

Marian PASKO  
Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów  
Elektrotechniki i Ergoelektroniki  
Politechniki Śląskiej

### MODELOWANIE PORTRETÓW FAZOWYCH RÓWNAŃ STANU.

W OTOCZENIU PUNKTU OSOBLIWEGO ZA POMOCĄ SPRZĘŻONYCH WZAJEMNIE  
ŹRÓDEŁ STEROWANYCH I ELEMENTÓW RC

**Streszczenie.** W pracy pokazano pewien sposób syntezy portretów fazowych równań stanu rzędu drugiego w otoczeniu punktu osobliwego za pomocą sprzężonych wzajemnie źródeł sterowanych i elementów RC. Przeprowadzono analizę wybranej struktury spośród wielu modelujących portrety fazowe. Wybrana struktura, w zależności od rodzaju sprzężeń oraz użycia impedancji ujemnych (realizowanych z pomocą konwertera impedancji ujemnej), pozwala na modelowanie wszystkich możliwych portretów fazowych. Badania przeprowadzone na modelu doświadczalnym w pełni potwierdzają wyniki uzyskane teoretycznie.

#### 1. Wprowadzenie

Niech będzie dany układ równań różniczkowych zwyczajnych w postaci normalnej Cauchy'ego

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(x), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in DC R^n,$$

$$f_k \in \text{kl. } C_1(D).$$

Punktami osobliwymi układu równań (1) nazywamy te punkty obszaru  $D$ , w których nie są spełnione założenia twierdzeń gwarantujących jednoznaczność rozwiązania tego układu równań (np. twierdzenie Picarda [1]). Problem istnienia punktów osobliwych układu równań (1) jest ściśle związany z problemem istnienia rozwiązań układu równań algebraicznych:

$$f_k(x) = 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

gdyż rozwiązania tego układu równań określają zbiór punktów osobliwych dla równań (1), [1], [4]. Problem ten nie będzie w niniejszej pracy analizowany.

Badanie trajektorii układu równań (1) w otoczeniu punktu osobliwego  $x_0$  przeprowadza się często drogą analizy trajektorii układu równań pierwszego liniowego przybliżenia przyporządkowanego układowi równań (1).

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{l=1}^n H_{kl}(x_0)x_l(t), \quad x_0 \in DC R^n, \quad k, l \in \{1, \dots, n\}. \quad (3)$$

gdzie:

$x_0$  - izolowany punkt osobliwy układu równań (1),

$[H_{kl}]$  - macierz Jacobiego funkcji  $f_k$  w punkcie osobliwym  $x_0$ .

W teorii równań różniczkowych wykazuje się [1], [4], że układ równań (3) sprowadzić można za pomocą przekształcenia nieosobliwego

$$\xi_k = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l, \quad \det [a_{kl}] = 0, \quad (4)$$

do postaci kanonicznej:

$$\frac{d\xi_k(t)}{dt} = \sum_{l=1}^n J_{kl} \xi_l(t), \quad (5)$$

gdzie:

