

Bronisław RADZIK

OKREŚLANIE STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI CIAŁA
CHARAKTERYZUJĄCEGO SIĘ PEŁNĄ ANIZOTROPIĄ WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono eksperymentalną metodę określenia stałych sprężystości ośrodka liniowo-sprężystego, posiadającego pełną anizotropię własności sprężystych, czyli takiego ośrodka, w którego strukturze jak również jego własnościach odkształceniowych nie występują elementy symetrii. Zakłada się, że pomiar wartości współrzędnych tensorów odkształceń odbywa się za pomocą tensorów elektrooporowych przy jednokierunkowym ściskaniu prostopadłościennych próbek. Bazując na związkach uogólnionego prawa Hooke'a otrzymuje się oznaczony układ równań liniowych ze względu na stałe sprężystości ośrodka, którego rozwiązanie jest znane.

1. WPROWADZENIE

Związek pomiędzy stanem odkształcenia i naprężenia dla ośrodka anizotropowego, liniowo-sprężystego, znajdującego się w stanie izotermicznym ($T = \text{const}$) i nie posiadającego własności piezo- ani piroelektrycznych jest funkcją liniową (uogólnione prawo Hooke'a).

Uogólnione prawo Hooke'a w kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x_i\}$, ($i = 1, 2, 3$), z bazą orotonormalną, notuje się następująco:

$$e_{ij} = a_{ijkl} S_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

gdzie:

- e_{ij} - współrzędne tensora odkształcenia,
- S_{kl} - współrzędne tensora naprężenia,
- a_{ijkl} - współrzędne tensora podatności sprężystej (tensora stałych sprężystości).

Liczba współrzędnych tensora podatności sprężystej wynosi 81, przy czym niezależnych jest tylko 21 współrzędnych (w przypadku ogólnej anizotropii), ponieważ zachodzą związki wynikające z symetrii [4, 5]:

$$e_{ij} = e_{ji} \quad \text{oraz} \quad S_{kl} = S_{lk}. \quad (1.2)$$

Wskutek tego:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} \quad \text{oraz} \quad a_{ijkl} = a_{ijlk}, \quad (1.3)$$

a ponadto siły wewnętrzne mają potencjał, czego konsekwencją jest zależność:

$$a_{ijkl} = a_{klij}. \quad (1.4)$$

Do dalszych rozważań wprowadza się zapis macierzowy tensora stanu odkształcenia i naprężenia [3, 4]. Przyjmuje się mianowicie wektor kolumnę odkształceń oraz naprężeń $[[e_{\alpha}]]$, $[[S_{\beta}]]$, $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6)$. Elementy e_{α} , S_{β} tych macierzy po przyjęciu schematu wskaźników:

zapis tensorowy - 11 22 33 23, 32 13, 31 12, 21

zapis macierzowy - 1 2 3 4 5 6

oraz po wprowadzeniu oznaczenia $\Omega_{(\alpha)}$ według wzoru:

$$\Omega_{(\alpha)} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \alpha = 1, 2, 3 \\ 2, & \text{jeżeli } \alpha = 4, 5, 6 \end{cases}$$

określa się następująco:

$$\frac{e_{\alpha}}{\Omega_{(\alpha)}} = e_{ij}, \quad S_{\alpha} = S_{ij} \quad (1.5)$$

Podobnie wprowadza się macierz stałych sprężystości $[[a_{\alpha\beta}]]$ według wzoru:

$$\frac{a_{\alpha\beta}}{\Omega_{(\alpha)} \Omega_{(\beta)}} = a_{ijkl} \quad (1.6)$$

Po wprowadzeniu zapisu macierzowego uogólnione prawo Hooke'a można zanotować następująco:

$$[[e_{\alpha}]] = [[a_{\alpha\beta}]] [[S_{\beta}]], \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.7)$$

przy czym zgodnie z (1.4) zachodzi związek:

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \quad (1.8)$$

W pracy zaproponowano eksperymentalną metodę wyznaczania elementów macierzy stałych sprężystości $a_{\alpha\beta}$ poprzez pomiary odkształceń przeprowadzone na próbkach prostopadłościennych, poddanych jednokierunkowemu ścisnaniu. Niezbędną liczbę tych próbek, przestrzenną orientację ich osi oraz mierzone wielkości podano w następnym rozdziale.

