ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ELEKTRYKA z. 107 Nr kol. 946

Andrzej DRYGAJŁO

O RÓWNOWAŻNOŚCI TRZECH LINIOWYCH UKŁADÓW FILTRUJĄCYCH[x)]

Streszczenie. W pracy opisano metodę budowy, przy użyciu dyskretnej transformacji Hartley'a (DHT) i dyskretnej transformacji Walsha (DWT), liniowych układów filtracji widmowej równoważnych układom opartym na dyskretnej transformacji Fouriera (DFT). W oparciu o właściwości rzeczywistych transformacji DHT i DWT przedstawiono sposób wyznaczania charakterystyk filtrów cyfrowych Hartley'a i Walsha na podstawie charakterystyk częstotliwościowych filtrów cyfrowych Fouriera. Otrzymane macierze filtrujące Hartley'a $\underline{G}^H$ i Walsha $\underline{G}^W$ są rzeczywiste, podczas gdy odpowiadająca im macierz Fouriera $\underline{G}^F$ jest zespolona. Wyznaczone w ten sposób macierze filtrujące pozwoliły na zdefiniowanie uogólnionego algorymtu cyfrowej filtracji widmowej przy użyciu algorytmów szybkich transformacji Hartley'a (FHT) i Walsha (FWT), zamiast algorytmu szybkiej transformacji Fouriera (FET).

1. Wprowadzenie

Dyskretna filtracja widmowa polega na przetwarzaniu wejściowego sygnału dyskretnego w pożądany wyjściowy sygnał dyskretny, wynikający z wymaganej postaci widma tego sygnału. Najczęściej wykorzystywanym w tym celu widmem jest zespolona dyskretna transformata Fouriera. Otrzymuje się ją za pomocą dyskretnej transformacji Fouriera (DFT), zbudowanej w oparciu o zupełny ortogonalny układ dyskretnych zespolonych funkcji wykładniczych.

W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie dyskretnymi transformacjami opartymi na rzeczywistych funkcjach ortogonalnych. Obecnie największe zainteresowanie skupia się na dyskretnej transformacji Hartley'a (DHT), opartej na układzie rzeczywistych ortogonalnych funkcji trygonometrycznych [1] oraz na dyskretnej transformacji Walsha (DWT), wykorzystującej rzeczywiste funkcje dwuwartościowe [2].

W niniejszej pracy, wykorzystując ideę dyskretnej filtracji widmowej, wyprowadzono zależności pozwalające na zastąpienie zespolonego procesu liniowej filtracji przez równoważne mu procesy rzeczywiste.

x) Praca wykonana w ramach CPBP nr 02.14.

2. Dyskretne transformacje Fouriera (DFT), Hartley'a (DHT) i Walsha (DWT)

Dla rzeczywistego dyskretnego sygnału $\{x(n)\}$ danego w postaci ciągu wartości $x(0),x(1),\ldots,x(N-1)$, $N = 2^p$, $p = 0,1,2,\ldots$, prosta i odwrotna DFT określone są następującymi zależnościami macierzowymi:

$$\underline{X}_F = \frac{1}{N}\,\underline{F}\,\underline{x}, \qquad \underline{x} = \underline{F}^{*T}\,\underline{X}_F, \tag{1}$$

gdzie $\underline{x}$, $\underline{X}_F$ - wektory sygnału i widma Fouriera, $\underline{F}$ - macierz Fouriera o elementach zespolonych $\exp(-j(2\pi/N)kn)$ i wymiarach $N\times N$, $\underline{F}^{*T} = \underline{F}^{-1}$ - macierz sprzężona transponowana względem macierzy $\underline{F}$, będąca jednocześnie macierzą odwrotną do macierzy $\underline{F}$.

Wśród transformacji rzeczywistych, które mogłyby zastąpić zależności (1), uzyskując jednocześnie większą symetrię przekształceń, można wyróżnić transformację Hartley'a wśród rzeczywistych transformacji trygonometrycznych oraz transformację Walsha - wśród transformacji dwuwartościowych [1],[2].