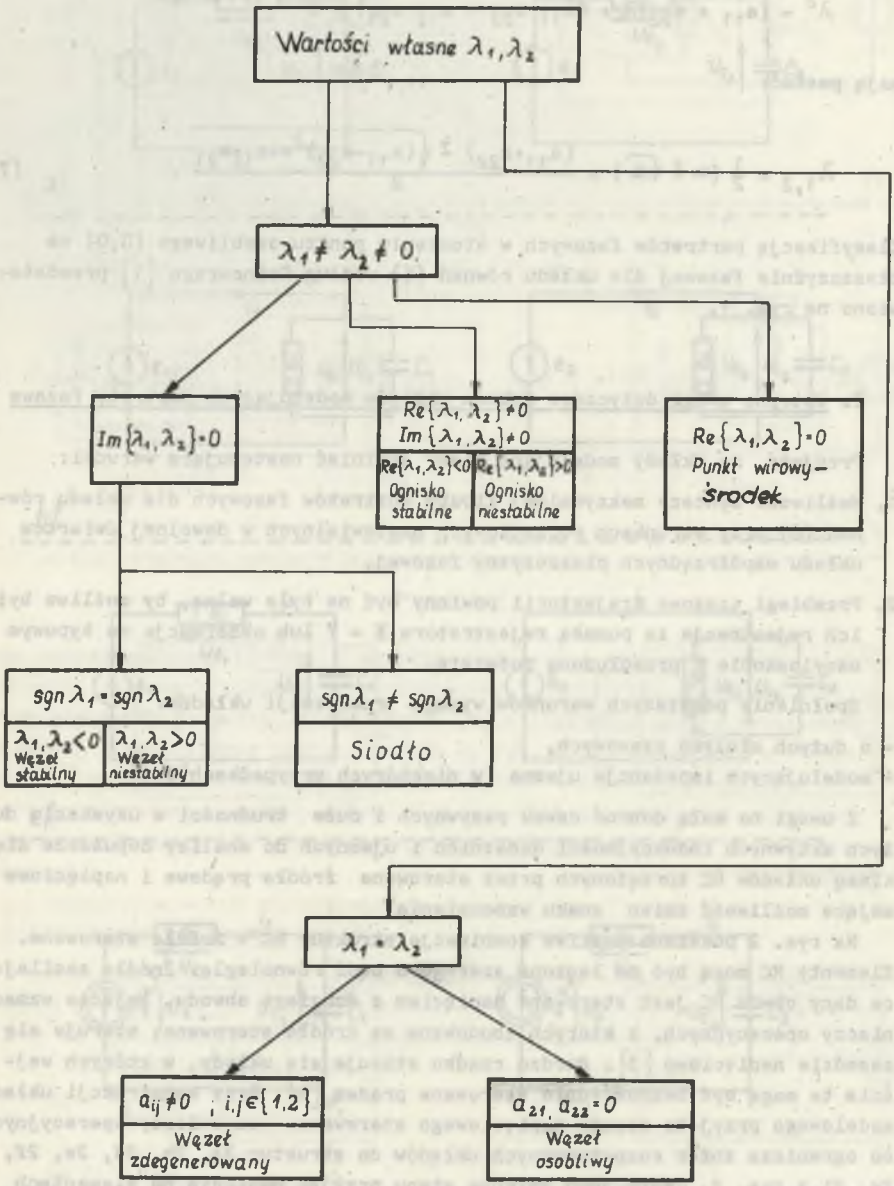
$[J_{kl}]$  - macierz Jordana przyporządkowana macierzy  $H_{kl}$  z pomocą przekształcenia podobieństwa.

Analiza wartości własnych macierzy  $[H_{kl}]$  pozwala ustalić [4] pełną klasyfikację portretów fazowych dla układu równań (5) w otoczeniu punktu osobliwego, a tym samym pozwala ustalić klasyfikację portretów fazowych dla układów równań (3), (1), jeśli tylko wszystkie wartości własne macierzy  $[H_{kl}]$  są różne od zera.

W niniejszej pracy przeprowadza się analizę możliwości uzyskania portretów fazowych w otoczeniu punktu osobliwego dla układu równań:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) \quad (6)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t).$$



Rys. 1

Pierwiastki równania charakterystycznego układu równań (6)

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

mają postać:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\alpha \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} \quad (7)$$

Klasyfikację portretów fazowych w otoczeniu punktu osobliwego (0,0) na płaszczyźnie fazowej dla układu równań (6) według Poincarego [1] przedstawiono na rys. 1.

## 2. Wstępne uwagi dotyczące doboru układów modelujących portrety fazowe

Przyjęto, że układy modelujące winny spełniać następujące warunki:

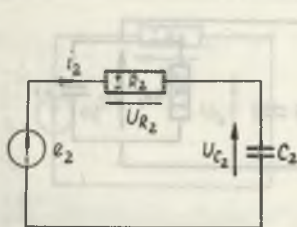
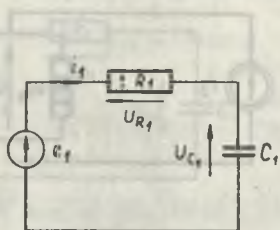
1. Możliwość syntezy maksymalnej liczby portretów fazowych dla układu równań (6) przy warunkach początkowych nastawialnych w dowolnej ćwiartce układu współrzędnych płaszczyzny fazowej.
2. Przebiegi czasowe trajektorii powinny być na tyle wolne, by możliwa była ich rejestracja za pomocą rejestratora X - Y lub obserwacja na typowym oscyloskopie z przedłużoną poświatą.