2. OPIS POMIARÓW

Celem wyznaczenia wartości wszystkich niezależnych stałych sprężystości (ich liczba wynosi 21) bada się zależności współrzędnych wektorów odkształceń e_{α}^r od współrzędnych wektorów naprężeń S_{β}^r , rozumianych jako od-

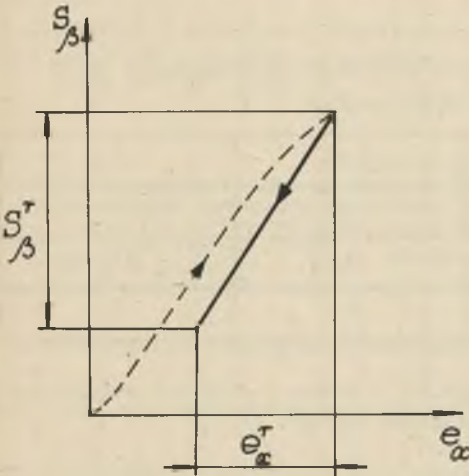
powiadające sobie przyrosty w określonym przedziale obciążeń. Badania przeprowadza się na pięciu próbkach prostopadłościennych, które poddaje się jednokierunkowemu, quasistatycznemu ściskaniu.

Pomiary odkształceń przeprowadza się podczas procesu odciążenia próbek, które uprzednio obciąża się do granicy sprężystości R_{sp} (dla ciał sprężysto-plastycznych) lub do wartości równej 75% doraźnej granicy wytrzymałości R_m (dla ciał sprężysto-kruchych).

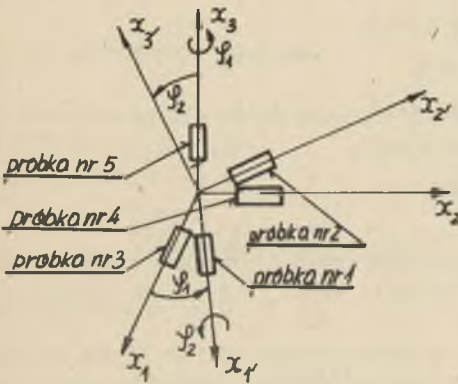
Do obliczeń (jak już wspomniano) uwzględnia się przyrosty odkształceń i odpowiadające im przyrosty naprężeń w określonym przedziale obciążeń, co przedstawiono na rysunku 1.

Należy tu zaznaczyć, że każda z pięciu przyjętych do badań próbek ma inną, z góry znaną orientację.

Próbki oznaczone numerami 1, 2 wycinane są wzdłuż osi pomocniczego układu współrzędnych $\{x_i'\}$, ($i' = 1, 2, 3$), zaś próbki o numerach 3, 4, 5 wycinane są wzdłuż osi układu podstawowego $\{x_i\}$, ($i = 1, 2, 3$), co przedstawiono na rysunku 2. Powierzchnie boczne próbek 1, 2 powinny być równoległe do płaszczyzn układu $\{x_i'\}$, zaś powierzchnie boczne próbek



Rys. 1. Przykład wykresu zależności $S_{\beta}^r = f(e_{\alpha}^r)$ dla obciążania i odciążania



Rys. 2. Orientacja próbek

3, 4, 5 równoległe do płaszczyzn układu $\{x_i\}$.