Prostą i odwrotną transformację Hartley'a (DHT) określają wzory:

$$\underline{X}_H = \frac{1}{N}\,\underline{H}\,\underline{x}, \qquad \underline{x} = \underline{H}\,\underline{X}_H, \tag{2}$$

gdzie $\underline{x}$, $\underline{X}_H$ - wektory sygnału i widma Hartley'a, $\underline{H}$ - macierz Hartley'a o wymiarach $N\times N$ i elementach rzeczywistych

$$\mathrm{cas}((2\pi/N)kn) = \cos((2\pi/N)kn) + \sin((2\pi/N)kn). \tag{3}$$

Z kolei prosta i odwrotna dyskretna transformacja Walsha opisana jest zależnościami:

$$\underline{X}_W = \frac{1}{N}\,\underline{W}\,\underline{x}, \qquad \underline{x} = \underline{W}\,\underline{X}_W, \tag{4}$$

gdzie $\underline{x}$, $\underline{X}_W$ - wektory sygnału i widma Walsha w uporządkowaniu naturalnym, $\underline{W}$ - macierz Walsha o wymiarach $N\times N$ i elementach rzeczywistych

$$w(k,n) = \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{k_i n_i}, \tag{5}$$

k_i, n_i są współczynnikami binarnego rozwinięcia liczb k, n.

We wszystkich trzech przypadkach etapy prostej i odwrotnej transformacji mogą być realizowane za pomocą algorytmów szybkich transformacji [3], [4].

3. Liniowe układy filtrujące Fouriera, Hartley'a i Walsha

Liniowy układ filtrujący w przestrzeni dyskretnych zespolonych funkcji wykładniczych określony jest wzorem:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{F}^{*T} \underline{G}^{F} \underline{F} \underline{x}, \tag{6}$$

gdzie: $\underline{x}$, $\underline{y}$ - wektory sygnałów wejściowego i wyjściowego, $\underline{G}^{F}$ - zespolona macierz filtrująca Fouriera.

Z kolei liniowy układ filtracji widmowej w przestrzeni funkcji dyskretnych cas(.) opisuje zależność:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{H} \underline{G}^{H} \underline{H} \underline{x}, \tag{7}$$

gdzie $\underline{G}^{H}$ - rzeczywista macierz filtrująca Hartley'a.

Natomiast liniowy układ filtrujący w przestrzeni funkcji Walsha przedstawia wzór:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{W} \underline{G}^{W} \underline{W} \underline{x}, \tag{8}$$

gdzie $\underline{G}^{W}$ - rzeczywista macierz filtrująca Walsha.

4. Równoważność liniowej filtracji widmowej w przestrzeniach Fouriera, Hartley'a i Walsha

Rozważając równoważność liniowych układów filtrujących Fouriera, Hartley'a i Walsha, opisanych równaniami (6-8), dochodzi się do równości:

$$\underline{G}^{H} = \frac{1}{N^2} \underline{H} \underline{F}^{*T} \underline{G}^{F} \underline{F} \underline{H}, \tag{9}$$

$$\underline{G}^{W} = \frac{1}{N^2} \underline{W} \underline{F}^{*T} \underline{G}^{F} \underline{F} \underline{W}, \tag{10}$$

pozwalających wyznaczyć macierze filtrujące Hartley'a $\underline{G}^{H}$ i Walsha $\underline{G}^{W}$ na podstawie znajomości macierzy filtrującej Fouriera $\underline{G}^{F}$ [5], [6], [7].

Określmy obecnie warunki, dla których macierze $\underline{G}^{H}$ i $\underline{G}^{W}$ są rzeczywiste, a tym samym cały proces liniowej filtracji widmowej Hartley'a i Walsha jest rzeczywisty. Jeżeli macierz $\underline{A}$ zdefiniujemy następująco:

$$\underline{A} = \left[a_{nm}\right] = \frac{1}{N} \underline{F}^{*T} \underline{G}^{F} \underline{F}, \tag{11}$$

a macierz filtrująca Fouriera będzie zespoloną macierzą diagonalną

$$\underline{G}^F = \mathrm{diag}\left[g_0, g_1, \ldots, g_{N-1}\right], \tag{12}$$

to wówczas

$$a_{nm} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} g_i \exp(j(2\pi i/N)(n-m)). \tag{13}$$

