

Witold HORST

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej
Politechnika Poznańska

O PEWNYM SPOSOBIE WYZNACZANIA STACJONARNEGO ROZKŁADU TEMPERATURY W TORACH PRĄDOWYCH SKOKOWO NIEJEDNORODNYCH

Streszczenie. Do opisu zjawisk fizycznych w układach jednowymiarowych często korzysta się z ich analogii z procesami elektrycznymi w obwodach o parametrach rozłożonych. Pozwala to na wykorzystanie do ich rozwiązywania znanych metod analizy linii długiej. W szczególności możliwe jest wykorzystanie teorii linii w ujęciu dwójnikowym. W podejściu tym, zgodnie z ideą twierdzenia Thevenina-Mortona, odcinki linii widziane od strony wybranego punktu obserwacji $x = x_0$ zastępowane są dwójnikami aktywnymi, których struktura zależy od warunków brzegowych.

Wykorzystując analogie między wielkościami cieplnymi i elektrycznymi, przedstawiono w pracy metodę wyznaczania przyrostu temperatury w torach prądowych o skokowej niejednorodności parametrów z zastosowaniem obwodowych modeli zjawisk.

1. Wprowadzenie

W pracy zaprezentowano sposób rozwiązywania problemów przewodnictwa cieplnego w jednowymiarowych układach linearnych z wykorzystaniem teorii linii długiej w ujęciu dwójnikowym. Opracowana przez L. Różańskiego metoda obwodowych modeli elektrycznych [3] pozwala na ukazanie oddziaływania wymuszeń oraz warunków brzegowych na zjawiska w dowolnym miejscu x układu fizycznego. Może ona być stosowana do rozwiązywania układów niejednorodnych, a w szczególności - do najczęściej spotykanych w praktyce - o niejednorodności skokowej. Przykładem tych ostatnich mogą być tory prądowe aparatów bądź urządzeń elektrycznych charakteryzujące się - dla poszczególnych odcinków - odmiennymi własnościami termokinetycznymi (warunkami wymiany ciepła z otoczeniem, gęstością strat mocy wzdłuż toru itp.).

2. Zjawisko dyfuzji ciepła w układzie jednowymiarowym w ujęciu obwodowym o stałych rozłożonych

Jednym z wielu zastosowań teorii linii długiej jest jej wykorzystanie do rozwiązywania jednowymiarowych zagadnień związanych a propagacją ciepła [1, 3].

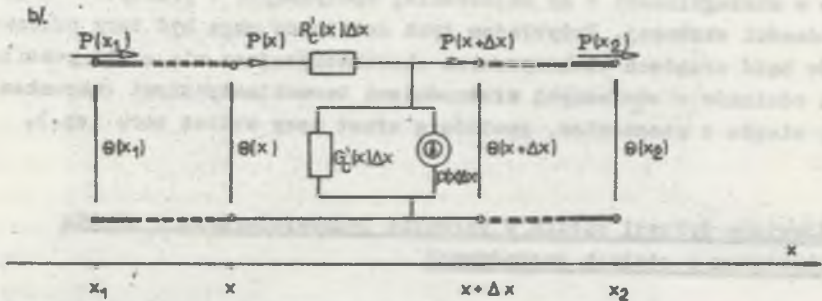
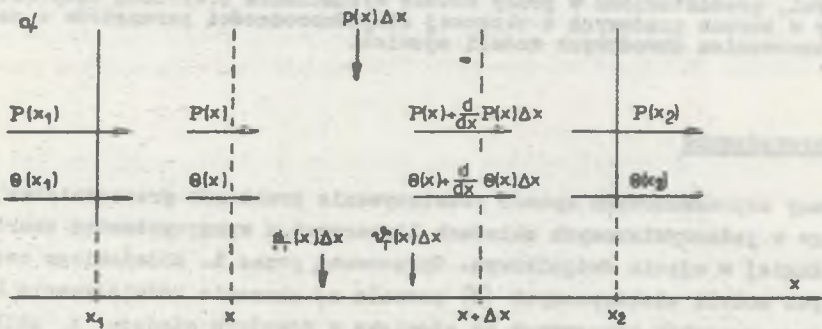
Dla układów stacjonarnych z rozłożonymi źródłami mocy cieplnej p opisujący linię długą układ równań upraszcza się do postaci:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{P}{\lambda S}$$

$$\frac{dP}{dx} = -k \Delta\theta + p$$

gdzie:

- θ - przyrost temperatury (ponad temperaturę otoczenia) (K),
- P - strumień ciepła (mocy cieplnej) (W),
- p - gęstość wydzielanej w torze mocy cieplnej (W/m),
- λ - przewodność cieplna (W/Km),
- S - powierzchnia przekroju poprzecznego (m^2),
- k - współczynnik oddawania ciepła (W/Km^2),
- A - obwód przekroju poprzecznego (m).



Rys. 1. Termokinetyczny liniowy tor prądowy a) i jego model w postaci aktywnej linii długiej b)

Fig. 1. Thermokinetic linear bus-bar element a), and its model in the form of active long line b)

Można zatem [3] dla fizycznego układu przepływu ciepła z rys. 1a zaproponować realizację obwodową podaną na rys. 1b, gdzie:

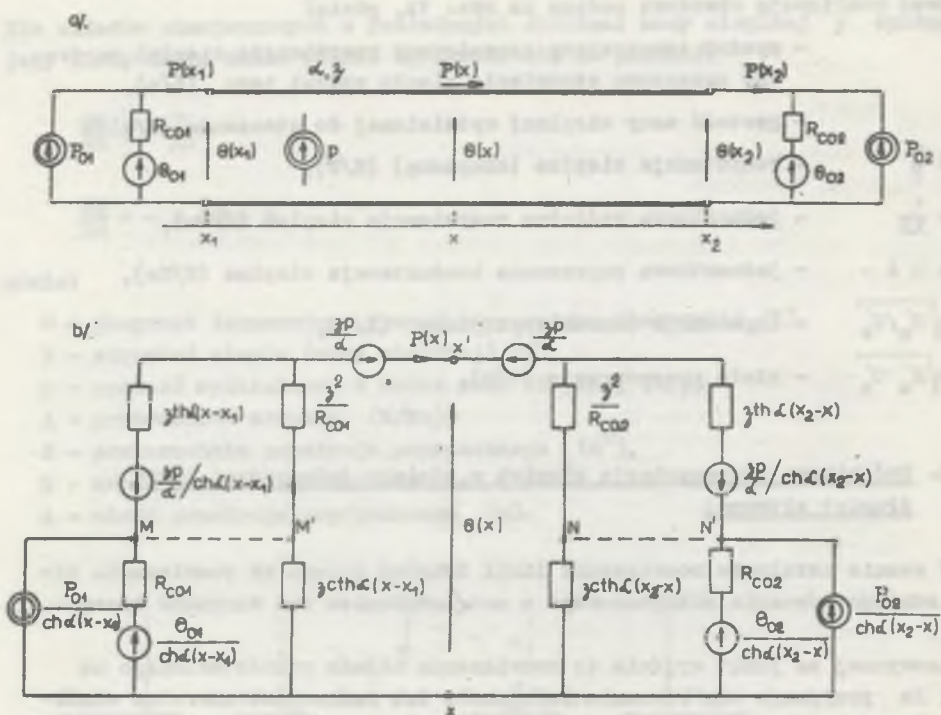
- ψ_x - spadek temperatury spowodowany rezystancją cieplną na drodze przepływu strumienia ciepła wzdłuż toru (K/m),
- P_T - gęstość mocy cieplnej wydzielanej do otoczenia (W/m),
- $R_o = \frac{\theta}{P}$ - rezystancja cieplna (skupiona) (K/W),
- $R'_o = \frac{1}{kS}$ - jednostkowa wzdłużna rezystancja cieplna (K/Wm),
- $G_o = kA$ - jednostkowa poprzeczna konduktancja cieplna (W/Km),
- $\xi = \sqrt{R'_o/G'_o}$ - impedancja charakterystyczna (K/W),
- $\alpha = \sqrt{R'_o G'_o}$ - stała przenoszenia (1/m).