Położenie układu $\{x_i'\}$ należy ustalić następująco: najpierw dokonuje się obrotu układu $\{x_i\}$ wokół osi x_3 o pewien znany kąt $\varphi_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ -

otrzymuje się wtedy nowy układ z ustalonym już położeniem osi x_1 ; następnie obracając nowy układ wokół x_1 o kąt $\varphi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ otrzymujemy położenie układu $\{x_2\}$. Wartości kątów φ_1 i φ_2 powinny być tak dobrane, aby wycinanie próbek z ciała było możliwie najwygodniejsze ze względów technologicznych.

Kierunki osi układu $\{x_1\}$ określają kosinusy kierunkowe $l_{1'i}$ (tablica 1)

Tablica 1

Kosinusy kierunkowe $l_{1'i}$ określające położenie $\{x_1\}$ względem $\{x_i\}$,
gdzie $\bar{j}_i, \bar{j}_{i'}$ - wektory bazy

	\bar{j}_1	\bar{j}_2	\bar{j}_3
$\bar{j}_{1'}$	$l_{1'1}$	$l_{1'2}$	0
$\bar{j}_{2'}$	$l_{2'1}$	$l_{2'2}$	$l_{2'3}$
$\bar{j}_{3'}$	$l_{3'1}$	$l_{3'2}$	$l_{3'3}$

Wartości kosinusów kierunkowych tablicy 1 można obliczyć według znanych kątów Eulera $(\varphi_1, \varphi_2, 0)$ następującymi wzorami [1]:

$$\begin{aligned}
 l_{1'1} &= \cos \varphi_1 \\
 l_{1'2} &= \sin \varphi_1 \\
 l_{1'3} &= 0 \\
 l_{2'1} &= -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
 l_{2'2} &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
 l_{2'3} &= \sin \varphi_2 \\
 l_{3'1} &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
 l_{3'2} &= -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
 l_{3'3} &= \cos \varphi_2
 \end{aligned}$$

W celu uzyskania maksymalnej ilości informacji z pomiarów czujniki tensometryczne powinny być naklejane na układzie rozet na czterech powierzchniach bocznych próbek.

Przeprowadzone w ten sposób pomiary na pięciu próbkach, wyciętych według wskazanych w pracy orientacji, umożliwiają uzyskanie danych, niezbędnych do określenia wszystkich stałych sprężystości. Użycie do pomiarów mniejszej liczby próbek nie dostarcza koniecznej ilości informacji.

Celem zwiększenia wiarygodności wyników badań laboratoryjnych należy wykonać serię takich pomiarów na kilku piątkach tak wyciętych próbek. Otrzymane populacje próbne umożliwiają oszacowanie liniowych związków sto-

chastycznych pomiędzy współrzędnymi wektorów odkształceń i naprężeń metodą najmniejszej sumy kwadratów. Procedurę tego oszacowania pominięto ze względu na ograniczenia objętościowe pracy.

Wprowadzenie uzyskanych w ten sposób wartości oczekiwanych współrzędnych wektorów odkształceń (dla danych współrzędnych wektorów naprężeń) do równań wyznaczających stałe sprężystości zwiększa miarodajność wyników obliczeń.

W tablicy 2 zestawiono wielkości, których wartości można określić bezpośrednio lub pośrednio na podstawie pomiarów.

Tablica 2

Wielkości niezerowe, których wartości można uzyskać na podstawie pomiarów laboratoryjnych. Górne indeksy oznaczają nr próbki, na której wielkość jest zmierzona

Nr próbki	Współrzędne wektorów naprężeń	Współrzędne wektorów odkształceń				
1	S_1^1	e_1^1	e_2^1	e_3^1	e_5^1	e_6^1
2	S_2^2	e_1^2	e_2^2	e_3^2	e_4^2	e_6^2
3	S_1^3	e_1^3	e_2^3	e_3^3	e_5^3	e_6^3
4	S_2^4	e_1^4	e_2^4	e_3^4	e_4^4	e_6^4
5	S_3^5	e_1^5	e_2^5	e_3^5	e_4^5	e_5^5

