

Seria: ELEKTRYKA z. 107

Zygmunt GARCZARZYK

METODA KONTYNUACJI W ANALIZIE HYBRYDOWEJ
SIECI REZYSTANCYJNYCH NIELINIOWYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwa algorytmy analizy hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych oparte na metodzie kontynuacji. W pierwszym algorytmie rozwiązuje się ciąg zmodyfikowanych równań hybrydowych układu metodą Newtona-Raphsona. Drugi algorytm związany jest z rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu, stowarzyszonego z równaniem hybrydowym sieci. Użyteczność, obydwu algorytmów zademonstrowano na przykładzie obliczeń numerycznych wybranego obwodu nieliniowego.

1. Wstęp

W pracy rozważa się analizę nieliniowej sieci rezystancyjnej zawierającej liniowe i nieliniowe (uzależnione napięciowo jak i prądowo) rezystory, stałe źródła niezależne napięciowe i prądowe i wszystkie cztery typy liniowych źródeł sterowanych. Wiadomo [1], że z wyjątkiem pewnych sytuacji patologicznych, wynikających z doboru wartości elementów lub pewnych specjalnych ograniczeń topologicznych układ taki opisany jest równaniami hybrydowymi postaci:

$$\begin{bmatrix} g(\hat{u}_a) \\ r(\hat{i}_b) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{H}_{aa} & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_a \\ \hat{i}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix} = 0 \quad (1a)$$

lub krótko:

$$F(\hat{x}) = f(\hat{x}) - \hat{A}\hat{x} - \hat{s} = 0, \quad (1b)$$

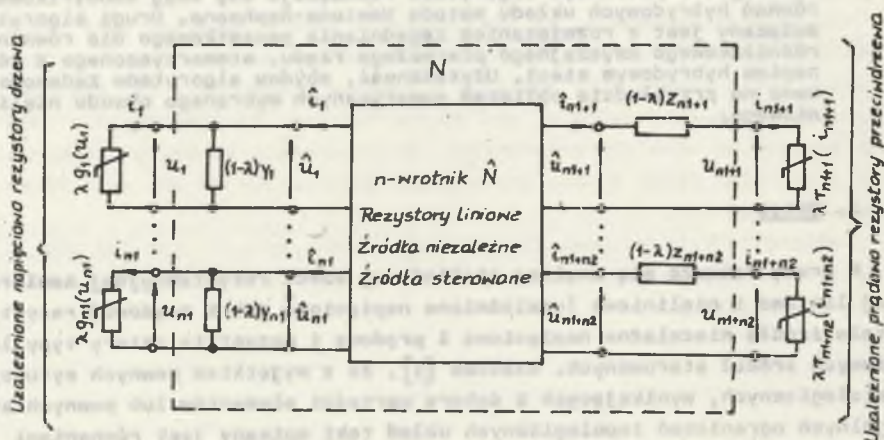
gdzie:

- \hat{x} - wektor napięć i prądów rezystorów nieliniowych,
- \hat{s} - stały wektor źródeł,
- \hat{A} - macierz hybrydowa n-wrotnika N (rys. 1),
- $f(\hat{x})$ - wektor charakterystyk rezystorów nieliniowych.

Indeks a odnosi się do gałęzi należących do drzewa, indeks b do gałęzi zawartych w przeciwdrzewie grafu sieci. Macierz hybrydowa \hat{H} i wektor źródeł \hat{s} są zdefiniowane przez jawne formuły topologiczne. Równanie (1) jest rozwiązywane na ogół z wykorzystaniem algorytmu Newtona-Raphsona. Efektywne wykorzystanie tego algorytmu może napotkać na zasadniczą przeszkodę związaną z brakiem systematycznej procedury wyboru odpowiedniego punktu startowego. W dalszym ciągu przedstawione zostaną dwa rozwiązania tego problemu, oparte na metodzie kontynuacji.

