ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: GÓRNICTWO z. 117 Nr kol. 725

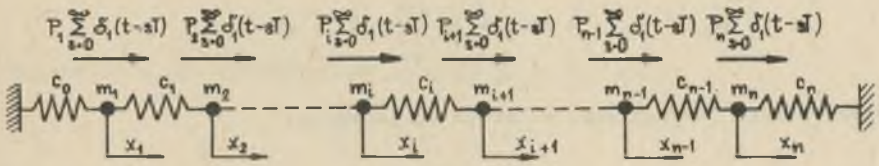
Zbigniew BOGUCKI, Jan SIWIEC

DRGANIA UKŁADU DYSKRETNEGO WYMUSZONE CIĄGIEM IMPULSÓW PIERWSZEGO RZĘDU. IMPULSOWY WSPÓŁCZYNNIK WPŁYWU

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę drgań nietłumionych liniowego układu dyskretnego o n stopniach swobody, wymuszonych ciągiem impulsów pierwszego rzędu. Okresowy ciąg impulsów przyłożono do wszystkich mas układu; wprowadzono pojęcie impulsowego współczynnika wpływu α_{ijk}. Współczynnik ten oznacza amplitudę i-tego drgania głównego $z_i(t)$ realizującego się w ramach drgań j-tej masy $x_j(t)$ i będącej skutkiem działania okresowego ciągu impulsów przyłożonego do k-tej masy. Pozwala to na określanie drgań wymuszonych każdej z mas układu jako wyniku superpozycji działania wymuszeń przyłożonych do wszystkich mas.

Przedstawiona praca otwiera serię prac przygotowywanych do publikacji, a poświęconych zagadnieniom z dynamiki maszyn górniczych, w których obciążenie zewnętrzne można modelować za pomocą ciągu impulsów.

Model fizyczny rozpatrywanego układu przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1

gdzie:

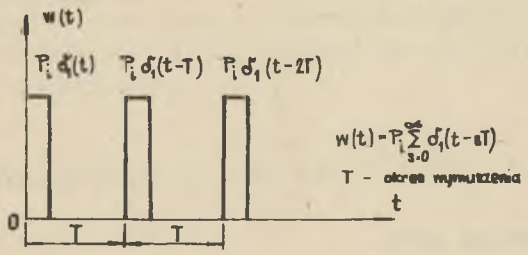
$m_1, m_2, \ldots, m_n$ - masy układu,

$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ - stałe sprężyste,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - wychylenia poszczególnych mas układu od położenia równowagi,

$\delta_1(t)$ - "funkcja" Diraca.

Wymuszenie w formie współokresowych i zgodnych co do faz ciągów impulsów pierwszego rzędu przyłożono do wszystkich mas układu.



Rys. 2

Przybliżony przebieg "funkcji" wymuszającej przyłożonej do i-tej masy jako funkcja czasu t pokazano na rysunku 2.

W dalszej części rozważań założono:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m,$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c.$$

Powyższy układ zaliczyć można do liniowych układów Sturma.

Model matematyczny układu podany jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = P_1 \sum\limits_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT) \\ m\ddot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 - cx_3 = P_2 \sum\limits_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m\ddot{x}_i - cx_{i-1} + 2cx_i - cx_{i+1} = P_i \sum\limits_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m\ddot{x}_n - cx_{n-1} + 2cx_n = P_n \sum\limits_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT) \end{cases} \tag{1}$$

Układ równań (1) zapisano w formie macierzowej:

$$B.\ddot{X} + C.X = W, \tag{2}$$

gdzie:

B - macierz bezwładności,
C - macierz sprężystości,
X - macierz kolumna wychyleń,
W - macierz kolumna wymuszeń,

$$B = \begin{Vmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m \end{Vmatrix} \quad C = \begin{Vmatrix} 2c & -c & 0 & \cdots & 0 \\ -c & 2c & -c & \ddots & \vdots \\ 0 & -c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2c & -c \\ 0 & \cdots & 0 & -c & 2c \end{Vmatrix} \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \quad \ddot{X} = \begin{Vmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Vmatrix} \quad W = \begin{Vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Vmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} \delta_1(t-sT) \tag{2'}$$

Mnożąc lewostronnie (2) przez B^{-1} otrzymano:

$$\ddot{X} + C_1 . X = W_1, \tag{3}$$

gdzie:

$C_1 = B^{-1}.C, \quad W_1 = B^{-1}.W,$

$$C_1 = \begin{Vmatrix} \frac{2c}{m} & \frac{-c}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-c}{m} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{-c}{m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{-c}{m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-c}{m} & \frac{2c}{m} \end{Vmatrix} \quad W_1 = \begin{Vmatrix} \frac{P_1}{m} \\ \vdots \\ \frac{P_n}{m} \end{Vmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT) = W^0 \sum_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT)$$

Wprowadzając podstawienie:

$$X = U . Z \tag{4}$$

można równanie (3) sprowadzić do następującej postaci:

$$\ddot{Z} + K^2 . Z = U^{-1} . W_1, \tag{5}$$

gdzie:

U - macierz utworzona z unormowanych wektorów własnych macierzy C_1,

$K^2 = U^{-1} . C_1 . U$ - diagonalna macierz kwadratów częstości własnych.

