ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ELEKTRYKA z. 107 Nr kol. 946

Leszek S. CZARNECKI

Anna LASICZ

ORTOGONALNY ROZKŁAD PRĄDU ODBIORNIKA ZASILANEGO NAPIĘCIEM NIEOKRESOWYM

Streszczenie. Artykuł formułuje teoretyczną podstawę do opisu właściwości energetycznych obwodów z przebiegami nieokresowymi o skończonej energii. Pokazano, że prąd w takich obwodach może być rozłożony na trzy wzajemnie ortogonalne składowe, które odpowiadają za wartości prądu i są wyraźnie związane z trzema różnymi zjawiskami fizycznymi. Rozkład ten umożliwia nie tylko głębsze zrozumienie właściwości energetycznych w takich obwodach, lecz także tworzy podstawę do minimalizacji prądu. Dostarcza również informacji dotyczących pomiaru wielkości, które są potrzebne do tej minimalizacji.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie opisu właściwości energetycznych obwodów było i jest podejmowane przez wielu autorów [1], [4], [5], [6], [7], [9]. Prace na ten temat dotyczą głównie obwodów z przebiegami okresowymi, niesinusoidalnymi. Znanych jest wiele definicji mocy w takich obwodach i istnieją różne rozkłady zdeformowanych prądów (napięć) [2].

W pracy [3] zaproponowano nową koncepcję opisu właściwości energetycznych obwodów zasilanych napięciem niesinusoidalnym. W pracy tej, wykorzystując ideę St. Fryzego rozkładu ortogonalnego, rozkłada się prąd źródła na trzy wzajemnie ortogonalne składowe, zwane odpowiednio: prądem czynnym, rozrzutu i biernym.

Mianowicie:

$$i = i_a + i_s + i_r$$

$$i_a \triangleq G_eU_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} G_e\underline{U}_n \exp\{jn\omega_1 t\}$$

$$i_s \triangleq (G_o - G_e)U_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} (G_n - G_e)\underline{U}_n \exp\{jn\omega_1 t\}$$

$$i_r \triangleq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} jB_n\underline{U}_n \exp\{jn\omega_1 t\},$$

gdzie: G_n i B_n oznaczają konduktancję i susceptancję odbiornika dla częstotliwości harmonicznych $n\omega_1$, zaś G_e jest jego konduktancją równoważną. Rozkład ten dostarcza nowej interpretacji właściwości energetycznych takich obwodów. Mianowicie, ujawnia on dwie odrębne fizyczne przyczyny powodujące powiększenie wartości skutecznej prądu źródła ponad tę, która jest niezbędna dla przenoszenia mocy czynnej. Jedną z nich jest zwrotny przepływ energii między źródłem a polami magnetycznymi i elektrycznymi odbiornika. Zjawisko to było oczywiście brane pod uwagę już we wcześniejszych sformułowaniach teorii mocy np. Budeanu [1]. Jednak funkcjonał określający wpływ tego zjawiska na moc pozorną źródła nie jest w tej teorii określony poprawnie, gdyż jego wartość może być równa zeru mimo obecności zwrotnego przepływu energii. Nowy proponowany funkcjonał $\|i_r\|$, tj. wartość skuteczna składowej i_r wady tej nie ma. Drugą, ujawnioną przyczyną bezużytecznego wzrostu wartości skutecznej prądu źródła jest zmiana konduktancji odbiornika z częstotliwością. Miarą oddziaływania tego zjawiska na prąd źródła jest funkcjonał $\|i_s\|$. Oba funkcjonały $\|i_s\|$ oraz $\|i_r\|$, tj. wartość skuteczna prądu rozrzutu i prądu biernego powiększają wartość skuteczną prądu źródła w sposób określony równaniem:

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_s\|^2 + \|i_r\|^2.$$

Ponieważ składowa i_r jest kompensowalna równoległym dwójnikiem reaktancyjnym, zaś składowa i_s nie jest takim dwójnikiem kompensowalna, dlatego rozkład ten dostarcza ważnych informacji dotyczących możliwości minimalizacji mocy pozornej źródeł.

Istnieją jednak w elektrotechnice sytuacje, gdy energia przenoszona jest do odbiornika w obecności nieokresowych przebiegów prądów i napięć. Mając na uwadze własności opisanego rozkładu nasuwa się pytanie, czy można taki rozkład rozszerzyć na obwody z przebiegami nieokresowymi. Niniejszy artykuł udziela potwierdzającej odpowiedzi na to pytanie.