3. Dwójnikowa reprezentacja zjawisk w odcinku jednorodnej linii długiej aktywnej

W stanie ustalonym rozwiązanie linii długiej polega na rozwiązaniu odpowiedniego równania różniczkowego z uwzględnieniem dwu warunków brzegowych:

Zazwyczaj za punkt wyjścia do rozwiązania układu przedstawionego na rys. 2a przyjmuje się równania łańcuchowe lub łańcuchowe odwrotne wiążące przyrost temperatury $\theta(x)$ i przepływ mocy $P(x)$ w miejscu x linii z wartościami θ_o oraz P_o na jej krańcach. Jeśli poszukiwana wielkością jest $\theta(x)$, to warunek brzegowy I rodzaju realizowany będzie przez zadanie θ_o , II rodzaju przez P_o , III zaś rodzaju przez (skupioną) rezystancję cieplną R_{co} . Ogólnym obwodowym modelem warunków brzegowych (III rodzaju) jest trójelementowy dwójnik (rys. 2a), który poprzez redukcję niektórych elementów upraszcza się do postaci realizującej warunki brzegowe dowolnego rodzaju.

W celu rozwiązania postawionego zagadnienia dla wybranego miejsca układu a także ukazania wpływu wymuszeń tak skupionych, jak i rozłożonych oraz warunków brzegowych skorzystać można z obwodowego modelu (rys. 2b) zjawisk zachodzących w miejscu xx' linii (rys. 2a). Cechą charakterystyczną tego modelu jest zależność jego struktury od warunków brzegowych (w przypadku warunków I lub II rodzaju ulega ona znacznemu uproszczeniu), a także fakt, że wymuszenia zostają jakoby przetransponowane do miejsca obserwacji (xx').



Rys. 2. Jednorodna aktywna (z rozłożonymi wymuszeniami p) linia długa R'_{CO} , G'_{CO} z dwójnikami o zasilaniu mieszanym realizującymi warunki brzegowe a) oraz obwodowy model zjawisk w miejscu xx' tej linii b). (Punkty MM' oraz NN' można połączyć bez wpływu na szukane wielkości $P(x)$ i $\theta(x)$).

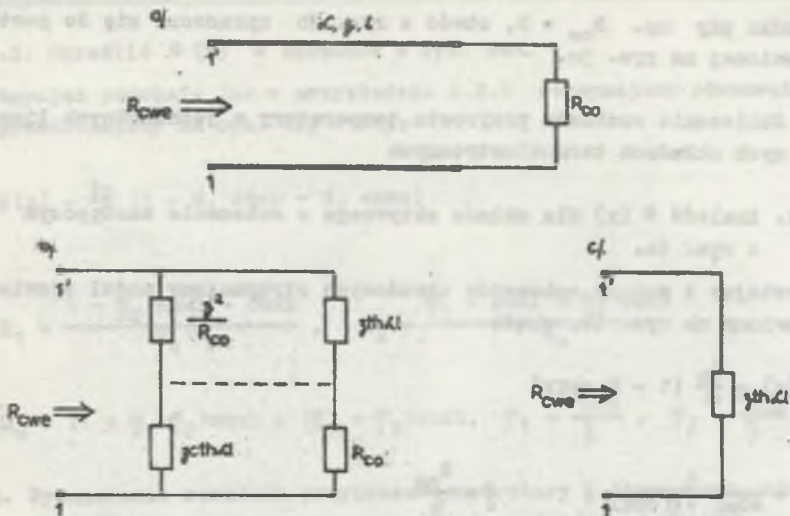
Fig. 2. Active uniform R'_{CO} , G'_{CO} long line (with distributed sources p) with the two-terminals realizing boundary conditions a), and circuit-model of phenomena at the point x of the line b). There is a possibility to connect the points MM' and NN' without affecting the quantities $P(x)$ and $\theta(x)$