Spełnienie powyższych warunków wymaga realizacji układów:

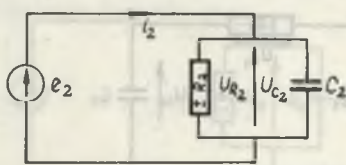
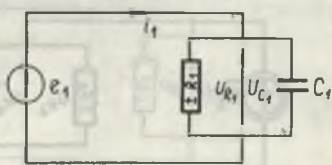
- o dużych stałych czasowych,
- modelujących impedancje ujemne (w niektórych przypadkach).

Z uwagi na małą dobroć cewek pasywnych i duże trudności w uzyskaniu dużych aktywnych indukcyjności dodatnich i ujemnych do analizy dopuszcza się klasę układów RC sprzężonych przez sterowane źródła prądowe i napięciowe mające możliwość zmian znaku wzmocnienia.

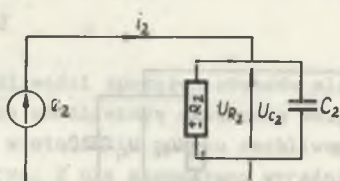
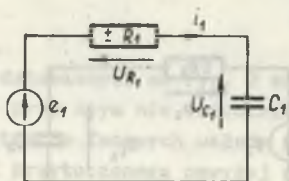
Na rys. 2 pokazano możliwe kombinacje struktur RC - źródła sterowane. Elementy RC mogą być tu łączone szeregowo bądź równolegle. Źródło zasilające dany obwód RC jest sterowane napięciem z drugiego obwodu. Wejścia wzmacniaczy operacyjnych, z których zbudowane są źródła sterowane, steruje się w zasadzie napięciowo [3]. Bardzo rzadko stosuje się układy, w których wejścia te mogą być bezpośrednio sterowane prądem [3]. Przy konstrukcji układu modelowego przyjęto zasadę napięciowego sterowania wzmacniaczy operacyjnych, co ogranicza zbiór rozpatrywanych układów do struktur 2a, 2b, 2d, 2e, 2f, 2g, 2i z rys. 2. Jeśli jako zmienne stanu przyjmie napięcia na elementach RC, prądy gałęziowe lub napięcia źródeł sterowanych (por. rys. 2), to drogą stosunkowo prostych obliczeń można sprawdzić, że każda ze struktur przedstawionych na rys. 2 jest opisywana równaniem o postaci (6). Każda ze struk-



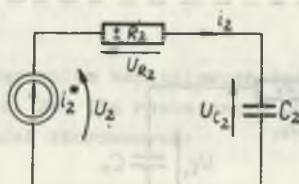
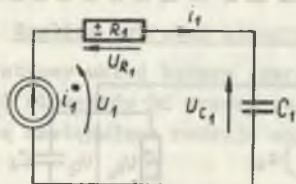
a/



b/

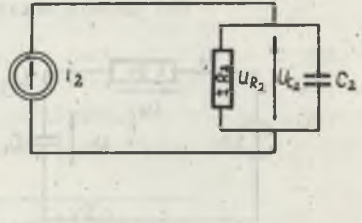
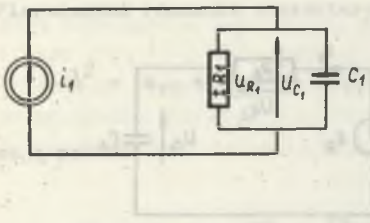


c/

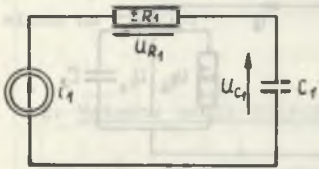


d/

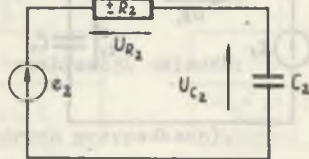
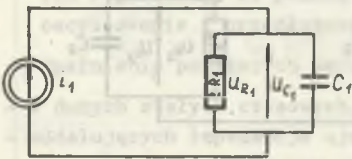
Rys. 2a-d



