ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: BUDOWNICTWO z. 60 Nr kol. 841

Stanisław BIELAK
Lesław MIŚKÓW

ROZWIĄZANIE STANU BŁONOWEGO POWŁOKI PROSTOKREŚLNEJ OD WPŁYWU NASŁONECZNIENIA

Streszczenie. W pracy omówiono rozwiązanie stanu błonowego powłoki prostokreślnej w kształcie hiperboloidy pracującej pod wpływem nasłonecznienia. Model matematyczny opiera się na zmiennym polu temperatur utożsamionych z działaniem parcia. Umożliwiło to scałkowanie równań różniczkowych cząstkowych opisujących pracę powłoki.

1. WSTĘP

Tematem pracy jest rozwiązanie stanu błonowego powłoki hiperboloidalnej, chłodni kominowej, dowolnie podpartej i poddanej wpływowi nasłonecznienie. Zakłada się ponadto, że jest to powłoka cienkościenna, zbudowana z materiału jednorodnego i izotropowego, podlegającego prawu Hooke'a.

Uzyskane rozwiązanie, tzn. składowe tensora sił przekrojowych $\bar{N}^{ij}$ i przemieszczeń w^i, w^3 oparte jest na założeniu równoważności nasłonecznienia z parciem, którego kierunek winien odpowiadać maksymalnemu nasłonecznieniu powierzchni zewnętrznej powłoki. Założenie to poczyniono na podstawie analizy danych doświadczalnych przedstawionych w [4]. Wynika z nich, że decydujący wpływ na średnią temperaturę w poszczególnych punktach powłoki ma położenie Słońca na nieboskłonie. Temperatura najniższa panuje po stronie zacienionej i tam przyjąć można, że jest stała (różnice rzędu 1^oC). Natomiast punkty znajdujące się w strefie południowej charakteryzują się temperaturę najwyższą. Wobec powyższego przyjęto, że hipotetyczne parcie działa jedynie na część nasłonecznioną.

Podane w pracy równania różniczkowe cząstkowe otrzymano z odpowiednich równań równowagi i związków przemieszczeń z odkształceniami, które wyprowadzono w [2]. Metody całkowanie opisane są w końcowej części pracy. Uzyskane całki opisują w pełni stan błonowy powłoki poddanej wpływowi nasłonecznienia.

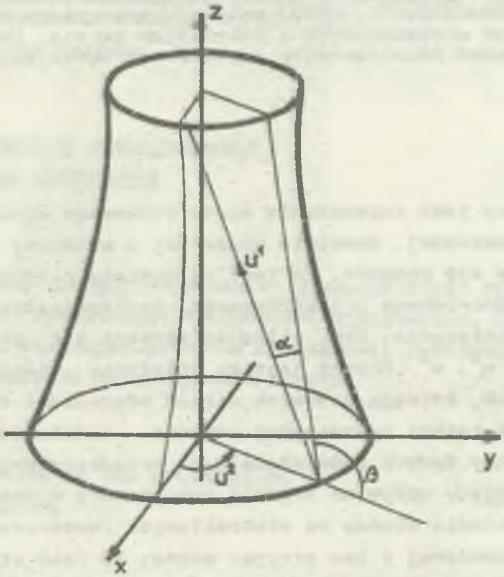
2. OPIS GEOMETRYCZNY

Równanie wektorowe powierzchni środkowej powłoki prostokreślnej opartej na okręgu ma postać:

$$\vec{r} = a_1(\cos u^2\,\vec{i} + \sin u^2\,\vec{j}) + u^1\left[\cos(u^2+\alpha)\vec{i} + \right.$$

$$\left. + \sin(u^2+\alpha)\vec{j}\right]\cos\beta + u^1\sin\beta\vec{k} \qquad (2.1)$$

Zmienne niezależne u^1 i u^2 są współrzędnymi krzywoliniowymi na powierzchni, przy czym u^1 określa położenie punktu na tworzącej, a u^2 wskazuje tworzącę, na której leży punkt. Wektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wersorami osi prostokątnego układu współrzędnych, odpowiednio Ox, Oy i Oz. Kąty α i β ustalają kierunek tworzącej w przestrzeni. Przyjmując $\alpha=0^\circ$ i $\beta=90^\circ$ uzyskujemy walec, a dla $\alpha=0^\circ$ i β dowolnego - stożek. W ogólnym przypadku ($\alpha\neq0^\circ$ i $\beta\neq90^\circ$) równanie (2.1) opisuje hiperboloidę jednopowłokową



