ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ELEKTRYKA z. 107 Nr kol. 946

Jan CHOJCAN

Lucjan KARWAN

# ZASTOSOWANIE WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW WZGLĘDEM CZĘSTOTLIWOŚCI

Streszczenie. W pracy podano wzory na wrażliwości funkcji układowych względem częstotliwości do trzeciego rzędu włącznie. Wrażliwości te zgodnie z podanymi zależnościami oblicza się na podstawie wrażliwości funkcji układowych względem pojemności i indukcyjności. Wyprowadzenia są oparte na jednorodności funkcji układowych względem indukcyjności, pojemności i częstotliwości i korzysta się z niezmienników wrażliwości. Przedstawiono szczegółowe wyprowadzenie dla wrażliwości rzędu drugiego. Obliczono wrażliwości do rzędu trzeciego włącznie dla modułu wzmocnienia filtru pasmowoprzepustowego. Pokazano, jak powiększa się kres górny tolerancji małoprzyrostowych częstotliwości przy uwzględnianiu wrażliwości coraz wyższego rzędu.

## 1. Wprowadzenie

Analiza odchyłek funkcji układowych od wartości nominalnych często jest przeprowadzana w oparciu o rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Występujące w tym rozwinięciu pochodne cząstkowe funkcji układowej względem parametrów nazywa się wrażliwościami.

Do oszacowania odchyłek funkcji układowej spowodowanych niewielkimi zmianami parametrów zwykle wykorzystuje się człony zawierające pochodne (wrażliwości) pierwszego rzędu. Natomiast przy dużych zmianach parametrów należy uwzględnić dalsze człony w rozwinięciu funkcji w szereg Taylora. Wymaga to uprzedniego obliczenia pochodnych cząstkowych wyższego rzędu. Potrzeba wyznaczania wrażliwości wyższego rzędu może też wynikać z faktu zerowania się wrażliwości pierwszego rzędu. Przykładem może być filtr pasmowoprzepustowy. Dla częstotliwości środkowej pasma przepuszczania wrażliwość pierwszego rzędu modułu wzmocnienia napięciowego wynosi zero. Aby zbadać wahania modułu wzmocnienia w otoczeniu tej częstotliwości należy wykorzystać wrażliwości wyższych rzędów. Zagadnieniom ogólnym wrażliwości wyższych rzędów w układach elektronicznych poświęcono wiele miejsca w literaturze, np. [2], [4], [6], [8], [9], [10]. Wydaje się, że dotychczas nie były szeroko rozpatrywane zagadnienia wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości. Niniejsza praca jest próbą wypełnienia tej luki.

2. Funkcje jednorodne i niezmienniki wrażliwości

Wprowadzenie do analizy tolerancji pojęcia funkcji jednorodnych pozwoliło na znalezienie wielu niezmienników wrażliwości.

Jedną z pierwszych prac w tej dziedzinie ogłosił Belove [1]. Prace innych autorów, m.in. [7], [5], [4] rozwinęły i rozszerzyły tę teorię na szeroką klasę obwodów. Niezmienniki wrażliwości są wygodnym narzędziem przy analizie porównawczej obwodów równoważnych, a także służą do określenia dokładności obliczeń odchyłek funkcji układowych. W tej pracy zostaną wykorzystane do znalezienia zależności na wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości. Przypomnijmy najpierw podstawowe własności funkcji jednorodnych.

Definicja: Funkcja układowa $T(x_1,x_2,...,x_n)$ określona w obszarze $D$ nazywa się funkcją jednorodną stopnia $m$, jeżeli pomnożenie wszystkich jej argumentów przez czynnik $t$ jest równoważne $t^m$-krotnemu powiększeniu początkowej jej wartości, tzn., jeżeli zachodzi tożsamość

$$T(tx_1,tx_2,...,tx_n) = t^m \cdot T(x_1,x_2,...,x_n). \tag{1}$$

Jeżeli funkcja $T(x_1,x_2,...,x_n)$ jednorodna stopnia $m$ ma w obszarze otwartym $D$ ciągłe pochodne cząstkowe względem wszystkich argumentów, to dla dowolnego punktu $(x_1,x_2,...,x_n)$ w obszarze $D$ zachodzi równość:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2}x_2 + ... + \frac{\partial T}{\partial x_n}x_n = m \cdot T(x_1,x_2,...,x_n). \tag{2}$$