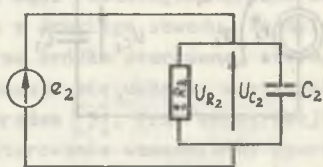
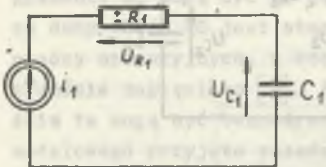
e/



f/

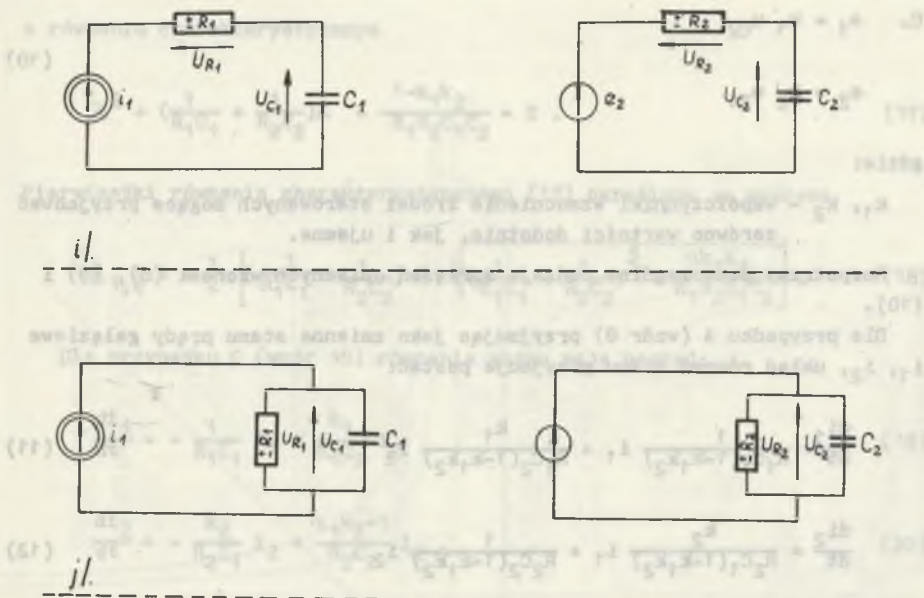


g/



h/

Rys. 2e-h



Rys. 2 i-j

tur przedstawionych na rys. 2 ma różne możliwości sprzężeń obwodów elementarnych, przy czym nie wszystkie sprzężenia umożliwiają uzyskanie wszystkich portretów fazowych układu równań (6) w otoczeniu punktu osobliwego  $(0,0)$ . Z przytoczonego powyżej powodu na rys. 2 nie zaznaczono wyraźnie sposobu sprzężeń dla każdej pary (struktury) obwodów elementarnych RC-źródło sterowane. Analizę wpływu tych sprzężeń na możliwości realizacji portretów fazowych dla wybranej struktury układu modelowego przedstawiono poniżej.

### 2.1. Analiza wybranej struktury

Rozpatrzmy układ będący szeregowym połączeniem napięciowych źródeł sterowanych i elementów RC przedstawiony na rys. 2a. Dla rozważanego układu możliwe są następujące rodzaje sprzężeń źródeł sterowanych:

$$A. \quad e_1 = k_1 u_{R2} \quad (8)$$

$$e_2 = k_2 u_{R1}$$

$$B. \quad e_1 = k_1 u_{C2} \quad (9)$$

$$e_2 = k_2 u_{C1}$$

$$C. \quad e_1 = k_1 u_{C2} \quad (10)$$

$$e_2 = k_2 u_{R1}$$

gdzie:

$k_1, k_2$  - współczynniki wzmocnienia źródeł sterowanych mogące przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Rozpatrzmy poszczególne rodzaje sprzężeń opisanych wzorami (8), (9) i (10).

Dla przypadku A (wzór 8) przyjmując jako zmienne stanu prądy gałęziowe  $i_1, i_2$ , układ równań stanu przyjmuje postać:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1 (1 - k_1 k_2)} i_1 + \frac{k_1}{R_1 C_2 (1 - k_1 k_2)} i_2 \quad (11)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{k_2}{R_2 C_1 (1 - k_1 k_2)} i_1 + \frac{1}{R_2 C_2 (1 - k_1 k_2)} i_2 \quad (12)$$

Równanie charakterystyczne przyporządkowane równaniom (11) i (12) ma postać:

$$\lambda^2 - \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2 (1 - k_1 k_2)} \lambda + \frac{1 - k_1 k_2}{R_1 R_2 C_1 C_2 (1 - k_1 k_2)^2} = 0. \quad (13)$$

Pierwiastki równania (13) są następujące:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2 (1 - k_1 k_2)}, \quad 1 - k_1 k_2 \neq 0 \quad (14)$$

Ze wzoru (14) wynika, że dla struktury A nie istnieje możliwość generacji wszystkich portretów fazowych (trajektorii) (por. rys. 1).