Rys. 1. Parametryzacja hiperboloidy jednopowłokowej

Współczynniki pierwszej (g_{ij}) i drugiej (b_{ij}) formy różniczkowej, ich wyróżniki (g i b), krzywizny gaussowska i średnia (K i H) oraz symbole Christoffela drugiego rodzaju wynoszą:

$$g_{11} = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = a_1 \sin\alpha\cos\beta$$

$$g_{22} = (u^1)^2\cos^2\beta + 2u^1a_1\cos\alpha\cos\beta + a_1^2$$

$$g = (u^1)^2\cos^2\beta + 2u^1a_1\cos\alpha\cos\beta + a_1^2(1-\sin^2\alpha\cos^2\beta)$$

$$b_{11} = 0$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{12} \sin\beta$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{22} \sin\beta$$

$$b = -\frac{1}{g}(g_{12}\sin\beta)^2$$

$$K = -(\frac{1}{g} g_{12}\sin\beta)^2 \qquad H = \frac{g - g_{12}^2}{2g\sqrt{g}} \sin\beta$$

$$\Gamma^1_{11} = 0 \qquad \Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{g_{12}}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^1} \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{1}{g_{12}}\Gamma^1_{12}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{g_{22}}{g_{12}}\Gamma^1_{12} \qquad \Gamma^2_{22} = -\Gamma^1_{12}$$

3. ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE I FIZYCZNE POWŁOKI

Związek składowych wektora przemieszczeń ze składowymi tensora odkształcenia błonowego przyjmuje postać ([2]):

$$w^1_{,1} + g_{12} w^2_{,1} = \gamma_{11}$$

$$g\, w^2_{,1} - 2b_{12} w^3 = 2\gamma_{12} - g_{12}\gamma_{11} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2} g_{,1}\, w^1 - b_{22} w^3 = \gamma_{22}$$

gdzie:

$$w^i_{,j} = \frac{\partial w^i}{\partial u^j}, \qquad g_{,j} = \frac{\partial g}{\partial u^j}$$

Składowe tensora sił przekrojowych wyznaczyć możemy z następujących związków:

$$\bar{N}^{ij} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij} g^{kl}\gamma_{kl}\right], \tag{3.2}$$

gdzie E oznacza moduł Younga, ν stałą Poissona, a 2h grubość powłoki.

Związek odwrotny:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2Eh}\left[(1+\nu)g_{il}g_{jk} - \nu g_{ij}g_{lk}\right]\bar{N}^{lk} \tag{3.3}$$

Przejście do współrzędnych fizycznych, odniesionych do bazy jednostkowej dokonujemy za pomocą wzorów:

$$\bar{N}_{ij} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g^{ii}}}\,\bar{N}^{ij}$$

$$\bar{w}_i = \sqrt{g_{ii}}\,w^i \quad \text{oraz} \quad \bar{w}_3 = w^3 \tag{3.4}$$

Symbol "¯" oznacza współrzędną fizyczną.
Uwaga: nie sumować po i,j.

4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Równania równowagi przy założeniu braku sił zewnętrznych przyjmują postać ([2]):

$$\bar{N}^{ij}\big|_i = 0$$

$$\bar{N}^{ij}b_{ij} = 0 \tag{4.1}$$

Symbol "|" oznacza pochodną kowariantną. Po wykonaniu niezbędnych przekształceń uzyskamy:

$$2g_{12}\bar{N}^{11} + g_{22}\bar{N}^{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,C_1(u^2)$$

$$g_{22}\frac{\partial(g_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12})}{u^1} - 2g_{12}\frac{\partial(g_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12})}{u^2} = 0 \tag{4.1}$$

$$2g_{12}\bar{N}^{12} + g_{22}\bar{N}^{22} = 0$$

5. WPŁYW ZMIAN TEMPERATURY

Załóżmy, że na powierzchni środkowej ma miejsce zmiana temperatury o wielkość t_s, będącą średnią temperaturę powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej. Oznaczając przez ds i ds' nieskończenie małą odległość między dwoma punktami powierzchni przed i po zmianie temperatury, mamy:

$$ds' = (1+\varepsilon_t)ds, \tag{5.1}$$

gdzie:

$\varepsilon_t = \alpha t_s, \quad t_s = (t_w+t_z)/2$

α - współczynnik rozszerzalności liniowej.