2. Założenia

Rozważania w niniejszym artykule ograniczone są do obwodów liniowych z nieokresowymi przebiegami napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$, całkowalnymi z kwadratem w przedziale $(-\infty, +\infty)$, tzn., jeśli $u(t)$ lub $i(t)$ oznaczymy przez $f(t)$, wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt < \infty \tag{1}$$

Są to więc przebiegi należące do przestrzeni $L^2(-\infty, +\infty)$. Przebiegi opisane takimi funkcjami mają [8], [10] widmo $\underline{F}(\omega)$, określone prostym przekształceniem Fouriera

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{2}$$

przy czym przekształcenie odwrotne Fouriera widma $\underline{F}(\omega)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{3}$$

jest zbieżne do funkcji $f(t)$ w sensie średniokwadratowym. Iloczyn skalarny dwóch dowolnych elementów f, g tej przestrzeni zdefiniowany jest jako:

$$(f,g) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} fg dt = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega)\underline{G}^{*}(\omega)d\omega\right\} \tag{4}$$

a norma

$$\|f\| \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\omega)d\omega}. \tag{5}$$

W przestrzeni całkowalnych z kwadratem funkcji okresowych f_T norma $\|f_T\|$ jest wartością skuteczną przebiegu określonego tą funkcją. Jednak pojęcia "wartość skuteczna" nie można używać wtedy, gdy przebieg f nie jest okresowy. Norma $\|f\|$ nie ma wymiaru normy $\|f_T\|$ i nie może też być interpretowana jako wartość prądu stałego, równoważnego temu przebiegowi ze względu na efekty cieplne. Przy nieograniczonych granicach całkowania prąd taki musi być nieskończenie mały. Ponieważ jednak norma $\|f\|$ spełnia w dalszych rozważaniach taką rolę jak wartość skuteczna $\|f_T\|$ w teorii mocy przebiegów okresowych, będzie ona dalej nazywana uogólnioną wartością skuteczną przebiegu f lub w skrócie "wartością skuteczną". Nazwa taka może być bliższa elektrotechnice stosowanej, szczególnie, że dla przebiegu f, który jest równy zeru poza skończonym przedziałem czasu τ, jego uogólniona wartość skuteczna $\|f\|$ może być interpretowana jako wartość prądu stałego, który w przedziale τ jest równoważny prądowi f ze względu na skutki cieplne.

Załóżmy, że odbiornik jest elementem dwuzaciskowym, liniowym i stacjonarnym o admitancji $\underline{Y}(\omega)$

$$\underline{Y}(\omega) \triangleq Y(\omega)\exp\{-j\varphi(\omega)\} = G(\omega) + jB(\omega). \tag{6}$$

3. Rozkład prądu na składowe ortogonalne

Energię E przeniesioną ze źródła do odbiornika określa iloczyn skalarny prądu i napięcia

$$E = (i,u) = \int_{-\infty}^{+\infty} iu\,dt = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}(\omega)\underline{U}^{*}(\omega)d\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)U^2(\omega)d\omega, \tag{7}$$

przy czym spełnia ona nierówność:

$$E = (i,u) \leqslant \|i\|\cdot\|u\|. \tag{8}$$

Nierówność ta staje się równością wówczas, gdy

$$i = G_e u, \qquad G_e \text{ - liczba rzeczywista} \tag{9}$$

a energia równa jest wtedy:

$$E = G_e\|u\|^2. \tag{10}$$

Wynika stąd, że ze względu na pobieraną energię E odbiornik zasilany napięciem u jest równoważny odbiornikowi rezystancyjnemu o konduktancji G_e, gdzie

$$G_e = \frac{E}{\|u\|^2}, \tag{11}$$

zasilanemu tym samym napięciem.

Wyróżnijmy w prądzie i składową

$$i_a \triangleq G_e u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_e \underline{U}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}_a(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{12}$$

proporcjonalną do napięcia u.

Reszta prądu źródła

$$i - i_a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(G(\omega) - G_e) + jB(\omega)\right]\underline{U}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{13}$$

może być rozłożona na składowe:

$$i_s \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{J}_s(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(G(\omega) - G_e)\underline{U}(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{14}$$

$$i_r \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{J}_r(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}jB(\omega)\underline{U}(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{15}$$

W ten sposób prąd i oraz jego widmo $\underline{J}(\omega)$ można przedstawić w postaci sumy:

$$i = i_a + i_s + i_r, \tag{16}$$

$$\underline{J}(\omega) = \underline{J}_a(\omega) + \underline{J}_s(\omega) + \underline{J}_r(\omega), \tag{17}$$

gdzie:

$$\underline{J}_a(\omega) \triangleq G_e\underline{U}(\omega), \tag{18}$$

$$\underline{J}_s(\omega) \triangleq (G(\omega) - G_e)\underline{U}(\omega), \tag{19}$$

$$\underline{J}_r(\omega) \triangleq jB(\omega)\underline{U}(\omega). \tag{20}$$

Obliczmy wartości iloczynów skalarnych składowych prądu:

$$(i_s, i_r) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(G(\omega) - G_e)\underline{U}(\omega)(jB(\omega)\underline{U}(\omega))^* d\omega\right\} = 0, \tag{21}$$

$$(i_s, i_a) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(G(\omega) - G_e)\underline{U}(\omega)(G_e\underline{U}(\omega))^* d\omega\right\} = E - E = 0, \tag{22}$$

$$(i_r, i_a) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(jB(\omega)\underline{U}(\omega))(G_e\underline{U}(\omega))^* d\omega\right\} = 0. \tag{23}$$