Zdefiniujmy również k-tą częściową macierz

$$\underline{A}^{(k)} = \left[a_{nm}^{(k)}\right], \tag{14}$$

gdzie

$$a_{nm}^{(k)} = \frac{g_k}{N} \exp(j(2\pi k/N)(n-m)). \tag{15}$$

Wynika stąd, że

$$\underline{A} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{A}^{(k)}. \tag{16}$$

Wyznaczmy obecnie macierze filtrujące $\underline{G}^H$ i $\underline{G}^W$ w zależności od $\underline{A}^{(k)}$

$$\underline{G}^H = \frac{1}{N}\,\underline{H}\left(\sum_{k=0}^{N-1} \underline{A}^{(k)}\right)\underline{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N}\,\underline{H}\,\underline{A}^{(k)}\underline{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{G}^H(k). \tag{17}$$

Stąd

$$\underline{G}^H(k) = \frac{1}{N}\,\underline{H}\,\underline{A}^{(k)}\underline{H}. \tag{18}$$

Elementy macierzy $\underline{G}^H(k)$ mogą być interpretowane jako elementy dwuwymiarowej dyskretnej transformaty Hartley'a macierzy $\underline{A}^{(k)}$.
Podobną zależność można wyprowadzić dla macierzy filtrującej Walsha $\underline{G}^W$:

$$\underline{G}^W(k) = \frac{1}{N}\,\underline{W}\,\underline{A}^{(k)}\underline{W}. \tag{19}$$

Można udowodnić [7], że macierz $\underline{A}^{(k)}$ jest rzeczywistą kołową macierzą, jeżeli

$$g_0,\ g_{N/2} \in R,\quad g_k^* = g_{N-k},\quad g_k \in C. \tag{20}$$

Macierze $\underline{H}$ i $\underline{W}$ są rzeczywiste. Jeżeli macierze $\underline{A}^{(k)}$ są również rzeczywiste, to macierze filtrujące $\underline{G}^H$ i $\underline{G}^W$ są rzeczywiste.

Struktury macierzy $\underline{G}^H$ i $\underline{G}^W$ wynikają z zależności między elementami transformat Fouriera, Hartley'a i Walsha. Zależności:

$$DHT\{x(n)\} = Re(DFT\{x(n)\}) - Im(DFT\{x(n)\}), \tag{21}$$

$$Re(DFT\{x(n)\}) = 1/2\ (DHT\{x(N-n)\} + DHT\{x(n)\}), \tag{22}$$

$$Im(DFT\{x(n)\}) = 1/2\ (DHT\{x(N-n)\} - DNT\{x(n)\}) \tag{23}$$

umożliwiają przekształcenie macierzy zespolonej $\underline{G}^F$ o elementach:

$$g_{00} = a_0,\ g_{kk} = a_k + jb_k,\ g_{N/2\ N/2} = a_{N/2},\ g_{(N-k)(N-k)} = a_k - jb_k$$

$$\text{dla}\quad k = 1,2,\ldots,N/2-1 \tag{24}$$

w macierz $\underline{G}^H$ przy zachowaniu informacji o częściach urojonych i rzeczywistych elementów diagonalnych macierzy $\underline{G}^F$. Wówczas niezerowe elementy macierzy $\underline{G}^H$ są następujące [8]:

$$h_{00} = a_0,\ h_{kk} = a_k,\ h_{k(N-k)} = -b_k,\ h_{N/2\ N/2} = a_{N/2},$$

$$h_{(N-k)(N-k)} = a_k,\ h_{(N-k)k} = b_k \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\ldots,N/2-1. \tag{25}$$

Z kolei przy spełnionym założeniu (20) macierz filtrująca Walsha $\underline{G}^W$ jest macierzą blokową diagonalną o następującej postaci [7]:

$$\underline{G}^W = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ & a_{N/2} & & \underline{0} & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{N/4\times N/4} & \\ & \underline{0} & & & \boxed{N/2\times N/2} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Przykład