3. OPRACOWANIE POMIARÓW

Równania uogólnionego prawa Hooke'a (1.7) w odniesieniu do badanych próbek można zapisać:

- dla próbek nr 1, 2

$$\begin{bmatrix} e_{\alpha'}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\alpha'\beta'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{\beta'}^r \end{bmatrix}, \quad (\alpha', \beta' = 1', 2', \dots, 6'; \quad r = 1, 2) \quad (3.1)$$

- dla próbek nr 3, 4, 5

$$\begin{bmatrix} e_{\alpha'}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\alpha'\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{\beta}^r \end{bmatrix}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6, \quad r = 3, 4, 5), \quad (3.2)$$

gdzie górny wskaźnik r - oznacza numer próbki.

Postać równań (3.1) i (3.2) przy przyjętym schemacie pomiarowym, polegającym na pomiarze odkształceń próbek wyłącznie ściskanych jednokierunkowo, jest prosta.

Podstawiając do (3.1) dane uzyskane na podstawie pomiarów próbek nr 1, 2 (tablica 2) otrzymuje się następujące dwa układy równań:

$$\begin{aligned} e_{1'}^1 &= a_{1' 1'} S_{1'}^1, \\ e_{2'}^1 &= a_{1' 2'} S_{1'}^1, \\ e_{3'}^1 &= a_{1' 3'} S_{1'}^1, \\ e_{5'}^1 &= a_{1' 5'} S_{1'}^1, \\ e_{6'}^1 &= a_{1' 6'} S_{1'}^1, \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} e_{1'}^2 &= a_{2' 2'} S_{2'}^2, \\ e_{2'}^2 &= a_{2' 2'} S_{2'}^2, \\ e_{3'}^2 &= a_{2' 3'} S_{2'}^2, \\ e_{4'}^2 &= a_{2' 4'} S_{2'}^2, \\ e_{6'}^2 &= a_{2' 6'} S_{2'}^2, \end{aligned} \quad (3.1b)$$

Łatwo zauważyć, że w układzie (3.1a) brakuje równania $e_{4'}^1 = a_{1' 4'} S_{1'}^1$, zaś w układzie (3.1b) brakuje równania $e_{5'}^2 = a_{2' 5'} S_{2'}^2$, ponieważ niemożliwy jest pomiar odkształceń $e_{4'}^1$ i $e_{5'}^2$.

Z równań (3.1a) i (3.1b) można bezpośrednio wyznaczyć dziewięć stałych sprężystości $a_{i' j'}$

$$\begin{aligned} a_{1' 1'} &= \frac{e_{1'}^1}{S_{1'}^1}, \\ a_{1' 2'} &= \frac{e_{2'}^1}{S_{1'}^1}, & a_{2' 2'} &= \frac{e_{2'}^2}{S_{2'}^2}, \\ a_{1' 3'} &= \frac{e_{3'}^1}{S_{1'}^1}, & a_{2' 3'} &= \frac{e_{3'}^2}{S_{2'}^2}, \\ a_{1' 5'} &= \frac{e_{5'}^1}{S_{1'}^1}, & a_{2' 4'} &= \frac{e_{4'}^2}{S_{2'}^2}, \\ a_{1' 6'} &= \frac{e_{6'}^1}{S_{1'}^1}, & a_{2' 6'} &= \frac{e_{6'}^2}{S_{2'}^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wzory (3.3) można zapisać krótko w postaci:

$$a_{\alpha'\beta'} = \frac{e_r}{S_{\alpha'}}, \quad (3.3a)$$

gdzie: $r = 1, 2$

dla $r = 1$, $\alpha' = 1', 2', 3', 5', 6'$

dla $r = 2$, $\alpha' = 2', 3', 4', 6'$

Uwzględniając w równaniach (3.2) dane uzyskane na podstawie pomiarów próbek nr 3, 4, 5 otrzymuje się, analogicznie jak w przypadku próbek nr 1 i 2, trzy następujące układy:

$$\begin{aligned} e_1^3 &= a_{11} s_1^3 \\ e_2^3 &= a_{12} s_1^3 \\ e_3^3 &= a_{13} s_1^3 \\ e_5^3 &= a_{15} s_1^3 \\ e_6^3 &= a_{16} s_1^3 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} e_1^4 &= a_{12} s_2^4 \\ e_2^4 &= a_{22} s_2^4 \\ e_3^4 &= a_{23} s_2^4 \\ e_4^4 &= a_{24} s_2^4 \\ e_6^4 &= a_{26} s_2^4 \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned} e_1^5 &= a_{13} s_3^5 \\ e_2^5 &= a_{23} s_3^5 \\ e_3^5 &= a_{33} s_3^5 \\ e_4^5 &= a_{34} s_3^5 \\ e_5^5 &= a_{35} s_3^5 \end{aligned} \quad (3.2c)$$

Z równań (3.2a), (3.2b), (3.2c) można wyznaczyć dwanaście nieprimowanych stałych sprężystości $a_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{e_3}{s_1} \\
 a_{12} &= \frac{e_3}{s_1} & a_{22} &= \frac{e_4}{s_2} \\
 a_{13} &= \frac{e_3}{s_1} & a_{23} &= \frac{e_4}{s_2} & a_{33} &= \frac{e_5}{s_3} \\
 a_{15} &= \frac{e_3}{s_1} & a_{24} &= \frac{e_4}{s_2} & a_{34} &= \frac{e_5}{s_3} \\
 a_{16} &= \frac{e_3}{s_1} & a_{26} &= \frac{e_4}{s_2} & a_{35} &= \frac{e_5}{s_3}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Krótsza forma zapisu związków (3.4) może być następująca:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{e_r}{s_r} \tag{3.4a}$$

gdzie: $r = 3, 4, 5$

dla $r = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1, 2, 3, 5, 6$

dla $r = 4$, $\alpha = 4$, $\beta = 2, 3, 4, 6$

dla $r = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 3, 4, 5$.

Z ogólnego prawa transformacji tensora czwartego rzędu (związek między stałymi primowanymi i nieprimowanymi) mamy:

$$a_{i'j'k'l'} = l_{i1} l_{j1} l_{k1} l_{l1} a_{ijkl}, \quad (i', j', k', l' = 1, 2, 3; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{3.5}$$

Stosownie do wprowadzonej już (w rozdz. 1 pracy) notacji macierzowej równania (3.5) można przedstawić w bardziej zwartej postaci [3]:

$$a_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\alpha'} \xi_{\beta\beta'} a_{\alpha'\beta'}, \quad (\alpha', \beta' = 1, 2, \dots, 6; \quad \alpha\beta = 1, 2, \dots, 6), \tag{3.5a}$$

gdzie współczynniki przekształcenia $\xi_{\alpha\alpha'}$, $\xi_{\beta\beta'}$, zależne od kosinusów kierunkowych l_{i1} , ujęto w tablicy 3.

Rozpisując równania (3.5a) i uwzględniając zależności: $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ oraz $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ otrzymuje się układ 21 równań o 42 niewiadomych (21 stałych primowanych i 21 stałych nieprimowanych). Jednakże po stronie primowanych i nieprimowanych stałych sprężystości wyznaczonych jest łącznie 21 nie-

Tablica 3

Współczynniki przekształcenia $\varepsilon_{\alpha'\alpha}$, $\varepsilon_{\beta'\beta}$