Elementy macierzy K^2 wyznaczono ze wzoru [1], [3]:

$$k_i = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{i\pi}{2(n+1)} \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{6}$$

Współrzędne wektora własnego U_j wyznaczono z dokładnością do stałej a_j ze wzoru [3]:

$$u_{ij} = a_j \sin \frac{\pi ij}{n+1} \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,n \end{matrix} \tag{7}$$

Warunki normalizacji wektorów własnych U_j prowadzą do związków:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij}^2 = 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

które zostaną spełnione po wyznaczeniu stałej a_j z następującej zależności:

$$a_j = \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Uwzględniając powyższe zależności można równanie (5) zapisać w postaci:

$$\ddot{z}_j + k_j^2 . z_j = \sum_{i=1}^{n} (u_{ij} . w_i^o) \sum_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT) \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

Równanie (8) zapisać można w krótszej formie:

$$\ddot{z}_j + k_j^2 . z_j = r_j \sum_{s=0}^{\infty} \delta_1(t - sT), \tag{9}$$

gdzie:

$$r_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij} . w_i^o \tag{10}$$

Całka ogólna równania (9) jest następująca [2]:

$$z_j(t) = z_j(0)\cos k_j t + \frac{\dot{z}_j(0)}{k_j} \sin k_j t + \frac{r_j}{2k_j} (\sin k_j t - \cos k_j t \operatorname{ctg} \frac{k_j T}{2}) + f_j(t) \tag{11}$$

przy czym:

$$f_j(t) = \frac{2r_j}{T} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi st}{T}}{k_j^2 - \frac{4\pi^2 s^2}{T^2}} \tag{12}$$

Funkcja $f_j(t)$ jest okresową funkcją czasu o okresie równym okresowi działania impulsów.
Powrót do współrzędnej x za pośrednictwem związku X = U.Z prowadzi do j-tej współrzędnej wektora X:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ji} \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} u_{ji} \Big[z_i(0) \cos k_i t + \frac{\dot{z}_i(0)}{k_i} \sin k_i t +$$

$$\frac{r_i}{2k_i} \left(\sin k_i t - \cos k_i t \operatorname{ctg} \frac{k_i T}{2} \right) + f_i(t) \Big] . \tag{13}$$

W dalszej części rozważań założono, że w rozpatrywanym układzie występują tylko drgania czysto wymuszone, jakie uzyskać można przy spełnieniu następujących warunków okresowości [1], [2]:

$$z_i(0) = \frac{r_i}{2k_i} \operatorname{ctg} \frac{k_i T}{2} \tag{14}$$

$$\dot{z}_i(0) = - \frac{r_i}{2} \tag{15}$$

Pozwala to zapisać równanie (13) w następującej postaci:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ji} \cdot f_i(t) \tag{16}$$

Równanie (12) funkcji $f_i(t)$ zanotowano w formie zamkniętej [1], [2]:

$$f_i(t) = \frac{r_i}{2k_i \sin \frac{k_i T}{2}} \cos k_i \left(t - \frac{T}{2} \right) \quad (0 < t < T) \tag{17}$$

Po uwzględnieniu (10), (17) i podstawieniu do (16) otrzymano:

$$x_j(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k^o \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{ji}u_{ki}}{k_i \sin\frac{k_i T}{2}} \cos k_i\left(t - \frac{T}{2}\right) \qquad \begin{matrix}(j = 1,2,\ldots,n)\\ (0 < t < T)\end{matrix} \tag{18}$$

Trójwskaźnikowy współczynnik:

$$\alpha_{ijk} = \frac{u_{ji}u_{ki}}{k_i \sin\frac{k_i T}{2}} \tag{19}$$

oznacza amplitudę i-tego drgania głównego $z_i(t)$, realizującego się w ramach j-tej współrzędnej $x_j(t)$ i będącą skutkiem działania wektora W_l o współrzędnych:

$$W_l = \begin{cases} w_l^o \sum_{s=0}^{\infty} \delta_l(t - sT) & \text{jeśli } l = k \\ 0 & \text{jeśli } l \neq k \end{cases}$$

Współczynnik α_{ijk} nazwano impulsowym współczynnikiem wpływu.
Rozwiązanie (18) przyjmie teraz postać:

$$x_j(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k^o \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} \cdot \cos k_i\left(t - \frac{T}{2}\right), \tag{20}$$

z której wynika, że drganie wymuszone $x_j(t)$ jest wynikiem superpozycji skutków działania współrzędnych wektora wymuszeń w_k^o na każdej z głównych form drgań własnych.