2. Zmodyfikowane równania hybrydowe

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 1. Dla układu tego zachodzi:



Rys. 1. Struktura zmodyfikowanego n-wrotnika \hat{N} - n-wrotnik N
Fig. 1. Structure of modified n-port \hat{N} - n-port N

$$\begin{aligned} i_a &= \hat{i}_a - (1 - \lambda) Y \hat{u}_a \\ u_b &= \hat{u}_b - (1 - \lambda) Z \hat{i}_b \end{aligned} \quad (2)$$

oraz:

$$\hat{u}_a = u_a, \quad \hat{i}_b = i_b. \quad (3)$$

gdzie:

$i_a, u_a, \hat{i}_a, \hat{u}_a$ - wektory prądów i napięć n-wrotników N i \hat{N} dla wrót należących do drzewa grafu sieci,

$i_b, u_b, \hat{i}_b, \hat{u}_b$ - wektory prądów i napięć w N i \hat{N} dla wrót należących do przeciwdrzewa,

$$Y = \text{diag} [y_1, y_2, \dots, y_{n1}],$$

$$Z = \text{diag} [z_{n1+1}, z_{n1+2}, \dots, z_{n1+n2}],$$

$$\lambda \in (0, 1).$$

Reprezentacja hybrydowa tego układu będzie miała zatem postać:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{aa} - (1-\lambda)Y & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb} - (1-\lambda)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Oznaczając charakterystyki rezystorów uzależnionych napięciowo i prądowo odpowiednio przez:

$$i_a = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_1(u_2) \\ g_2(u_2) \\ \vdots \\ g_{n1}(u_{n1}) \end{bmatrix} = \lambda g(u_a) \quad (5)$$

$$u_b = \begin{bmatrix} u_{n1+1} \\ u_{n1+2} \\ \vdots \\ u_{n1+n2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_{b1+1}(i_{n1+1}) \\ r_{n1+2}(i_{n1+2}) \\ \vdots \\ r_{n1+n2}(i_{n1+n2}) \end{bmatrix} = \lambda r(i_b) \quad (6)$$

otrzymuje się równania hybrydowe:

$$\lambda \begin{bmatrix} g(u_a) \\ r(i_b) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{H}_{aa} - (1-\lambda)Y & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb} - (1-\lambda)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ i_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix} = 0 \quad (7a)$$

$$\lambda \in (0, 1)$$

lub krótko:

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) - Hx - \hat{S} = 0. \quad (7b)$$

3. Rozwiązanie równań hybrydowych

Zauważmy, że równania (7) ma następujące własności:

(a) rozwiązanie układu dla wartości parametru $\lambda_0 = 0$ jest łatwe do uzyskania, gdyż równanie

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{aa}-Y & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb}-Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^{(0)} \\ i_b^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix} \quad (8a)$$

stanowi układ równań liniowych,

(b) dla wartości parametru $\lambda_N = 1$ redukuje się do równania (1) analizowanej sieci.

$$F(x, 1) = F(\hat{x}). \quad (8b)$$

Wynika stąd, że jeśli przyjąć, iż charakterystyki rezystorów nieliniowych są dane funkcjami ciągłymi i jednoznaczными, to równanie (7) jest homotopią [2], to znaczy istnieje odwzorowanie ciągłe $x(\lambda)$ takie, że

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x(\lambda)) - Hx(\lambda) - \hat{S} = 0 \quad \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (9)$$

Oznacza to, że rozwiązania $x(\lambda) = [u_a(\lambda), i_b(\lambda)]^t$ wyznaczone dla pewnego podziału odcinka $\langle 0, 1 \rangle$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N = 1 \quad (10)$$

opisują pewną krzywą w przestrzeni R^n łączącą początkowy punkt $x(0) = x^{(0)} = [u_a^{(0)}, i_b^{(0)}]$ z rozwiązaniem $x(1) = x^* = [u_a^*, i_b^*]$ równania (1).