α', β α', β	1	2	3	4	5	6
1'	$1_{11}1_{11}$	$1_{12}1_{12}$	$1_{13}1_{13}$	$1_{12}1_{13}$	$1_{13}1_{11}$	$1_{12}1_{11}$
2'	$1_{21}1_{21}$	$1_{22}1_{22}$	$1_{23}1_{23}$	$1_{23}1_{22}$	$1_{23}1_{21}$	$1_{22}1_{21}$
3'	$1_{31}1_{31}$	$1_{32}1_{32}$	$1_{33}1_{33}$	$1_{33}1_{32}$	$1_{33}1_{31}$	$1_{32}1_{31}$
4'	$21_{31}1_{21}$	$21_{32}1_{32}$	$21_{33}1_{23}$	$1_{33}1_{22} + 1_{32}1_{23}$	$1_{33}1_{21} + 1_{31}1_{23}$	$1_{31}1_{22} + 1_{32}1_{21}$
5'	$21_{31}1_{11}$	$21_{32}1_{12}$	$21_{33}1_{13}$	$1_{33}1_{12} + 1_{32}1_{13}$	$1_{33}1_{11} + 1_{31}1_{13}$	$1_{31}1_{12} + 1_{32}1_{11}$
6'	$21_{21}1_{11}$	$21_{12}1_{22}$	$21_{13}1_{23}$	$1_{13}1_{22} + 1_{12}1_{23}$	$1_{13}1_{21} + 1_{11}1_{23}$	$1_{11}1_{22} + 1_{12}1_{21}$

wiadomych (wzory (3.3a) i (3.4a)). Podstawiając następnie po lewej stronie równań (3.5a) dziewięć znanych wartości $a_{\alpha'\beta}$ (wzory (3.3a)) uzyskuje się układ dziewięciu równań o 21 niewiadomych, stałych nieprimowanych $a_{\alpha\beta}$

$$\frac{\varepsilon_{\beta'}^r}{S_{\alpha'}^r} = \varepsilon_{\alpha'\alpha} \varepsilon_{\beta'\beta} a_{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

gdzie: $r = 1, 2$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$

dla $r = 1$, $\alpha' = 1', 2', 3', 5', 6'$

dla $r = 2$, $\alpha' = 2', 3', 4', 6'$

Rozpisując równania (3.6) i podstawiając po prawej stronie określone wzorami (3.4a) dwanaście stałych $a_{\alpha\beta}$ oraz przenosząc odpowiednie wyrażenia na lewą stronę otrzymuje się układ dziewięciu równań z dziewięcioma niewiadomymi: a_{14} , a_{25} , a_{36} , a_{44} , a_{45} , a_{46} , a_{55} , a_{56} , a_{66} , co zanotowano w postaci macierzowej

$$\llbracket Y_p \rrbracket = \llbracket A_{pq} \rrbracket \llbracket X_q \rrbracket, \quad (p, q = 1, 2, 3) \quad (3.7)$$

Występujące w równaniu (3.7) macierze $\llbracket A_{pq} \rrbracket$, $\llbracket X_q \rrbracket$ oraz $\llbracket Y_p \rrbracket$ przedstawiono poniżej.

Macierz $\llbracket A_{pq} \rrbracket$ tworzą podmacierze A_{pq} , których postać jest następująca:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\varepsilon_{14} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\varepsilon_{15} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\varepsilon_{16} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{21} & \varepsilon_{12}\varepsilon_{25} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{22} & \varepsilon_{13}\varepsilon_{26} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{31} & \varepsilon_{12}\varepsilon_{35} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{32} & \varepsilon_{13}\varepsilon_{36} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Macierz $\begin{bmatrix} X_q \end{bmatrix}$ tworzą podmacierze X_q , których elementami są poszukiwane stałe sprężystości a_{ij} . Jej postać jest następująca:

$$\begin{bmatrix} X_q \end{bmatrix} = \text{col}(a_{14}, a_{25}, a_{36} \mid a_{44}, a_{45}, a_{46} \mid a_{55}, a_{56}, a_{66}).$$

Macierz $\begin{bmatrix} Y_p \end{bmatrix}$ składa się z podmacierzy Y_p , z których każda zawiera po trzy elementy y_i , ($i = 1, 2, \dots, 9$).

