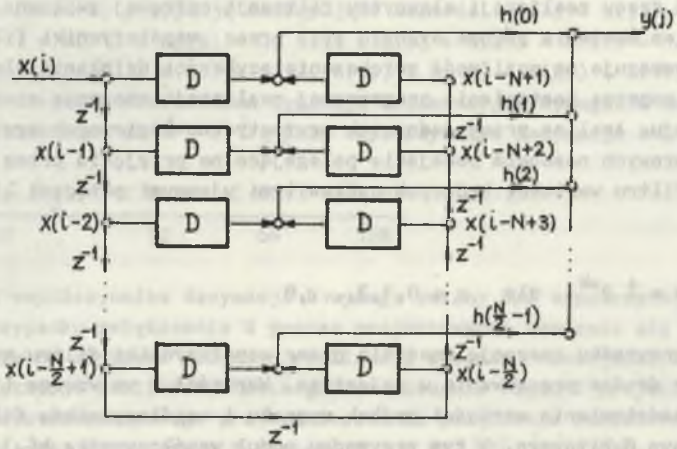
Rys. 5

Dla obliczenia jednej próbki sygnału w(i) trzeba wykonać w czasie okresu T N operacji mnożenia przez współczynniki h(0), h(1), ..., h(N - 1) oraz N operacji dodawania. Wymagana szybkość obliczeń może być zmniejszona dzięki możliwej modyfikacji grafu z rys. 5 w sposób przedstawiony na rys. 6 [4]. W przypadku zastosowania struktury z rys. 6 szybkość przetwarzania jest zmniejszona D-krotnie, tzn. N operacji mnożenia i dodawania potrzebnych do obliczenia jednej próbki y(j) musi być wykonanych w czasie D.T = T′. W celu dalszego zwiększenia efektywności przetwarzania można wykorzystać strukturę filtrów SOI o liniowej fazie. Są to filtry, dla których

$$h(i) = h(N-1-i). \qquad (15)$$



Rys. 6



Rys. 7

Strukturę przetwarzania dla decymatora z filtrem SOI o liniowej fazie przedstawia rys. 7.

Realizacja struktury z rys. 7 wymaga dwa razy mniej operacji mnożenia oraz dwa razy mniejszego obszaru pamięci dla współczynników h(.) niż realizacja struktury z rys. 6. Z punktu widzenia procesu decymacji korzystna jest również właściwość liniowości fazy. W tym przypadku, jeżeli charakterystyka częstotliwościowa filtru jest określona wzorem

$$H(\omega) = |H(\omega)| \, e^{j\varphi(\omega)} , \tag{16}$$

to opóźnienie grupowe

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \text{const} = \frac{N-1}{2}, \tag{17}$$

gdzie $\omega = 2\pi f$.

Cyfrowy filtr antystroboskopowy może mieć strukturę z rys. 5 ÷ 7 lub stanowić połączenie kaskadowe takich struktur, co prowadzi do znacznego zmniejszenia rzędu filtrów w poszczególnych stopniach przetwarzania [5][6].

Analizując algorytmy filtrów antystroboskopowych o strukturach z rys. 5 ÷ 7, można stwierdzić, że stosując klasyczne podejście do realizacji filtru cyfrowego najszybsze algorytmy otrzymuje się przy stosowaniu arytmetyki stałoprzecinkowej. Z analizy tych algorytmów wynika również, że przeważająca część czasu realizacji algorytmu filtracji cyfrowej związana jest z wykonywaniem mnożenia próbek sygnału x(i) przez współczynniki filtru h(.). Fakt ten wskazuje na możliwość zwiększenia szybkości działania algorytmu filtracji poprzez zastąpienie programowej realizacji mnożenia operacją innego rodzaju. Analiza pracy jednostek arytmetyczno-logicznych systemów mikroprocesorowych nasunęła podejście polegające na przyjęciu przez współczynniki filtru wartości będących całkowitymi ujemnymi potęgami liczby 2 [7].

$$h(i) = \pm 2^{-k} \quad \text{dla} \quad k = 0,1,2,\ldots,8 \tag{18}$$

W tym przypadku operację mnożenia przez współczynniki filtru można realizować na drodze przesuwania w rejestrze. Wartości k we wzorze (18) wynikają z przedstawienia wartości próbek sygnału i współczynników filtru za pomocą słowa 8-bitowego. W tym przypadku moduł współczynnika h(.) może przyjmować 9 różnych wartości 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 0, gdzie wartość 0 odpowiada przesunięciu o 8 pozycji w prawo.