Dla przypadku B (wzór 9) przyjmuje się jako zmienne stanu napięcia na kondensatorach, oznaczając je w dalszym ciągu przez  $u_1, u_2$ ; uzyskuje się układ równań stanu:

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} u_1 + \frac{k_1}{R_1 C_1} u_2, \quad (15)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{k_2}{R_2 C_2} u_1 - \frac{1}{R_2 C_2} u_2, \quad (16)$$



o równaniu charakterystycznym

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)\lambda + \frac{1 - k_1 k_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0. \quad (17)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (17) określone są wzorem:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2}\right)^2 + \frac{4k_1 k_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \right]. \quad (18)$$

Dla przypadku C (wzór 10) równania stanu mają postać:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} i_1 + \frac{k_1}{R_1 C_2} i_2 \quad (19)$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{k_2}{R_2 C_1} i_2 + \frac{k_1 k_2 - 1}{R_2 C_2} i_2, \quad (20)$$

o równaniu charakterystycznym

$$\lambda^2 - \frac{(k_1 k_2 - 1) R_1 C_1 - R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} \lambda + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0. \quad (21)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (21) określone są wzorem:

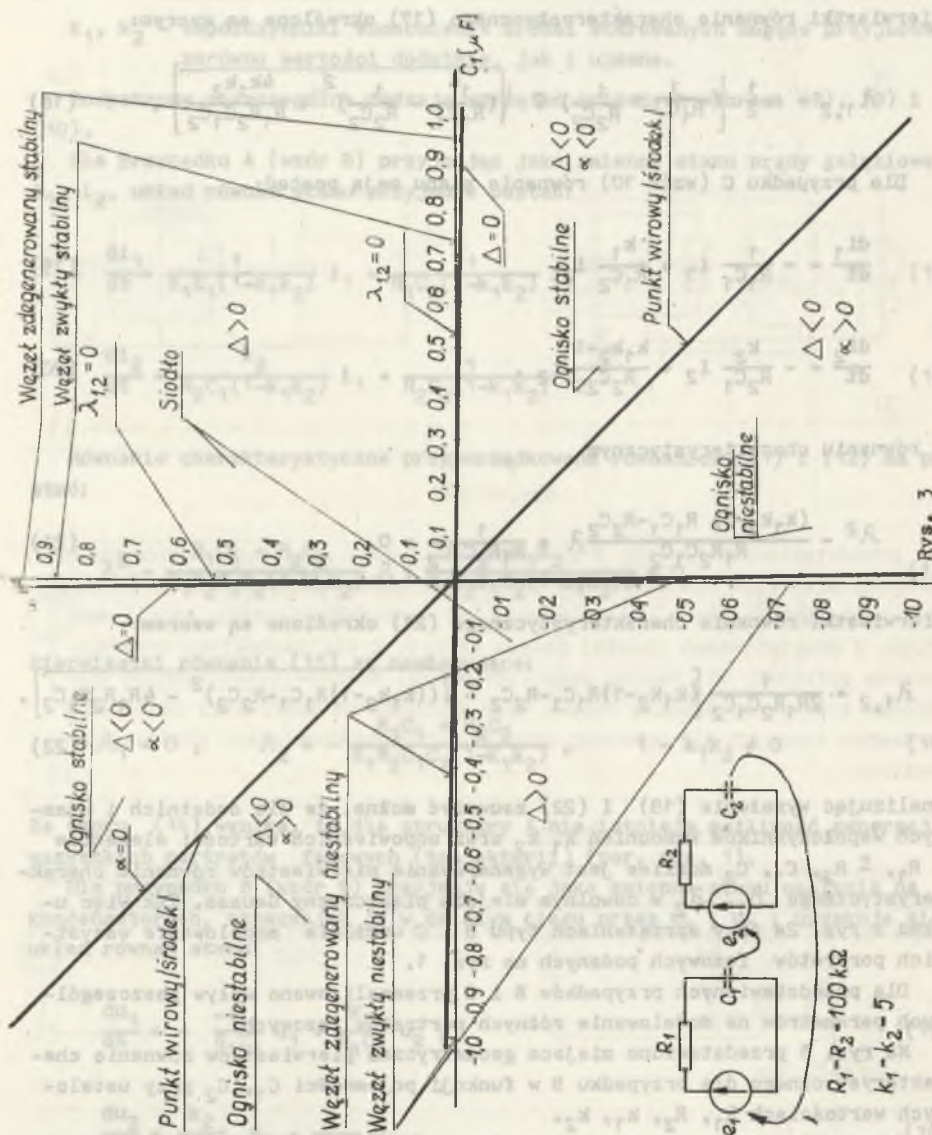
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2R_1 R_2 C_1 C_2} \left[ (k_1 k_2 - 1) R_1 C_1 - R_2 C_2 \pm \sqrt{((k_1 k_2 - 1) R_1 C_1 - R_2 C_2)^2 - 4R_1 R_2 C_1 C_2} \right]. \quad (22)$$