Należy zaznaczyć, że dowolny przebieg funkcji okresowej można zastąpić w przybliżeniu okresowymi ciągami impulsów, co pozwala wykorzystać impulsowy współczynnik wpływu w przypadkach wymuszeń okresowych nieimpulsowych. Bliższe szczegóły poruszonego zagadnienia zostaną rozważone w przygotowywanej publikacji.

W dalszej części rozważań rozpatrzono przypadek szczególny, w którym wymuszenie (w postaci ciągu impulsów pierwszego rzędu) przyłożone jest tylko do k-tej masy.

Wychylenia poszczególnych mas $x_j(t)$ wyznaczone z (20) przyjmują postać:

$$x_j(t) = \frac{1}{2} w_k^o \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} \cos k_i(t - \frac{T}{2}), \tag{21}$$

$$x_j(t) = \frac{1}{2} \frac{P}{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} \cos k_i(t - \frac{T}{2}), \tag{22}$$

gdyż

$$^T w^o = \| 0, 0, \ldots, w_k^o, 0, 0, \ldots, 0 \|,$$

gdzie:

$w_i^o = 0$ dla $i \neq k$

$w_i^o = \frac{P}{m}$ dla $i = k$

Powstałe w czasie drgań siły dynamiczne jako napięcia w poszczególnych sprężynach podano wzorem:

$$P_{dj} = c(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{2} \frac{Pc}{m} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij+1k} - \alpha_{ijk}) \cos k_i(t - \frac{T}{2}) \quad (0<t<T). \tag{23}$$

WNIOSKI

1. Przeanalizowano drgania wymuszone układu dyskretnego w układzie Sturma, powstałe pod wpływem działania okresowych ciągów impulsów

$$P_i \sum_{s=0}^{\infty} \delta(t - sT).$$

2. Stwierdzono, że wprowadzone pojęcie impulsowego współczynnika wpływu pozwala na stosowanie zasady superpozycji do określania drgań wymuszonych poszczególnych mas układu pod wpływem obciążeń impulsowych przykładanych do wszystkich mas.

3. Zaawizowano możliwość matematycznego modelowania dowolnego okresowego wymuszenia poprzez okresowe ciągi impulsów i podanie reakcji układu z uwzględnieniem wprowadzonego pojęcia impulsowego współczynnika wpływu.

LITERATURA

[1] BABAKOW J.M.: Tieoria kolebanij. Gosudarstwiennoje Izdatielstwo Techniko-Teoretyczeskoj Literatury. Moskwa 1958.

[2] BOGUCKI Z.J.: Reakcja wielostopniowej przekładni zębatej na układ nagle przyłożonych sił zewnętrznych i międzyzębnych. Praca doktorska. Gliwice 1964.

[3] GANTMACHER F.R., KREJN M.F.: Oscylacjonnyje matricy i jadra i małyje kolebanija mechaniczeskich sistiem. Gosudarstwiennoje Izdatielstwo Techniko-tieoretyczeskoj Literatury. Moskwa 1950.

[4] ŁOCJANSKIJ Ł.G., ŁURIE A.I.: Kurs tieorieticzeskoj miechaniki (czast II). Gosudarstwiennoje Izdatielstwo Techniko-Tieoretyczeskoj Literatury. Leningrad, Moskwa 1940.

Recenzent: doc. dr inż. Roman Klus

Wpłynęło do Redakcji 1.03.1982 r.

КОЛЕБАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ
ВЫНУЖДЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ИМПУЛЬСОВ ПЕРВОГО РЯДА.
ИМПУЛЬСНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ВЛИЯНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлен анализ недеформированных колебаний линийной дискретной системы с количеством n степеней свободы, вынужденных последовательностью импульсов первого ряда.

Периодическая последовательность импульсов была приложена ко всем массам системы; было введено понятие импульсного коэффициента влияния α_{ijk}. Этот коэффициент обозначает амплитуду i-того главного колебания $z_i(t)$ осуществляемого в области колебаний j-той массы $x_j(t)$ и являющейся результатом действия периодической последовательности импульсов приложенной к k-той массе. Это дает возможность определить вынужденные колебания каждой из масс системы как результат суперпозиции действия вынуждений приложенных ко всем массам.

VIBRATIONS OF THE DISCRETE SYSTEM FORCED
BY THE SERIES OF IMPULSES OF THE FIRST ORDER

S u m m a r y

The paper presents an analysis of nondamped vibrations of a linear discrete system with n-degrees of freedom forced by the series of impulses of the first order. A periodic series of impulses was applied to all

masses of the system; the notion of impulse coefficient of the influence α_{ijk} has been introduced. This coefficient denotes the amplitude of the i-main vibration $z_i(t)$ which realizes itself within vibrations of j-mass $x_j(t)$ and which is the result of the operation of the periodic series of impulses applied to k-mass. It enables the qualification of forced vibrations of each of the masses of the system as the result of the superposition of operation of the impulses applied to all of the masses.