Proces syntezy i projektowania filtrów antystroboskopowych o przedstawionych strukturach może być łatwo kontrolowany, ponieważ istnieje twierdzenie o optymalności dla filtrów SOI w sensie minimalnej wartości maksymalnego błędu w pasmach zaporowym i przepustowym [8]. W przypadku stosowania tego twierdzenia wymagania dla filtru doplnoprzepustowego przyjmują postać przedziałów tolerancji, jakie powinien spełniać pożądany filtr cyfrowy. Oznaczają one, że chcemy aproksymować wartość 1 w pasmie przepustowym $0 < f \leqslant f_1$ z błędem mniejszym niż δ_1, a także wartość 0 w pasmie zaporowym $f_2 \leqslant |f| \leqslant 0.5$. Ponieważ w większości metod projektowych częstotliwość próbkowania nie odgrywa żadnej roli w procedurach aproksymacyjnych, sposób polegający na określeniu wymagań filtru cyfrowego w wartościach częstotliwości znormalizowanej f/F w zakresie [0 - 0.5] jest najmniej kłopotliwy.

W przypadku filtru antystroboskopowego pożądane jest uzyskanie zadanych wartości δ_1 i δ_2 przy możliwie małej szerokości pasma przejściowego

$\Delta f = f_2 - f_1$. Należy przy tym zdawać sobie sprawę z tego, że dobór δ_1, δ_2 i Δf ma istotny wpływ na dobór rzędu filtru N [8]. Im δ_1, δ_2 i Δf mniejsze, tym rząd filtru N większy. Z kolei ze względu na możliwości czasowe danego systemu mikroprocesorowego realizującego filtr im większy rząd filtru N, tym większy wymagany okres próbkowania T.

Obliczenia współczynników h(.) filtru antystroboskopowego o zadanych δ_1 i δ_2 i wstępnie wyznaczonym N należy dokonać poprzez ustalenie $f_2 = F/2D$ i taką zmianę f_1, która doprowadzi do uzyskania założonych wartości δ_1 i δ_2. Do tego celu wykorzystuje się itercyjną procedurę opracowaną przez Parksa i McClellana [9], służącą do określenia współczynników o nieskończonej precyzji. W celu wyznaczenia współczynników będących całkowitymi ujemnymi potęgami liczby 2 można wykorzystać zmodyfikowane programy opracowane przez Bajserta [10].

Przykładowo, dla N = 32, $f_2 = 0.05$ (D = 10), $\delta_1 = 0.15$, $\delta_2 = 0.15$, współczynniki h(i) przyjmują następujące wartości: h(1) = h(32) = - 1/128, h(2) + h(4) = h(31) + h(29) = 0, h(5) = h(6) = h(28) = h(27) = 1/64, h(7) + h(9) = h(26) + h(24) = 1/32, h(10) + h(16) = h(23) + h(17) = 1/16. Z przeprowadzonych doświadczeń wynikają orientacyjne wymagania na rząd filtru N w zależności od δ_1 i δ_2 przy współczynniku decymacji $D \leqslant 10$:

δ_1, δ_2	< 0.15	< 0.1	< 0.01
N	32	64	128

Zmiana współczynnika decymacji D wymaga zmiany N/2 współczynników filtru. W przypadku zwiększenia N proces projektowania znacznie się wydłuża, a wymagania na szybkość obliczeń realizacji w czasie rzeczywistym zwiększają się. Istnieje możliwość znacznego zredukowania rzędu N projektowanego filtru antystroboskopowego przy zastosowaniu połączenia kaskadowego podfiltrów o liniowej fazie rzędu N równego 9 lub 11 [11] [12].