Przekształcając (5.1) i podstawiając:

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j$$

$$(ds')^2 = g'_{ij}\, du^i\, du^j$$

gdzie g'_{ij} oznaczają współczynniki pierwszej formy różniczkowej po odkształceniu powłoki, uzyskujemy:

$$(g'_{ij}-g_{ij})du^i du^j = (2\varepsilon_t+\varepsilon_t^2)g_{ij}du^i du^j$$

Przy założeniu izotropowości termicznej mamy:

$$g'_{ij}-g_{ij} = (2\varepsilon_t+\varepsilon_t^2)g_{ij}$$

Stąd przyjmując $g'_{ij}-g_{ij} = 2\gamma^t_{ij}$ i odrzucając składnik ε_t^2 jako wielkość małą wyższego rzędu uzyskamy:

$$\gamma^t_{ij} = \varepsilon_t g_{ij} \tag{5.2}$$

Z (3.2) otrzymamy składowe sił przekrojowych:

$$\bar{N}^{ij}_t = \frac{2Eh}{1-\vartheta}\,\varepsilon_t g^{ij} \tag{5.3}$$

Wpływ nasłonecznienia powłoki utożsamić możemy z działaniem parcia $\vec{p}$ równoległego do płaszczyzny xz i nachylonego do pionu pod kątem ostrym φ. Zapiszemy $\vec{p}$ raz w bazie układu Oxyz i drugi raz w bazie związanej z parametryzacją powierzchni środkowej powłoki:

$$\vec{p} = \varepsilon_{t_o}(\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{k}) = p^i\vec{r}_i + p^3\vec{m} \tag{5.4}$$

Na powłokę działa tylko składowa p^3, którą otrzymamy mnożąc skalarnie powyższy związek przez wektor bazy $\vec{m}$:

$$p^3 = \frac{\varepsilon_t}{2\sqrt{g}}\left\{a_1\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin(u^2+\alpha) + g_{,1}\cos\varphi[\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\varphi\cos(u^2+\alpha)-1]\right\} \tag{5.5}$$

Możemy więc przyjąć:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} P^3 & \text{gdy} \quad P^3 > 0 \quad \text{(część powłoki nasłon.)} \\ 0 & \text{gdy} \quad P^3 \leqslant 0 \quad \text{(część powłoki w cieniu).} \end{cases}$$

6. WYZNACZENIE SKŁADOWYCH SIŁ PRZEKROJOWYCH

Stan odkształceń termicznych opisanych równaniem (5.2) odpowiada odkształceniom rzeczywistym tylko w przypadku t_s = const, gdyż wtedy zmiana temperatury nie powoduje powstawania naprężeń w powłoce. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z pewnym stanem naprężeń, które przeciwdziałają odkształceniom termicznym. Dlatego też pole odkształceń wypadkowych γ^w_{ij} jest sumą odkształceń termicznych γ^t_{ij} i odkształceń γ_{ij}, odpowiadających powstałym naprężeniom:

$$\gamma^w_{ij} = \gamma^t_{ij} + \gamma_{ij} \tag{6.1}$$

Siły błonowe: wypadkowa $\bar{N}^{ij}_w$, termiczna $\bar{N}^{ij}_t$ i rzeczywista $\bar{N}^{ij}$ związane są analogicznym równaniem:

$$\bar{N}^{ij}_w = \bar{N}^{ij}_t = \bar{N}^{ij} \tag{6.2}$$

Siły $\bar{N}^{ij}$ wyznaczymy z równań równowagi (4.1). Sposób rozwiązania uzależniony jest od warunków brzegowych. Jeżeli $\bar{N}^{12}$ jest na brzegu stałe, to ze względu na symetrię siły przekrojowe są niezależne od współrzędnej u^2. Dlatego też (4.1) przyjmują postać:

$$\bar{N}^{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} C_1$$

$$\frac{d(g_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12})}{du^1} = 0 \tag{6.3}$$

$$2g_{12}\bar{N}^{12} + g_{22}\bar{N}^{22} = 0$$

Stąd

$$\bar{N}^{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} C_1$$

$$\bar{N}^{12} = \frac{1}{g_{22}\sqrt{g}} C_2 \tag{6.4}$$

$$\bar{N}^{22} = -\frac{2g_{12}}{g_{22}^2\sqrt{g}}C_2 \tag{6.4}$$

C_1 i C_2 są stałymi niezależnymi od u^1 i u^2. Wykorzystując dalej związek (3.3) wyznaczymy współrzędne wektora odkształcenia:

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{2Eh\sqrt{g}}\left[C_1 + \frac{2g_{12}g}{g_{22}}(1+\nu)C_2\right] \\
\gamma_{12} &= \frac{1}{2Eh\sqrt{g}}\left[g_{12}C_1 + \frac{g}{g_{22}}(1+\nu)C_2\right] \\
\gamma_{22} &= \frac{1}{2Eh}(g_{12}^2 - \nu g)C_1
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Jeżeli jednak $\bar{N}^{12}$ nie jest na brzegu wielkością stałą, lecz zależną od u^2, to musimy rozwiązać cząstkowe równanie różniczkowe (4.1′) i wówczas z dwóch pozostałych równań algebraicznych uzyskamy $\bar{N}^{11}$ i $\bar{N}^{22}$. Załóżmy, że warunki brzegowe opisane są następujące:

$$\begin{aligned}
&u^1 = 0, \quad u^2 = v \quad (0 \leqslant v < 2\pi) \\
&\bar{N}^{12}(0,u^2) = \frac{1}{g_{22}^o\sqrt{g^o}}N(v),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

gdzie: $g_{22}^o = g_{22}(u^1=0)$ i $g^o = g(u^1=0)$.

Aby rozwiązać (4.1′), musimy najpierw scałkować układ równań różniczkowych zwyczajnych ([3]):

$$\begin{aligned}
&-\frac{2g_{12}}{g_{22}}du^1 = du^2 \\
&\frac{d(g_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12})}{du^1} = 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Uzyskujemy:

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{arctg}\frac{g_{,1}}{2g_{12}} + u^2 = C_3 \\
&g_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12} = C_4
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Podstawiając teraz warunki (6.6) i rugując v otrzymamy:

$$N(C_3 - \pi + 2\alpha) = C_4 \tag{6.9}$$

Za C_3 i C_4 podstawiamy lewe strony (6.8) i wyznaczymy całkę równania różniczkowego (4.1):

$$\bar{N}^{12} = \frac{1}{g_{22}\sqrt{g}} N(V),$$

gdzie $V = 2\operatorname{arctg}\frac{g_{,1}}{2g_{12}} + u^2 - \pi + 2\alpha.$

Stąd

$$\bar{N}^{11} = -\frac{1}{2g_{12}\sqrt{g}}\left[N(V) - C_1(u^2)\right]$$

$$\bar{N}^{22} = -\frac{2g_{12}}{2g_{22}^2\sqrt{g}} N(V), \tag{6.10}$$

a następnie

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2Eh}\left\{\left[\frac{g_{12}^2-g}{2g_{12}g_{22}} + \vartheta\frac{2g_{12}g}{g_{22}^2}\right]N(V) + \frac{1}{2g_{12}\sqrt{g}}C_1(u^2)\right\}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2Eh\sqrt{g}}\left\{\left[\frac{g}{g_{22}}(1+\vartheta) - \frac{1}{2}\right]N(V) + \frac{1}{2\sqrt{g}}C_1(u^2)\right\} \tag{6.11}$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{2Eh}\left[\frac{\vartheta g - g_{12}^2}{2g_{12}\sqrt{g}}N(V) + \frac{g_{12}^2-\vartheta g}{2g_{12}\sqrt{g}}C_1(u^2)\right]$$

7. WYZNACZANIE SKŁADOWYCH WEKTORA PRZEMIESZCZEŃ

Znajomość odkształceń γ_{ij}^{w} pozwoli nam obecnie na obliczenie z (3.1) przemieszczeń w^1 i w^3. Dokonując odpowiednich przekształceń i podstawiając

$$I = \int \gamma_{11}^{w} du^1 + C_1(u^2) \quad \text{oraz} \quad w^2 = w_*^2 - \frac{g_{12}}{g} I$$

otrzymamy następujące równanie różniczkowe cząstkowe:

$$g_{22}\frac{\partial(\frac{g}{g_{22}}w_*^2)}{\partial u^1} - 2g_{12}\frac{\partial(\frac{g}{g_{22}}w^2)}{\partial u^2} = R(u^1,u^2), \tag{7.1}$$