Równość ta nosi nazwę wzoru Eulera. Dzieląc obie strony równania (2) przez $T$ (przy założeniu niezerowania się funkcji układowej dla nominalnych wartości parametrów) otrzymujemy wzór:

$$S_{x_1}^T + S_{x_2}^T + ... + S_{x_n}^T = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^T = m, \tag{3}$$

znany w literaturze jako niezmiennik wrażliwości pierwszego rzędu ($S_{x_i}^T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{T}$ jest wrażliwością pierwszego rzędu funkcji układowej $T$ względem parametru $x_i$).

W układach SLS z pojedynczymi pobudzeniami stopień jednorodności transmitancji wynosi zero i zgodnie ze wzorem (3) tyloż samo wynosi suma wrażliwości względem wszystkich parametrów $x_i$, którymi są $G_i$, $L_i^{-1}$, $C_i$ oraz współczynniki wzmocnienia źródeł sterowanych $k_{vc_i}$ (źródła VCT) oraz $k_{cv_i}^{-1}$ (źródła CVT). Jeśli jako funkcję układową rozważamy admitancję, to wartość niezmiennika wrażliwości wynosi 1, natomiast dla impedancji -1. Pełniejszy zestaw niezmienników można znaleźć w pracy [5]. W przypadku układów z wieloma pobudzeniami stałoprądowymi można wykazać, że stopnie podstawowych funkcji układowych zawierają się w przedziale (-1, +1). Odpowiednie wzory podano w pracy [4].

Jeżeli przyjmiemy, że argumentami funkcji jednorodnej będą $L_i$, $C_i$ oraz $f^{-1}$, to łatwo uzyskać następujący niezmiennik wrażliwości:

$$\sum_{i\in NL} S^T_{L_i} + \sum_{i\in NC} S^T_{C_i} + S^T_{f^{-1}} = 0, \tag{4}$$

który pozwala na wyznaczenie wrażliwości funkcji układowej względem częstotliwości w sposób pośredni za pomocą wrażliwości względem indukcyjności i pojemności:

$$S^T_f = \sum_{i\in NL} S^T_{L_i} + \sum_{i\in NC} S^T_{C_i}. \tag{5}$$

W podobny sposób można wykorzystać niezmienniki wrażliwości przy wyprowadzaniu wzorów na wrażliwości drugiego i trzeciego rzędu funkcji układowej względem częstotliwości.

## 3. Wrażliwości wyższych rzędów

Twierdzenie 1: Jeżeli funkcja układowa $T(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k)$ obwodu SLS, której argumentami $x_i$ są $L_i$, $C_i$, $f^{-1}$, jednorodna stopnia zerowego względem $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ma w obszarze otwartym $D$ ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu, to dla dowolnego punktu $(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_k)$ zachodzi równość:

$$S^T_{f^2} = \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL} S^T_{L_iL_j} + \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NC} S^T_{L_iC_j} + \sum_{i=1}^{NC}\sum_{j=i}^{NC} S^T_{C_iC_j}. \tag{6}$$

Występujące we wzorze (6) wrażliwości rzędu drugiego są zdefiniowane następująco:

$$S^T_{f^2} \overset{df}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{f^2}{T}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial f^2} \tag{7}$$

$$S^T_{L_iC_j} \overset{df}{=} \frac{L_iC_j}{T}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial L_i\partial C_j}. \tag{8}$$

Dla wykazania słuszności twierdzenia 1 skorzystamy z niezmiennika wrażliwości pierwszego rzędu. Funkcja $T$ jednorodna stopnia zerowego względem $L_i$, $C_i$ oraz $f^{-1}$ może być zapisana następująco:

$$T(tL_1,\dots,tL_{NL},tC_1,\dots,tC_{NC},\frac{t}{f},y_1,\dots,y_k) =$$
$$= t^m \cdot T(L_1,\dots,L_{NL},C_1,\dots,C_{NC},\frac{1}{f},y_1,\dots,y_k). \tag{9}$$