Jeżeli ponadto macierz Jacobiego równania (7) jest niesobliwa dla wszystkich $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, to istnieje podział (10) i stałe m_1, m_2, \dots, m_{N-1} dla ciągu iteracji Newtona-Raphsona

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \left[\lambda_1 \frac{\partial f(x_1^{(k)})}{\partial x} - H' \right]^{-1} (\lambda_1 f(x_1^{(k)}) - Hx_1^{(k)} - \hat{S}) \quad (11a)$$

$$x_1^{(0)} = x(0) = x^{(0)}, \quad x_{i+1}^{(0)} = x_1^{(m_1)} \quad (11b)$$

$$k = 0, \dots, m_1 - 1$$

$$i = 1, \dots, N$$

takie, że [2]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_N^{(k)} = x(1) = x^*. \quad (12)$$

Ponieważ odwrócenie macierzy wymaga większego nakładu obliczeniowego niż rozwiązanie odpowiedniego układu równań liniowych, dlatego ciąg (11) przekształca się w ciąg równań:

$$\lambda_1 \left[\frac{\partial f(x_1^{(k)})}{\partial x} - H' \right] x_1^{(k+1)} = \lambda_1 \left[f(x_1^{(k)}) - \frac{\partial f(x_1^{(k)})}{\partial x} \right] + \hat{S}. \quad (13)$$

Zależności (8), (10)-(13) określają zatem algorytm poszukiwania rozwiązania równania (1) związany z dyskretnymi zmianami parametru λ .

Alternatywne rozwiązanie tego zadania wiąże się założeniem ciągłej zmiany λ . Własność (a) i (b) równania (7) oraz założenia towarzyszące (9) implikują istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych $F(x, \lambda)$ względem x i λ . Wynika z tego [2], że poszukiwanie rozwiązania (1) może być w przypadku rozważanej sieci wprowadzone do rozwiązania zagadnienia początkowego postaci:

$$\left(\lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x} - H \right) \frac{dx}{d\lambda} = Kx - f(x) \quad (14)$$

$$x(0) = x^{(0)},$$

gdzie

$$K = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}, \quad (15)$$

które może być rozwiązane wybraną metodą całkowania równań różniczkowych pod warunkiem, że macierz Jacobiego jest nieosobliwa. W obydwu przypadkach można uzyskać pewną oszczędność nakładu obliczeniowego, jeżeli założyć, że

$$Y = 0, \quad Z = 0. \quad (16)$$

Wyznaczenie przybliżenia startowego jest wtedy szczególnie proste, bowiem

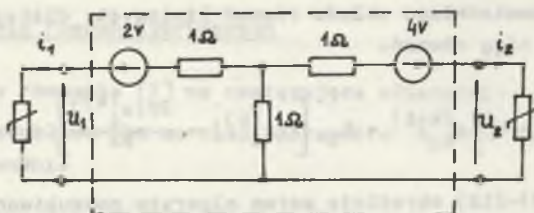
$$u_a^{(0)} = 0$$

$$i_b^{(0)} = \hat{H}_{bb}^{-1} \hat{S}_b. \quad (17)$$

Jak widać jest ono zdeterminowane wyłącznie właściwościami sieci.

4. Przykład

Celem zilustrowania obydwu proponowanych metod rozwiązywania równań hybrydowych rozpatrywano obwód przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Nieliniowy obwód

Fig. 2. Non-linear circuit

Rezystory nieliniowe opisują zależności:

$$i_1 = g(u_1) = \begin{cases} 0,5 u_1^2, & u_1 \geq 0 \\ -0,5 u_1^2, & u_1 < 0 \end{cases}$$

$$u_2 = r(i_2) = \begin{cases} 0,25i_2^2, & i_2 \geq 0 \\ -0,25i_2^2, & i_2 < 0. \end{cases}$$