Analizując wyrażenia (18) i (22) zauważyć można, że dla dodatnich i ujemnych współczynników wzmocnień  $k_1$ ,  $k_2$  oraz odpowiednich wartości elementów  $\pm R_1$ ,  $\pm R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  możliwe jest wygenerowanie pierwiastków równania charakterystycznego  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  w dowolnym miejscu płaszczyzny Gaussa. Tak więc układ z rys. 2a przy sprzężeniach typu B i C umożliwia modelowanie wszystkich portretów fazowych podanych na rys. 1.

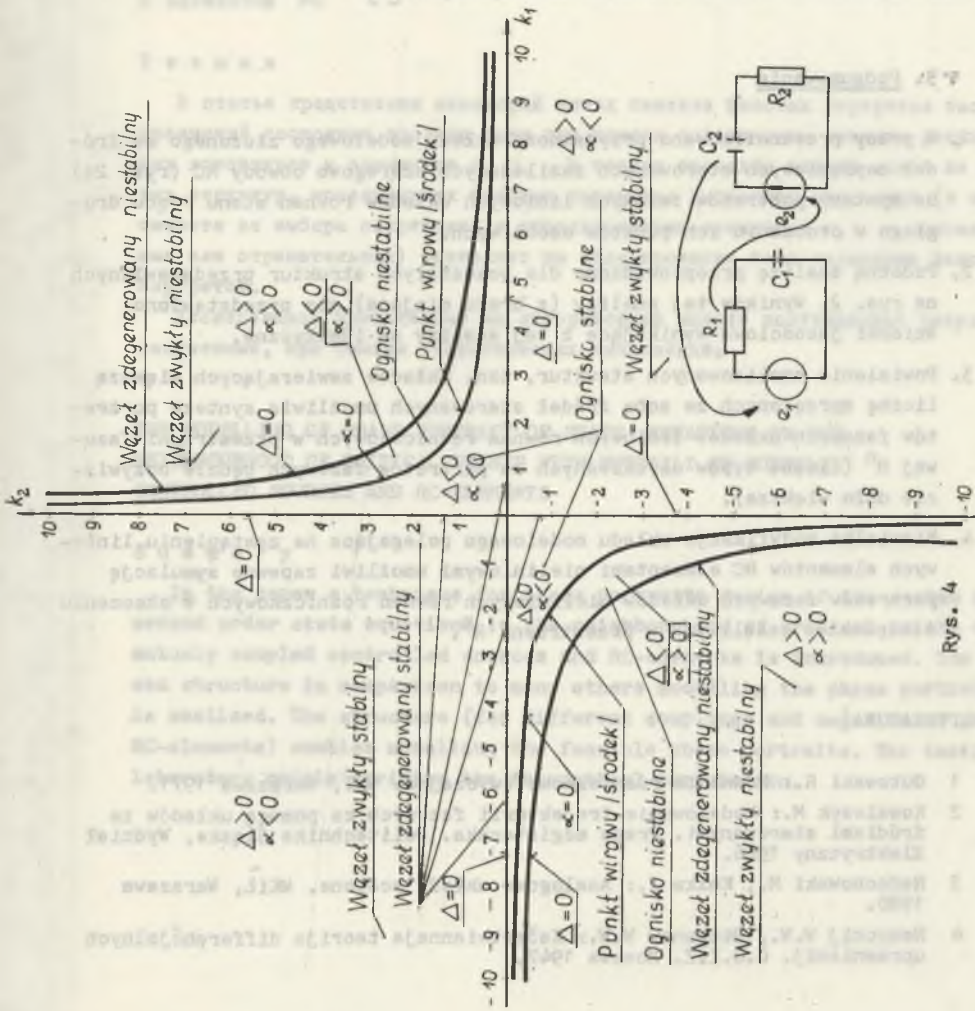
Dla przedstawionych przypadków B i C przeanalizowano wpływ poszczególnych parametrów na modelowanie różnych portretów fazowych.