Różniczkując podług $t$ mamy ($m = 0$):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial T}{\partial(tL_i)} L_i + \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial T}{\partial(tC_j)} C_j - \frac{\partial T}{\partial f} \cdot f = 0. \tag{10}$$

Różniczkując ponownie podług $t$ otrzymamy:

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial L_j} L_i L_j + 2\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial C_j} L_i C_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{NC}\sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_i \partial C_j} C_i C_j - 2\sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial f} L_i f - 2\sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_j \partial f} C_j f +$$
$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} f^2 + 2\frac{\partial T}{\partial f} f = 0, \tag{11}$$

przy czym przyjęto $t = 1$.

Natomiast różniczkując wyrażenie (10) podług częstotliwości i mnożąc przez częstotliwość mamy (przy $t = 1$):

$$f \frac{\partial}{\partial f}\left(\sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial T}{\partial L_i} L_i + \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial T}{\partial C_j} C_j - \frac{\partial T}{\partial f} f\right) = \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial f} L_i f +$$
$$+ \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_j \partial f} C_j f - \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} f^2 - \frac{\partial T}{\partial f} f = 0. \tag{12}$$

Stąd wyznaczamy:

$$-2\sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial f} L_i f - 2\sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_j \partial f} C_j f = -2\frac{\partial^2 T}{\partial f^2} f^2 - 2\frac{\partial T}{\partial f} f. \tag{13}$$

Po podstawieniu wzoru (13) do (11) i podzieleniu przez $T$ otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial f^2}\cdot\frac{f^2}{T}=\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NL}\frac{\partial^2 T}{\partial L_i\partial L_j}\cdot\frac{L_iL_j}{T}+2\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NC}\frac{\partial^2 T}{\partial L_i\partial C_j}\cdot\frac{L_iC_j}{T}+$$

$$+\sum_{i=1}^{NC}\sum_{j=1}^{NC}\frac{\partial^2 T}{\partial C_i\partial C_j}\cdot\frac{C_iC_j}{T}. \tag{14}$$

Ale

$$W=\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NL}\frac{\partial^2 T}{\partial L_i\partial L_j}\cdot\frac{L_iL_j}{T}=\sum_{i=1}^{NL}\frac{\partial^2 T}{\partial L_i^2}\cdot\frac{L_i^2}{T}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{NL}\frac{\partial^2 T}{\partial L_i\partial L_j}\cdot\frac{L_iL_j}{T}. \tag{15}$$

Korzystając z definicji wrażliwości (7) i (8)

$$W=\sum_{i=1}^{NL}\left(2\,S^T_{L_iL_i}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{NL}S^T_{L_iL_j}\right)=\sum_{i=1}^{NL}\left(2\,S^T_{L_iL_i}+2\sum_{j=i+1}^{NL}S^T_{L_iL_j}\right)=$$

$$=2\cdot\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL}S^T_{L_iL_j},$$

ponieważ

$$S^T_{L_iL_j}=S^T_{L_jL_i},$$

zatem

$$\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NL}S^T_{L_iL_j}=2\sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL}S^T_{L_iL_j}. \tag{16}$$

Podstawiając wyrażenie (16) do (14) wykażemy słuszność tezy twierdzenia 1.

Przy podobnych założeniach jak w twierdzeniu 1 i dodatkowo istnieniu ciągłych pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu funkcji układowej można wyprowadzić wzór na wrażliwość trzeciego rzędu względem częstotliwości, który podaje następne twierdzenie.