$$\begin{bmatrix} Y_p \end{bmatrix} = \text{col}(y_1, y_2, y_3 \mid y_4, y_5, y_6 \mid y_7, y_8, y_9)$$

Elementy y_i mają następującą postać:

$$y_1 = a_{11} - \left[\varepsilon_{11}\varepsilon_{11}a_{11} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{11})a_{12} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{11})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{15} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{11})a_{15} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{16} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{11})a_{16} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{12}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{12})a_{23} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{14} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{12})a_{24} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{16} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{12})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{13}\varepsilon_{13}a_{33} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{14} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{13})a_{34} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{15} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{13})a_{35} \right]$$

$$y_2 = a_{12} - \left[\varepsilon_{11}\varepsilon_{21}a_{11} + (\varepsilon_{14}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21})a_{12} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{21})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{25} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{21})a_{15} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{26} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{21})a_{16} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{22}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{22})a_{23} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{22})a_{24} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{26} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{22})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}a_{33} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{23})a_{34} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{25} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{23})a_{35} \right]$$

$$y_3 = a_{13} - \left[\varepsilon_{11}\varepsilon_{31}a_{11} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{31})a_{12} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{31})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{35} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{31})a_{15} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{36} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{31})a_{16} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{32}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{32})a_{23} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{32})a_{24} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{36} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{32})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{13}\varepsilon_{33}a_{33} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{33})a_{34} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{35} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{33})a_{35} \right]$$

$$y_4 = a_{15} - \left[\varepsilon_{11}\varepsilon_{51}a_{11} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{52} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{51})a_{12} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{53} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{51})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{55} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{51})a_{15} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{56} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{51})a_{16} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{52}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{53} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{52})a_{23} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{54} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{52})a_{24} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{56} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{52})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{13}\varepsilon_{53}a_{33} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{54} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{53})a_{34} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{55} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{53})a_{35} \right]$$

$$y_5 = a_{16}' - \left[\varepsilon_{11}\varepsilon_{61}a_{11} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{62} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{61})a_{12} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{63} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{61})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{65} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{61})a_{15} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{66} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{61})a_{16} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{62}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{63} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{62})a_{23} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{64} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{62})a_{24} + (\varepsilon_{12}\varepsilon_{66} + \varepsilon_{16}\varepsilon_{62})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{13}\varepsilon_{63}a_{33} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{64} + \varepsilon_{14}\varepsilon_{63})a_{34} + (\varepsilon_{13}\varepsilon_{65} + \varepsilon_{15}\varepsilon_{63})a_{35} \right]$$

$$y_6 = a_{22}' - \left[\varepsilon_{21}\varepsilon_{21}a_{11} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{21})a_{12} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{21})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{25} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{21})a_{15} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{26} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{21})a_{16} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{22}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{22})a_{23} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{22})a_{24} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{26} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{22})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{23}\varepsilon_{23}a_{33} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{24} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{23})a_{34} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{25} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{23})a_{35} \right]$$

$$y_7 = a_{23}' - \left[\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}a_{11} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{31})a_{12} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{31})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{35} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{31})a_{15} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{36} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{31})a_{16} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{32}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{32})a_{23} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{32})a_{24} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{36} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{32})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{23}\varepsilon_{33}a_{33} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{34} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{33})a_{34} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{35} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{33})a_{35} \right]$$

$$y_8 = a_{24}' - \left[\varepsilon_{21}\varepsilon_{41}a_{11} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{42} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{41})a_{12} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{43} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{41})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{45} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{41})a_{15} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{46} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{41})a_{16} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{42}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{43} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{42})a_{23} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{44} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{42})a_{24} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{46} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{42})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{23}\varepsilon_{43}a_{33} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{44} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{43})a_{34} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{45} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{43})a_{35} \right]$$