Ponieważ są one równe zeru, zatem:

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_s\|^2 + \|i_r\|^2, \tag{24}$$

gdzie:

$$\|i_a\| = \frac{E}{\|u\|}, \tag{25}$$

$$\|i_s\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(G(\omega) - G_e)^2 U^2(\omega)d\omega}, \tag{26}$$

$$\|i_r\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}B^2(\omega)U^2(\omega)d\omega}. \tag{27}$$

4. Interpretacja fizykalna

Przedstawiany ortogonalny rozkład prądu wyjaśnia przyczyny powodujące, że przeniesienie ze źródła do odbiornika energii E może wymagać prądu większego od niezbędnego do tego celu prądu i_a. Mianowicie, prądowi i_a towarzyszą dwa bezużyteczne prądy i_s oraz i_r, nie przenoszące energii, gdyż

$$(u, i_s) = G_e(i_a, i_s) = 0, \tag{28}$$

$$(u, i_r) = G_e(i_a, i_r) = 0, \tag{29}$$

przy czym miarami oddziaływania tych prądów na pręd źródła są ich uogólnione wartości skuteczne. "Wartość skuteczna" składowej i_s jest większa od zera wtedy, gdy konduktancja $G(\omega)$ odbiornika zmienia się z częstotliwością, natomiast "wartość skuteczna" składowej i_r jest większa od zera wtedy, gdy susceptacja nie ma wartości zerowej.

5. Minimalizacja prądu źródła napięcia nieokresowego

Jeśli źródło napięcia nieokresowego ma rezystancję wewnętrzną R_z, to przesłaniu energii E do odbiornika towarzyszy jej strata ΔE w źródle. W najprostszym modelu opisu tych strat można przyjęć, że rezystancja źródła jest niezależna od częstotliwości, a przy takim założeniu strata energii w źródle jest proporcjonalna do kwadratów uogólnionej wartości skutecznej prądu źródła, tj.

$$\Delta E = \|i\|^2 R_z = (\|i_a\|^2 + \|i_s\|^2 + \|i_r\|^2)R_z. \tag{30}$$

Od wartości tej zależny jest także przekrój przewodów źródła. Istnieją w elektrotechnice sytuacje, w których energia do odbiornika przekazywana jest w nieregularnych odstępach czasu impulsami podobnego kształtu o względnie krótkim, w stosunku do przerwy, czasie trwania. Naturalne jest wtedy pytanie, czy można i jak zminimalizować straty energii i przekroje przewodów? Wymaga to oczywiście minimalizacji uogólnionej wartości skutecznej prądu $\|i\|$ przy nie zmienionej energii E, a więc nie zmienionej wartości $\|i_a\|$.

W obwodach z przebiegami okresowymi najprostszym sposobem minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła jest włączenie kondensatora na zaciski odbiornika. Sprawdźmy zatem, czy minimalizacja taka może mieć zastosowanie do obwodów z przebiegami nieokresowymi. Jeśli tak, wyznaczmy wartość pojemności minimalizującej wartość skuteczną prądu. Przyjmijmy przy tym, że źródło jest idealne.

Idealna pojemność włączona na zaciski odbiornika modyfikuje jego admitancję do wartości:

$$\underline{Y}(\omega) = G(\omega) + j\left[B(\omega) + \omega C\right]. \tag{32}$$

Ponieważ przed pojawieniem się impulsu napięciowego $u(t)$ i po jego zaniku do zera energia pola elektrycznego kondensatora jest równa zeru, jego włączenie nie zmienia energii E wydanej ze źródła, a tym samym, nie zmienia on konduktancji równoważnej G_e odbiornika oraz prądu czynnego źródła. Kondensator taki nie zmienia konduktancji $G(\omega)$ na zaciskach źródła, a więc nie oddziałuje on także na wartość prądu i_s. Wskutek zmiany susceptancji na zaciskach źródła oddziałuje on tylko na prąd i_r, modyfikując kwadrat jego uogólnionej wartości skutecznej do wartości:

$$\|i_r\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[B(\omega) + \omega C\right]^2 U^2(\omega)d\omega. \tag{33}$$

Jeśli susceptancja odbiornika $B(\omega)$ przyjmuje wartości ujemne, a jest tak w przypadku odbiorników rezystancyjno-indukcyjnych, wówczas funkcjonał $\|i_r\|^2$ może mieć dla pewnego $C = C_{opt}$ minimum.