Na rys. 3 przedstawiono miejsca geometryczne pierwiastków równania charakterystycznego dla przypadku B w funkcji pojemności  $C_1$ ,  $C_2$  przy ustalonych wartościach  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ .

Na rys. 4 pokazano podobne miejsca geometryczne dla przypadku C w funkcji współczynników wzmocnienia  $k_1$ ,  $k_2$  przy ustalonych wartościach  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ .



Rys. 3



Rys. 4

Badania przeprowadzone na modelu doświadczalnym w pełni potwierdzają wyniki uzyskane na drodze rozważań teoretycznych [2].

### 3. Podsumowanie

1. W pracy przeanalizowano przydatność układu modelowego złożonego ze źródeł napięciowych sterowanych zasilających szeregowo obwody RC (rys. 2a) do syntezy portretów fazowych liniowych układów równań stanu rzędu drugiego w otoczeniu ich punktów osobliwych.
2. Podobną analizę przeprowadzono dla pozostałych struktur przedstawionych na rys. 2. Wyników tej analizy (z braku miejsca) nie przedstawiono. Wnioski jakościowe wynikające z tej analizy są identyczne.
3. Powielenie analizowanych struktur, tzn. układów zawierających większą liczbę sprzężonych ze sobą źródeł sterowanych umożliwi syntezę portretów fazowych układów liniowych równań różniczkowych w przestrzeni fazowej  $R^n$  (liczba typów uzyskiwanych tu portretów fazowych będzie oczywiście dużo większa).
4. Niewielka modyfikacja układu modelowego polegająca na zastąpieniu liniowych elementów RC elementami nieliniowymi umożliwi zapewne symulację portretów fazowych układów nieliniowych równań różniczkowych w otoczeniu ich punktów osobliwych w przestrzeni  $R^n$ .

### LITERATURA

- 1 Gutowski R.: Równania różniczkowe zwyczajne. WNT, Warszawa 1971.
- 2 Kowalczyk M.: Modelowanie trajektorii fazowych za pomocą układów ze źródłami sterowanymi. Praca magisterska. Politechnika Śląska, Wydział Elektryczny 1986.
- 3 Nadachowski M., Kulka Z.: Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1980.
- 4 Nemyckij W.W., Stepanow W.W.: Kačestwiennaja teorija differencjalnych uprawnień. O.G.I.Z. Moskwa 1947.

Recenzent:

Prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ  
ПРИ ПОМОЩИ СОПРЯЖЕННЫХ ВЗАИМНО РЕГУЛИРУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ  
И ЭЛЕМЕНТОВ RC

Р е з ю м е

В статье представлен некоторый метод синтеза фазовых портретов системы уравнений состояния второго рода при помощи сопряженных взаимно регулируемых источников и элементов R, C. В статье проведен анализ одной из многих структур, моделирующих фазовые портреты. Выбранная структура (в зависимости от выбора сопряжений и использованных элементов R, C - положительных или отрицательных) позволяет на моделирование всех возможных фазовых портретов.

Исследования проведенные на лабораторной модели подтверждают результаты, полученные, при помощи теоретических вычислений.

THE MODELLING OF PHASE PORTRAIT OF STATE EQUATIONS IN THE  
NEIGHBOURHOOD OF CRITICAL POINTS WITH MUTUALLY OF COUPPLD  
CONTROLLED SOURCES AND RC-ELEMENTS

S u m m a r y

In the paper a technique for phase portraits design of the system of second order state equations in the neighbourhood of critical points with mutually coupled controlled sources and RC-elements is introduced. The chosen structure in comparison to many others modelling the phase portraits is analysed. The structure (for different couplings and negative or positive RC-elements) enables modelling the feasible phase portraits. The testing of laboratory models verifies the theoretical computation.