gdzie

$$R(u^1,u^2) = -\frac{\partial I}{\partial u^2} + 2\gamma_{12}^{w} I - \frac{2g_{12}}{g_{22}}\gamma_{22}^{w}.$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale należy scałkować układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} -\frac{2g_{12}}{g_{22}}du^1 &= du^2 \\ \frac{du^2}{-2g_{12}} &= \frac{d(\frac{g}{g_{22}}w_*^2)}{R(u^1,u^2)} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Zakładając dalej warunki brzegowe:

$$u^1 = 0, \quad u^2 = v \quad (0 < v < 2\pi)$$

$$w_*^2(0,u^2) = \frac{g_{22}^o}{2g_{12}g^o}w(v)$$

i postępując analogicznie jak w przypadku wyznaczenia $\bar{N}^{12}$ uzyskamy:

$$w_*^2 = \frac{g_{22}}{2g_{12}g}\left[S(V) - S(u^2) + w(V)\right], \tag{7.3}$$

gdzie:

$$S(u^2) = \int R\left(\alpha_1 \frac{\sin\alpha\, tg\frac{C_1-u^2}{2} - \cos\alpha}{\cos\beta}, u^2\right)du^2$$

$$V = 2arctg\frac{g_{11}}{2g_{12}} + u^2 - \pi + 2\alpha.$$

Przemieszczenia w^1, w^3 wyznaczymy teraz na podstawie następujących wzorów ([2]):

$$w^1 = -g_{12}w^2_* + \frac{g_{22}}{g} I$$

$$w^2 = w^2_* - \frac{g_{12}}{g} I \tag{7.4}$$

$$w^3 = \frac{g_{22}}{b_{22}}\left[\frac{g}{2g_{12}} w^2_{*1} + \frac{1}{2g_{12}} I_{,2} + \frac{g_{11}}{2g} I - \frac{1}{g_{12}} \overset{*}{\delta}{}^{w}_{12}\right]$$

8. PODSUMOWANIE

Przedstawiona w pracy funkcja ε_t, charakteryzująca zmiany temperatury w powłoce, określa zmienne wydłużenie średnie dowolnego elementu liniowego. Porównując jej wartości z pomiarami temperatury zamieszczonymi w [4] stwierdzić można, że opisuje ona rzeczywiste pole temperatur powłoki w warunkach ekstremalnych.

Wykonane na maszynie cyfrowej ODRA 1305 obliczenia sprawdzające dla chłodni kominowej typu JAWORZNO II o wysokości 113,0 m i promieniu podstawy 47,5 m w pełni potwierdzają słuszność przedstawionej w pracy metody w porównaniu z wynikami uzyskiwanymi za pomocą rozwiązań dyskretnych.

LITERATURA

[1] Bielak S.: Ogólna teoria powłok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym. Politechnika Śląska, Budownictwo z. 22, Gliwice 1968.

[2] Bielak S.: Powłoki prostokreślne. WSI w Opolu, Budownictwo z. 19, Opole 1976.

[3] Sneddon I.N.: Równania różniczkowe cząstkowe. Wyd. I; PWN, Warszawa 1962.

[4] Tarczyński L.: Analiza rozkładu temperatury w powłoce hiperboloidalnej chłodni kominowej. Politechnika Wrocławska, praca doktorska, raport nr PRE-38/80, Wrocław 1980.

РЕШЕНИЕ МЕМБРАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ОТ СОЛНЕЧНОГО ВЛИЯНИЯ

Р е з ю м е

В работе разобрано решение мембранного состояния линейчатой оболочки в виде гиперболоида работающей под влиянием нагрева от солнца. Математическая модель основывается на переменном поле температуры отождествляемом с действием давления. Это сделало возможным интегрирование соответствующих дифференциальных частных уравнений, описывающих работу оболочки.

THE SOLUTION OF THE MEMBRANE STRESSES OF THE RULED SURFACE FROM THE INFLUENCE OF SOLARIZATION

S u m m a r y

In the paper we discuss the solution of the membrane stresses of the ruled surface shell shaped as one sheet hyperbola that works under the influence of solarization. The mathematical model is based on a variable field of temperature identified with treatment of a pressure. These made it possible to integrate the adequate partial differential equations that describe the work of the shell.