Warunkiem koniecznym na to, aby pojemność C_{opt} minimalizowała "wartość skuteczną" prądu źródła $\|i\|$ jest spełnienie przez tę pojemność równania

$$\frac{d\|i_r\|^2}{dC} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\omega B(\omega)U^2(\omega)d\omega + 2C_{opt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2 U^2(\omega)d\omega = 0, \tag{34}$$

tj.

$$C_{opt} = -\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega B(\omega)U^2(\omega)d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 U^2(\omega)d\omega} > 0. \tag{34}$$

Warunek powyższy ma postać podobną do warunku podanego przez Shepherda i Zakikhaniego [9] dla optymalnej pojemności kompensującej w obwodzie z przebiegiami okresowymi. Jedynie sumowanie zastąpione jest całkowaniem. Ponieważ w obwodzie z idealnym źródłem napięcia dla $C = C_{opt}$

$$\frac{d^2\|i_r\|^2}{dC^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 U^2(\omega)d\omega > 0, \tag{35}$$

zatem warunek (36) jest także warunkiem wystarczającym. Jednak w obwodzie, w którym źródło ma impedancję wewnętrzną o charakterze indukcyjnym, warunek ten może nie być wystarczającym, ze względu na możliwość pojawienia się zjawisk rezonansowych. Podobnie jak w przypadku obwodów z przebiegami okresowymi, sprawdzenie czy warunek powyższy jest warunkiem wystarczającym wymaga analizy konkretnej sytuacji obwodowej.

Zakończenie

Przedstawiony ortogonalny rozkład prądu w obwodach z przebiegami nieokresowymi wykazuje dużą analogię do rozkładu prądu w obwodach z przebiegami okresowymi. Wymaga on jedynie stosowania przekształcenia, nie zaś szeregu Fouriera, a norma przebiegu jest interpretowana odmiennie niż wartość skuteczna przebiegu okresowego, chociaż i w tym przypadku istnieją znaczne podobieństwa.

Przedstawiony rozkład dostarcza fizycznej interpretacji właściwości energetycznych obwodów, a także informacji o możliwości minimalizacji prądu źródła o napięciu nieokresowym.

LITERATURA

[1] Budeanu C.I.: Puissances reactives et fictives. Institut Romain de L'Energie, Bucarest 1927.

[2] Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacje i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. ZN Pol. Śl., "Elektryka", z. 91, Gliwice 1984.

[3] Czarnecki L.S.: Power Theories of Periodic Nonsinuosidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne, 31, z. 3-4, 1985.

[4] Depenbrock M.: Wirk - und Blindleistung. ETG - Fachtagung "Blindleistung", Aachen, October 1979.

[5] Fryze S.: Moc czynna, bierna i pozorna w obwodach o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny, 1931, nr 7, 8.

[6] Kusters N.L., Moore W.J.M.: On the definition of reactive fower under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans. Power Appl. Syst. vol. PAS-99, sept. 1980.

[7] Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. ZN Pol. Śl. "Elektryka", z.46, Gliwice 1974.

[8] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1980.

[9] Shepherd W., Zakikhani P.: Capacitive compensation in systems with nonsinuosidal voltage. University of Bradford Postgraduate School of Electrical and Electronic Engineering Research Report 88, 1971.

[10] Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford Univ. Press. 1948.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В ПРИЕМНИКЕ ПИТАЕМОМ НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ НАПРЯЖЕНИЕМ

Р е з ю м е

В статье сформулироване теоретическое обоснование описания теоретисеских свойств энергетических цепей с непериодическими процессами и конечной энергией. Доказано, что ток в таких цепях может распределяться на три взаимно ортогональные составные, отвечающие за величину тока и четко связанные с тремя различными физическими явлениями.

Данное распределение позволяет не только на более глубокое изучение энергосвойств в таких цепях, но также создает основу для минимализации тока и дает информацию по измерении величин необходимых для такой минимализации.

ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF CURRENT OF THE RECEIVER SUPPLIED WITH APERIODIC VOLTAGE

S u m m a r y

The paper formulates a theoretical basis for the description of power properties of circuits with aperiodic wave forms of a finite energy. It has been shown that the current in such circuits can be decomposed into three orthogonal components which are responsible for the current value and distinctively related to three different physical phenomena.

This decomposition enables not only a deeper understanding of the power properties of such circuits but also forms a ground for the current minimization.

It also provides with information on measurements of the values required for this minimization.