Twierdzenie 2:

$$S^{T}_{f^3} = \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL}\sum_{k=j}^{NL} S^{T}_{L_iL_jL_k} + \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=i}^{NL}\sum_{k=1}^{NC} S^{T}_{L_iL_jC_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{NL}\sum_{j=1}^{NC}\sum_{k=j}^{NC} S^{T}_{L_iC_jC_k} + \sum_{i=1}^{NC}\sum_{j=i}^{NC}\sum_{k=j}^{NC} S^{T}_{C_iC_jC_k} \tag{17}$$

gdzie wrażliwości trzeciego rzędu są zdefiniowane następująco:

$$S^{T}_{x_i^3} \overset{df}{=} \frac{1}{6}\cdot\frac{x_i^3}{T}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x_i^3}, \tag{18}$$

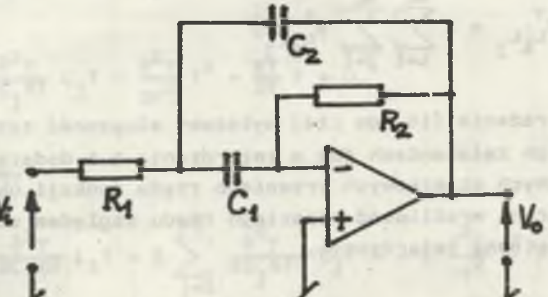
$$S^{T}_{x_i^2x_j} \overset{df}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{x_i^2x_j}{T}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x_i^2\partial x_j}, \tag{19}$$

$$S^{T}_{x_ix_jx_k} \overset{df}{=} \frac{x_ix_jx_k}{T}\cdot\frac{\partial^3 T}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}. \tag{20}$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzory na wrażliwości czwartego i wyższych rzędów.

## 4. Przykład

Dla filtru pasmowoprzepustowego podanego na rys. 1 określimy wrażliwości modułu wzmocnienia przy częstotliwości środkowej, a następnie wyznaczymy zmiany wzmocnienia przy rozstrojeniu częstotliwości środkowej uwzględniając coraz wyższe wrażliwości.




Rys. 1

Wartości nominalne parametrów wynoszą: $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C_1 = C_2 = 1F$, $|V_i| = 1V$, $\omega = 1\ \frac{rad}{s}$, wzmacniacz idealny.

Wzmocnienie napięciowe $K_u = \frac{V_o}{V_i} = |K_u| e^{j\varphi}$. Rozważaną funkcją układową jest $|K_u| = K_u(f)$. Dla wrażliwości pierwszego rzędu mamy:

$$S_{C_1}^{K_u} = 0{,}5 - j\ 0{,}5 \qquad S_{C_2}^{K_u} = -0{,}5 - j\ 0{,}5.$$

Na podstawie wzoru (5)

$$S_f^{K_u} = S_{C_1}^{K_u} + S_{C_2}^{K_u} = -j,$$

więc

$$S_f^{|K_u|} = \mathrm{Real}\left\{S_f^{K_u}\right\} = 0.$$

Czyli moduł wzmocnienia dla częstotliwości środkowej jest niewrażliwy na zmianę częstotliwości, jeżeli ograniczymy się do wrażliwości pierwszego rzędu. Celowe jest wyznaczenie wrażliwości wyższych rzędów. Na podstawie zależności (6) i (17) można obliczyć:

$$S_{f^2}^{|K_u|} = S_{C_1C_1}^{|K_u|} + S_{C_1C_2}^{|K_u|} + S_{C_2C_2}^{|K_u|} = -0{,}5,$$

$$S_{f^3}^{|K_u|} = S_{C_1C_1C_1}^{|K_u|} + S_{C_1C_1C_2}^{|K_u|} + S_{C_1C_2C_2}^{|K_u|} + S_{C_2C_2C_2}^{|K_u|} = 0{,}5.$$

Zatem zmiany modułu wzmocnienia można wyznaczyć w sposób przybliżony na podstawie rozwinięcia funkcji w szereg Taylora w postaci wielomianu stopnia trzeciego

$$t_{|K_u|} \cong -0{,}5\ t_f^2 + 0{,}5\ t_f^3,$$

gdzie $t_{|K_u|}$, $t_f$ są zmianami procentowymi.

Tak określona zmiana modułu wzmocnienia nie różni się więcej niż 2% od zmiany obliczonej dokładnie przy zmianach częstotliwości o 55%.