$$y_9 = a_{26}' - \left[\varepsilon_{21}\varepsilon_{61}a_{11} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{62} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{61})a_{12} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{63} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{61})a_{13} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{65} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{61})a_{15} + (\varepsilon_{21}\varepsilon_{66} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{61})a_{16} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{62}a_{22} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{63} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{62})a_{23} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{64} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{62})a_{24} + (\varepsilon_{22}\varepsilon_{66} + \varepsilon_{26}\varepsilon_{62})a_{26} + \right. \\ \left. + \varepsilon_{23}\varepsilon_{63}a_{33} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{64} + \varepsilon_{24}\varepsilon_{63})a_{34} + (\varepsilon_{23}\varepsilon_{65} + \varepsilon_{25}\varepsilon_{63})a_{35} \right]$$

Układ równań (3.7) jest układem Cramera ($\det [A_{pq}] \neq 0$) i posiada jednoznaczne rozwiązanie [2] w postaci:

$$[X_p] = [A_{pq}]^{-1} [Y_q] \quad (3.8)$$

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

1. Przedstawiona w pracy metoda bazuje na pomiarach tensometrycznych odkształceń próbek prostokątnych wycinanych z ciała według określonych w pracy orientacji.
2. Wykazano, że pomiary przeprowadzone na pięciu próbkach pozwalają na jednoznaczne określenie wszystkich niezależnych stałych sprężystości ciała posiadającego ogólną anizotropię.
3. Przedstawiona w pracy metoda na obecnym etapie opracowania dotyczy ciał jednorodnych.
4. Używając do pomiaru większej od pięciu liczby próbek (np. 6 lub 7), wyciętych według dodatkowych, odmiennych od siebie orientacji, uzyskuje się nadwymiarową liczbę równań konstytutywnych. Można wówczas dokonać optymalnego wyboru wartości niewiadomych wektora $\llbracket X_p \rrbracket$, co będzie przedmiotem następnej publikacji.

LITERATURA

- [1] KIELICH S.: Molekularna optyka nieliniowa. PWN, Warszawa-Poznań 1977.
- [2] KOWALCZYK G.: Macierze i ich zastosowania. WNT, Warszawa 1976.
- [3] MALMEJSTER A.K., TAMUŽ V.P., TIETIERS G.A.: Soprotivlenije žiestokich polimiernych materialow. Izd. "Zinatne". Riga 1972.
- [4] NYE J.F.: Własności fizyczne kryształów. PWN, Warszawa 1962.
- [5] SOKOŁOWSKI M.: Mechanika techniczna. Sprężystość. PWN, Warszawa 1978.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Zdzisław Kłeczek

Wpłynęło do Redakcji 19.02.1982 r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ УПРУГОСТИ ТЕЛА
ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕГОСЯ ПОЛНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ УПРУГИХ СВОЙСТВ

Р е з ю м е

В работе представлен экспериментальный метод определения констант упругости линейно-упругой среды, обладающей полной анизотропией упругих свойств, то есть такой среды, в структуре и деформирующих свойствах которой не выступают элементы симметрии. Предполагается, что измерение величины координат тензоров деформации происходит при помощи электрорезистивных тензометров в условиях одностороннего сжатия образцов имеющих форму параллелепипеда. На основании обобщенного закона Гука получаем определенную линейную систему уравнений относительно констант упругости среды, решение которой известно.

THE DETERMINATION OF ELASTIC CONSTANTS
OF A BODY CHARACTERIZED BY THE FULL ANISOTROPY OF ELASTIC PROPERTIES

S u m m a r y

The paper presents an experimental method of determining elastic constants of a linear-elastic medium characterized by full anisotropy of elastic properties, thus, such a medium in whose structure and deformative properties there are no elements of symmetry. It is assumed that the measurement of the values of the components of tensors of deformation is carried out with the help of a bonded wire strain gauge together with unidirectional compression of rectangular samples.

Basing on the relationship of the generalised Hook's law the determined system of linear equations is obtained in view of elastic constants of the medium whose solution is known.