Reprezentacja hybrydowa 2-wrotnika ma postać:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Przybliżenie startowe uzyskujemy z równania (8)

$$\begin{bmatrix} -0,5-Y & -0,5 \\ 0,5 & -1,5-Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ i_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Na przykład, dla konduktancji $Y = 2,0$ i rezystancji $Z = 1,0$

$$u_1^{(0)} = 0,153846, \quad i_2^{(0)} = 1,230769.$$

Wykorzystując wzór (17) uzyskuje się bezpośrednio:

$$u_1^{(0)} = 0, \quad i_2^{(0)} = 2,0.$$

Metoda dyskretna prowadzi do rozwiązania ciągu równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{dg(u_{1,i}^{(k)})}{du_1} + 0,5 + (1-\lambda_1)Y & \\ - 0,5 & \lambda_1 \frac{dr(i_{2,i}^{(k)})}{di_2} + 1,5 + (1-\lambda_1)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,i}^{(k+1)} \\ i_{2,i}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \lambda_1 \left(\begin{bmatrix} g(u_{1,i}^{(k)}) \\ r(i_{2,i}^{(k)}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{dg(u_{1,i}^{(k)})}{du_1} \\ \frac{dr(i_{2,i}^{(k)})}{di_2} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

W metodzie ciągłej rozwiązuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{bmatrix} \lambda \frac{dg(u_1)}{du_1} + 0,5 + (1-\lambda)Y & 0,5 \\ - 0,5 & \lambda \frac{dr(i_2)}{di_2} + 1,5 + (1-\lambda)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{d\lambda} \\ \frac{di_2}{d\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g(u_1) \\ r(i_2) \end{bmatrix} \quad (b)$$

Zastosowano metodę Runge-Kuty 4-rzędu. Wykorzystując programy biblioteki Fortranu: FPINDE, F4RUNG systemu Odra 1305 uzyskano następujące wyniki:

| x(0) | $\bar{\lambda}$ | u_1 | | i_2 | |
|---------|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| | | (a) | (b) | (a) | (b) |
| Y = 2,0 | 0,1 | 0,279056 | 0,279497 | 1,643071 | 1,643381 |
| Z = 1,0 | 0,05 | 0,279056 | 0,279498 | 1,643071 | 1,643382 |
| Y = 0 | 0,1 | 0,279056 | 0,279056 | 1,643071 | 1,643071 |
| Z = 0 | 0,05 | 0,279056 | 0,279056 | 1,643071 | 1,643071 |

gdzie $\bar{\lambda} = \lambda_{i+1} - \lambda_i$.

Wyniki te prawie dokładnie przybliżają rozwiązanie obwodu.

5. Uwagi końcowe

Przeprowadzony eksperyment numeryczny potwierdził przydatność obu metod do analizy sieci rezystancyjnych z rezystorami o charakterystykach ściśle monotonicznych, co odpowiada założeniu o nieosobowości macierzy Jacobiego

$$J(x, \lambda) = \lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x} - H'$$

Określenie sposobu postępowania w przypadkach, gdy macierz $J(x, \lambda)$ jest osobliwa, jest przedmiotem dalszych badań. Konieczne jest również poszukiwanie procedury doboru λ [3].

LITERATURA

- [1] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.
- [2] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York 1970.
- [3] Garczarczyk Z.: O długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji Materiały IX SPETU, Gliwice 1986.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ В ГИБРИДНОМ АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Резюме

В статье представлены два алгоритма гибридного анализа нелинейных резистивных цепей, основанных на методе продолжения решения по параметру. В первом алгоритме решается последовательность модифицированных гибридных уравнений методом Ньютона-Рафсона. Второй алгоритм связан с решением начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, сопряженного с гибридным уравнением цепи. Полезность этих алгоритмов показывает пример численного расчета нелинейной цепи.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|------|-------|
| 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 1,0 | 0 = 0 |
| 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 20,0 | 0 = 0 |

CONTINUATION METHOD IN THE HYBRID ANALYSIS
OF NON-LINEAR RESISTANCE NETWORKS

Summary

In the paper, two algorithms of the hybrid analysis of non-linear resistance networks based on continuation method have been presented. In the first algorithm a sequence of modified hybrid equations is solved by Newton-Raphson method.

The second one is related to the solution of initial problem for ordinary differential equation of the first order, associated with the network hybrid equation. Usefulness of both algorithms has been demonstrated by an example of numerical calculations of a chosen non-linear circuit.