4. Przykłady zastosowanie metody obwodowych schematów zjawisk

4.1. Wyznaczanie rezystancji wejściowej układu termokinetycznego

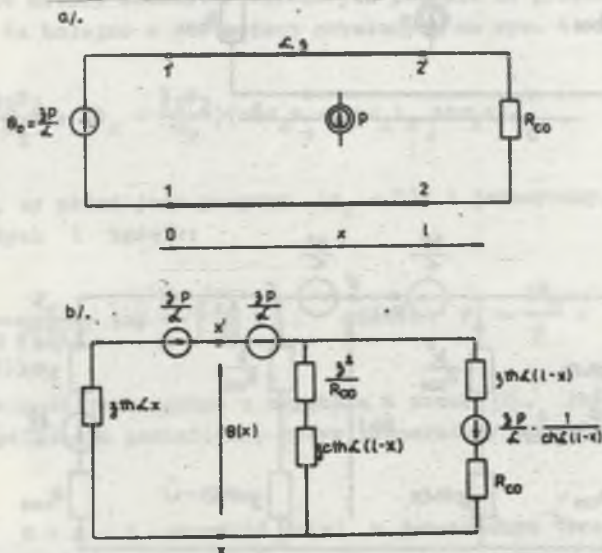
Niech dany będzie układ podany na rys. 3a, o długości l i parametrach charakterystycznych α, β . Zgodnie z ideą schematów zastępczych, układowi temu, ze względu na zaciski $11'$, odpowiada obwodowa reprezentacja przedstawiona na rys. 3b. Stąd łatwo już wyznaczamy impedancję wejściową:

$$R_{owe} = \frac{R_{oo} \operatorname{ch} \alpha l + \beta \operatorname{sh} \alpha l}{\beta \operatorname{ch} \alpha l + R_{oo} \operatorname{sh} \alpha l}$$



Rys. 3. Układ termokinetyczny w postaci linii długiej o parametrach charakterystycznych α_1, α_2 oraz długości l a) i jego reprezentacje obwodowe dla $R_{co} \neq 0$ b) oraz $R_{co} = 0$ c)

Fig. 3. Thermokinetic system in the form of a long line with characteristic parameters α_1, α_2 of the length l a), and its circuit representation for $R_{co} \neq 0$ b), and $R_{co} = 0$ c)



Rys. 4. Jednorodny termokinetyczny układ aktywny z warunkami brzegowymi I (zaciski 11') i III (zaciski 22') rodzaju a) oraz jego schemat obwodowy b).

Fig. 4. Uniform thermokinetic active system with boundary conditions of the 1-st (terminals 11') and the 3-rd (terminals 22') type a), and its equivalent network b)

W przypadku gdy np. $R_{co} = 0$, obwód z rys. 3b upraszcza się do postaci przedstawionej na rys. 3c.

4.2. Obliczanie rozkładu przyrostu temperatury w jednorodnych liniarnych układach termokinetycznych

4.2.1. Znaleźć $\Theta(x)$ dla układu aktywnego o schemacie zastępczym z rys. 4a.

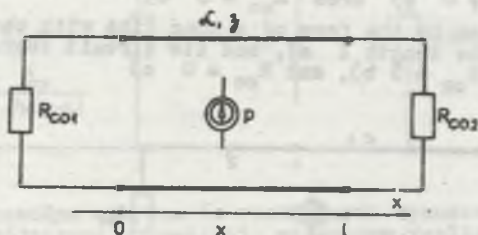
Korzystając z metody schematów obwodowych otrzymujemy model zjawisk przedstawiony na rys. 4b, skąd:

$$\Theta(x) = \frac{\beta P}{\alpha} (1 - H \operatorname{sh} \alpha x)$$

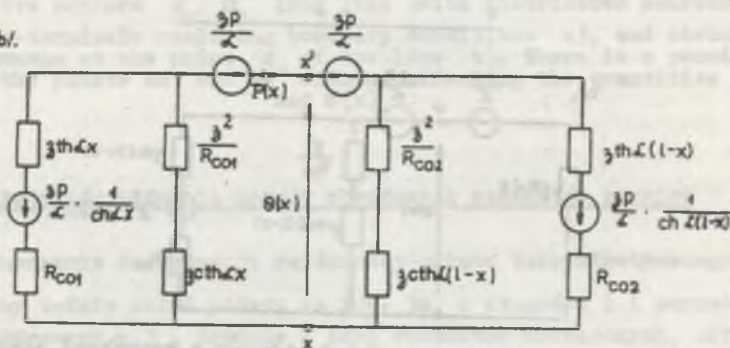
gdzie:

$$H = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha l + \varphi \operatorname{ch} \alpha l}; \quad \varphi = \frac{R_{co}}{\beta}$$

a/.



b/.



Rys. 5. Jednorodny termokinetyczny układ aktywny z warunkami brzegowymi III rodzaju a) oraz jego realizacja obwodowa b)

Fig. 5. Uniform active system with boundary conditions of the 1-st type a), and its circuit realization b)

4.2.2. Określić $\Theta(x)$ w układzie z rys. 5a.

Postępując podobnie jak w przykładzie 4.2.1 otrzymujemy równoważny obwód przedstawiony na rys. 5b; wtedy:

$$\Theta(x) = \frac{\dot{q}P}{\alpha} (1 - H_1 \operatorname{sh}\alpha x - H_2 \operatorname{ch}\alpha x)$$

gdzie:

$$H_1 = \frac{1 - \varphi_2 \operatorname{sh}\alpha l - \operatorname{ch}\alpha l}{H_0}, \quad H_2 = \frac{\varphi_1 + \operatorname{sh}\alpha l + \varphi_2 \operatorname{ch}\alpha l}{H_0}$$

$$H_0 = (1 + \varphi_1 \varphi_2) \operatorname{sh}\alpha l + (\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{ch}\alpha l, \quad \varphi_1 = \frac{R_{co1}}{\dot{q}}, \quad \varphi_2 = \frac{R_{co2}}{\dot{q}}.$$

4.3. Wyznaczanie rozkładu przyrostu temperatury w linearnych układach termokinetycznych o skokowej niejednorodności parametrów

4.3.1. Dla $0 < x < l_2$ znaleźć $\Theta(x)$ wywołane źródłem ciepła w zestyku czołowym dwu torów o różnych parametrach termokinetycznych (rys. 6a).

Zastosowanie metody schematów obwodowych pozwala na przedstawienie układu z rys. 6a kolejno w postaciach pokazanych na rys. 6b i 6c; zatem:

$$\Theta(x) = \frac{\dot{q}_2 P_2}{\alpha_2} + (\Theta_0 - \frac{\dot{q}_2 P_2}{\alpha_2})(\operatorname{ch}\alpha_2 x - \operatorname{th}\alpha_2 l_2 \operatorname{sh}\alpha_2 x).$$

Jeśli założyć, że układ jest pasywny ($p_2 = 0$) i jednorodny, to dla dostatecznie dużych l będzie:

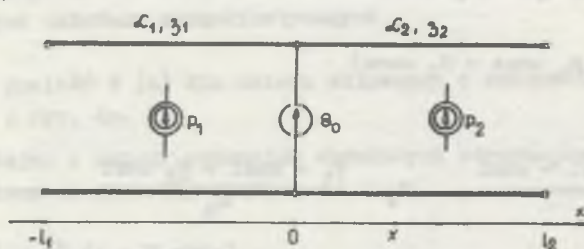
$$\Theta(x) = \frac{P_0}{2 \sqrt{kAAS}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{kA}{AS}} x \right\}, \quad \text{gdzie: } P_0 = \frac{2\Theta_0}{\dot{q}}.$$

Otrzymana zależność jest zgodna z uzyskaną w pracy [2], jeśli dla otrzymanego tam rozwiązania pominie się wpływ temperatury na wydzieloną w torze moc.