Uwzględniając coraz wyższe wrażliwości i, co za tym idzie, uwzględniając większą liczbę członów we wzorze Taylora możemy uzyskać większy kres górny tolerancji małoprzyrostowych.

Dla rozważanego przykładu (zakładając 2% błąd wynikający z zaniedbania dalszych wyrazów szeregu Taylora) mamy następujące wartości kresu górnego tolerancji małoprzyrostowej $t_f$.

Przy uwzględnieniu wrażliwości 1 rzędu $t_f$ = 18%, uwzględnienie wrażliwości 1 i 2 rzędu daje $t_f$ = 32% i, jak już wcześniej wspomniano, uwzględnienie wrażliwości do 3 rzędu włącznie daje $t_f$ = 55%.

## 5. Wnioski

Przy dużych zmianach parametrów (duże wartości kresu górnego tolerancji małoprzyrostowej) konieczne jest uwzględnienie wrażliwości wyższych rzędów. Jak pokazano na przykładzie, mogą być one przydatne przy badaniu zmian charakterystyk częstotliwościowych. Podobnie jak w znanej z literatury zależności na wrażliwość pierwszego rzędu pokazano w pracy, że wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości mogą być obliczone na podstawie wrażliwości funkcji układowych względem pojemności i indukcyjności.

## LITERATURA


[1] Belove C.: Sensitivity sums of homogeneous functions. IEEE Trans. on CT, Vol. CT-11, No 2, 1964.

[2] Chojcan J.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów i ich zastosowanie. ZN Pol. Śl. s. Elektryka z. 95, Gliwice 1985.

[3] Chojcan J.: Niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów. VIII KKTOiUE, Poznań 1985.

[4] Chojcan J.: Niektóre problemy wrażliwości wyższych rzędów układów elektrycznych. ZN Pol. Śl., s. Automatyka z. 88, Gliwice 1987.

[5] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwość układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1976.

[6] Goddard P.I., Spence R.: Efficient method for the calculation of first - and second - order network sensitivities. El, Vol. 5, No 16, 1969.

[7] Holt A.G.I., Fidler I.K.: Summed sensitivity of network functions. El, Vol. 4, No 5, 1968.

[8] Richards G.A.: Second derivative sensitivity using the concept of the adjoint network, El, Vol. 5, No 17, 1969.

[9] Seth A.K., Roe P.H.: Higher derivative network sensitivities using adjoint network. Int. J. Cir. Theory Appl., Vol. 1, 1973.

[10] Seth A.K., Roe P.H.: Hybrid Formulation of Explicit Formulae for Higher Order Network Sensitivities. IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 5, 1975.


Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Tadeusiewicz

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ ЧАСТОТЫ

Р е з ю м е

В работе выведены формулы определяющие чувствительность второго и третьего порядков схемной функции от частоты. Эти чувствительности определяются из чувствительности схемной функции от изменений всех емкостей и индуктивностей цепи. Формулы выведены из однородности схемных функций от индуктивностей, емкостей и частоты с использованием инвариантов чувствительности. Подробно выведена формула определяющая чувствительность второго порядка. Теоретические выводы дополнены расчетом примера активного полосового фильтра. Определены чувствителности 1, 2 и 3 порядка модуля усиления этого фильтра и представлено как увеличиваются допуски расброса частоты после применения чувстительности высших порядков.

## APPLICATION OF THE HIGHER ORDER SENSITIVITIES IN RELATION TO FREQUENCY

S u m m a r y

Formulas for the second and third order sensitivities of the system functions in relation to the frequency have been given in the paper.

In accordance with the given dependances, these sensitivities are calculated on the basis of the system functions sensitivities in relation to capacity and inductance.

Derivations are based on homogeneity of the system functions in relation to the inductance, capacity and frequency; the sensitivity invariants are used.

A detailed derivation has been presented for the sensitivity of the second order. The sensitivities to the thrid order inclusive, have been calculated for an amplification factor of the band - pass filter.

It has been shown how the upper bound of the frequency small - incremental tolerances increases when taking into account the sensitivities of higher and higher order.