W przypadku metody pierwszej [11] wykorzystuje się w połączeniu kaskadowym dodatkowo operację dodawania i mnożenia przez współczynniki będące liczbami całkowitymi. Przykładowo, w ten sposób można uzyskać transmitancję filtru $H_0(f)$ używając do tego celu połączenia trzech podfiltrów $H_I(f)$ realizującego równanie

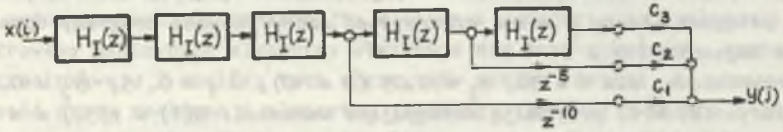
$$H_0(f) = H_I^2(f)\,(3 - 2\,H_I(f)) \,. \tag{19}$$

Dzięki takiej metodzie konstrukcji filtru antystroboskopowego uzyskuje się wygładzenie charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym i zaporowym przy jednoczesnym zwiększeniu stromości charakterystyki w pasmie przejściowym.

Metoda druga [12] opiera się na ogólnej zależności

$$H_0(f) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, H_I^{n+1}(f) \tag{20}$$

dla której współczynniki c_i wyznacza się przyrównując do zera pochodne do n-tej włącznie względem c_i wyrażenia (20) w jedności. Jedną z przykładowych realizacji tego typu filtru przedstawia rys. 8.



Rys. 8

Kaskadowe filtry antystroboskopowe zaprojektowane metodą pierwszą pozwalają na zmianę częstotliwości odcięcia filtru za pomocą współczynników podfiltru, natomiast za pomocą drugiej metody można również zmieniać częstotliwość odcięcia za pomocą dodatkowych współczynników c_i przy zmianie współczynnika decymacji D w zakresie $2 \leqslant D \leqslant 6$.

LITERATURA

[1] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Interpolation and Decimation of Digital Signals - A Tutorial Review. Proc. IEEE, vol. 69, no. 3, March 1981, ss. 300-331.

[2] Wojtkiewicz A.: Elementy syntezy filtrów cyfrowych. WNT, Warszawa 1984.

[3] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ, Warszawa 1979.

[4] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Optimum FIR Digital Filter Implementations for Decimation, Interpolation, and Narrow-Band Filtering. IEEE Trans. Acoust., Speecj, Signal Proc., vol. ASSP-23, no. 5, October 1975, ss. 444-456.

[5] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Further Considerations in the Design of Decimators and Interpolators. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-24, August 1976, ss. 296-311.

[6] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: A Program for Multistage Decimation, Interpolation, and Narrow-Band Filtering. (w) Programs for Digital Signal Processing. IEEE Press, New York 1979, ss. 8.3-1 - 8.3-14.

[7] Lim Y.C., Parker S.R.: FIR Filter Design Over a Discrete Powers - of--Two Coefficient Space. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-31, no. 3, June 1983, ss. 583-591.

[8] Herrman O., Rabiner L.R., Chan D.S.K.: Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Low-Pass Digital Filters. Bell System Technical Journal, vol. 52, no. 6, July-August 1973, ss. 769-799.

[9] McClellan J.H., Parks T.W., Rabiner L.R.: A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-21, December 1973, ss. 506-525.

[10] Bajsert W.: Synteza mikroprocesorowych filtrów cyfrowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1982.

[11] Kaiser J.F., Hamming R.W.: Sharpening the Response of Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-25, October 1977, ss. 415-422.

[12] Nakamura S., Yasuda S., Mitra S.K.: An Approach to the Realization of a Programmable FIR Digital Filter. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-33, no. 3, June 1985. ss. 741-744.

Recenzent:
Doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

ДЕЦИМАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе рассмотрены проблемы связанные с конверсией частоты дискретизации дискретных сигналов. Особенное внимание сосредоточено на проблемы цифровой фильтрации, связанные с уменьшением числа выборок, которые возникают из-за необходимости исключения эффекта наложения. В начале обсуждена теоретическая модель систем децимации а после этого представлены структуры, которые могут быть использованы в строении этих систем. Рассмотрены методы синтеза цифровых КИХ - фильтров исключающих искажения из-за наложения частот, и наконец представлены возможности строения каскадной формы цепи цифровых КИХ - фильтров для улучшения эффективности этих фильтров.

DECIMATION OF DISCRETE SIGNALS

S u m m a r y

In the paper problems of sampling rate conversion of discrete signals are considered. In particular, problems of digital filtering connected with sampling rate reduction, which results from the need of elimination of stroboscopic effect are presented. First a theoretic model for decimation systems is discussed and then it is shown how various structure can be derived to provide efficient implementations if these systems. Design techniques for FIR anty-aliasing digital filters are discussed, and finaly the ideas behind cascade of identical FIR subfilters implementations for increased efficiency are presented.