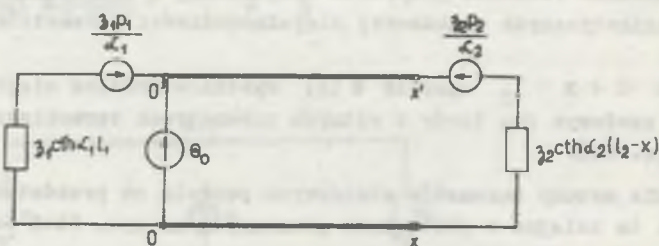
4.3.2. Dla $0 < x < l$ określić $\Theta(x)$ w jednorodnym torze prądowym z przewężeniem (rys. 7a).

Z racji symetrii (mamy wtedy $P(0) = 0$) część układu na lewo od $x = 0$ zastąpić można rezystancją cieplną $R_{c1} = \infty$, a część układu na prawo od $x = l$ (przy $l_1 \rightarrow \infty$) przez $R_{c2} = \frac{1}{\dot{q}_1}$ (rys. 7b).

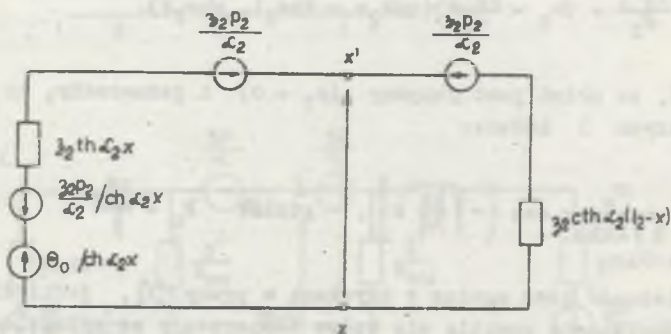
a/.



b/.



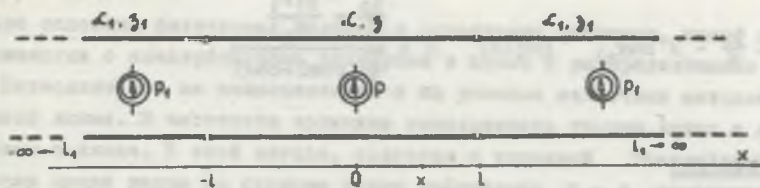
c/.



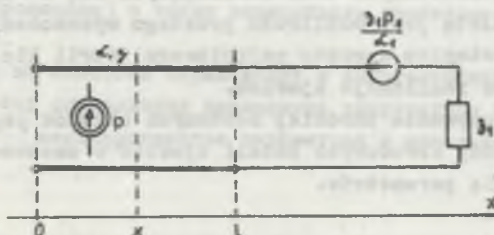
Rys. 6. Zestaw czokoowy torów prądowych o odmiennych parametrach termokinetycznych a) i jego reprezentacje obwodowe b), c) dla $0 < x < l_2$

Fig. 6. Butt joint of current lines of different thermokinetic parameters a), and its circuit representations b), c) for $0 < x < l_2$

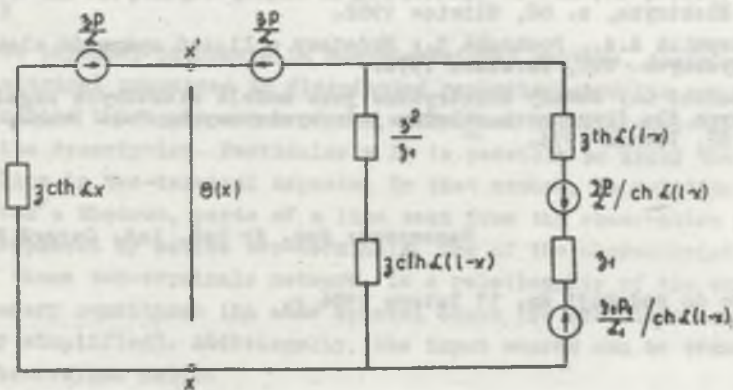
a).



b).



c).



Rys. 7. Jednorodny tor prądowy (α_1, β_1, P_1) z przewężeniem (α, β, P) a) i jego realizacje obwodowe b), c) dla $0 < x < l$

Fig. 7. Uniform current line (α_1, β_1, P_1) with contraction (α, β, P) a) and its circuit realizations b), c) for $0 < x < l$

Można zatem rozważany układ, ze względu na zaciski xx' , przedstawić w sposób pokazany na rys. 7c. W wyniku otrzymujemy:

$$\theta(x) = \frac{2p}{\alpha} - H \operatorname{ch} \alpha x, \quad \text{gdzie: } H = \frac{\frac{2p}{\alpha} - \frac{21p_1}{\alpha_1}}{\frac{21}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha l + \operatorname{ch} \alpha l}.$$

5. Uwagi końcowe

Zaprezentowana metoda pozwala na wyznaczanie rozkładu przyrostu temperatury w torach prądowych jednorodnych oraz składających się z odcinków jednorodnych. Główną jej zaletą jest możliwość prostego wyznaczania rozkładu temperatury z wykorzystaniem aparatu pojęciowego teorii linii długiej rozszerzonej o obwodowe realizacje zjawisk.

Wydaje się możliwe rozwiązywanie bardziej złożonych układów poprzez odpowiednią modyfikację metody obwodowych modeli zjawisk w zastosowaniu do układów o skokowej zmianie parametrów.

LITERATURA

- [1] Bartodziej G.; Modele elektrycznych złączy stykowych. ZN. Pol. Śl., s. Elektryka, z. 80, Gliwice 1982.
- [2] Maksymiuk A.A., Pochonke Z.; Podstawy obliczeń aparatów elektroenergetycznych. WNT, Warszawa 1976.
- [3] Różański L.; Obwody elektryczne jako modele niektórych zagadnień brzegowych dla fizycznych układów jednowymiarowych. Pol. Pozn., Rozprawy Nr 62, Poznań 1974.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Gerard Bartodziej

Wpłynęło do redakcji dn. 11 lutego 1986 r.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
В СКАЧКООБРАЗНО - НЕОДНОРОДНЫХ ТОКОПРОВОДАХ

Р е з ю м е

Для описания физических явлений в одномерных системах, часто используются их аналогии с электрическими явлениями в цепях с распределенными параметрами. Позволяет это на использование в их решении известных методов анализа длинной линии. В частности возможно использовать теорию линии в двухполюсном подходе. В этой методе, согласно с теоремой Thevenina-Nortona участки линии видны со стороны точки наблюдения $x = x_0$ замещаются активными двухполюсниками. Характерной их чертой является зависимость их структуры от граничных условий (в частном случае может она подвергаться значительным упрощениям) а также возможность транспонирования источников к месту наблюдения.

Базируя на аналогии термических и электрических величин, в работе представлен метод определения превышения температуры в токоведущих узлах со скачкообразной неоднородностью параметров с использованием цепных моделей явлений.

ON A METHOD OF CALCULATING THE STATIONARY TEMPERATURE DISTRIBUTION
IN BUS-BAR ELEMENTS WITH PARAMETERS OF JUMPING HETEROGENEITY

S u m m a r y

To describe physical phenomena in one-dimensional systems, their analogies to electrical processes in distributed parameter circuits are often used. This enables the application of the well-known methods of long line analysis to its description. Particularly it is possible to apply the theory of long line in two-terminal aspects. By that method, in relation to Thevenin-Norton's theorem, parts of a line seen from the observation point $x = x_0$ are replaced by active two-terminals. One of the characteristic features, of these two-terminals network, is a relationship of the structure with boundary conditions (in some special cases the structure can be substantially simplified). Additionally, the input source can be transposed to the observation point.

The paper, using an analogy between heat and electric quantities, presents the method of computing temperature increments in bus-bars with jumping heterogeneity of their parameters. A circuit model of the phenomena is also shown.