Niech macierz filtrująca Fouriera $\underline{G}^F$ będzie macierzą o wymiarach 4×4, charakteryzującą prosty filtr dolnoprzepustowy. Na podstawie wzorów (9) i (10) można wyznaczyć równoważne jej macierze $\underline{G}^H$ i $\underline{G}^W$ następująco:

$$\underline{G}^F = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-jb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+jb \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^H = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^W = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

5. Podsumowanie

W pracy podano warunki równoważnego przekształcenia liniowych układów filtrujących: zespolonego Fouriera w rzeczywiste Hartley'a i Walsha. Na podstawie przedstawionych struktur algorytmów filtracji rzeczywistej można budować użyteczne procedury nierekursywnej filtracji cyfrowej, wykorzystujące efektywne algorytmy szybkich transformacji Hartley'a i Walsha (FHT i FWT). Cyfrowe filtry Hartley'a i Walsha ze względu na duże podobieństwo algorytmów FFT, FHT i FWT mogą być łatwo realizowane za pomocą komercyjnie dostępnych procesorów sygnałowych VLSI.

LITERATURA

[1] Bracewell R.N.: The Discrete Hartley Transform. J. Opt. Soc. Amer., vol. 73, Dec. 1983, ss. 1832-1835.

[2] Beauchamp K.G.: Applications of Walsh and Related Functions. Academic Press, London 1984.

[3] Elliott D.F., Rao K.R.: Fast Transforms. Academic Press, New York 1982.

[4] Bracewell R.N.: The Fast Hartley Transform. Proc. IEEE, vol. 72, no. 8, Aug. 1984, ss. 1010-1018.

[5] Drygajło A.: Wykorzystanie szybkiej transformacji Hartley'a w cyfrowej filtracji widmowej. IX KK TOiUE, Szklarska Poręba, 22-24.10.1986, ss. 523-528.

[6] Kahveci A.E., Hall E.L.: Sequency Domain Design of Frequency Filters. IEEE Trans. Comput., vol. C-23, Sept. 1974, ss. 976-981.

[7] Zarowski C.J., Yunik M.: Spectral Filtering Using the Fast Walsh Transform. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-33, no. 4, Oct. 1985, ss. 1246-1252.

[8] Drygajło A.: An Application of the Fast Hartley Transform to Digital Spectral Filtering. ECCTD 87, Paryż, 1-4.09.1987.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji 20 maja 1987 r.

О ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФИЛЬТРАЦИИ

Р е з ю м е

В работе представлен метод построения при помощи дискретного преобразования Хартлея (DHT) и дискретного преобразования Уолша (DWT) линейных спектральных систем эквивалентных системом основанных на дискретном преобразовании Фурье (DFT).

Используя особенности действительных преобразований DHT и DWT представлен метод определения характеристик цифровых фильтров Хартлея и Уолша на базисе частотных характеристик цифровых фильтров Фурье.

Полученные матрицы фильтрации Хартлея $\underline{G}^H$ и Уолша $\underline{G}^W$ являются действительными когда соответственная матрица Фурье $\underline{F}$ комплексная. Полученные таким образом матрицы фильрации позволили определить обобщенный алгоритм цифровой спектральной фильтрации, использующий алгоритмы быстрых преобразований Хартлея (FHT) и Уолша (FWT) вместо алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT).

ON EQUIVALENCE OF THREE LINEAR FILTERING SYSTEMS

S u m m a r y

This paper describes a method of construction of linear spectral filtering systems using the discreet Hartley transform (DHT) and the discrete Walsh transform (DWT). These systems are equivalent to the ones based on the discrete Fourier transform (DFT).

Basing oneself on the properties of the actual DHT and DWT transforms, a method of characteristic determination of the Hartley and Walsh'es digital filters on the basis of frequency characteristics of the Fourier's digital filters.

Obtained new Hartley and Walsh filtering matrices $\underline{G}^H$ and $\underline{G}^W$ are real, while the corresponding Fourier matrix $\underline{G}^F$ is complex. The filtering matrices determined in this way have allowed to define a generalized digital spectral filtering algorithm using the algorithms of the fast Hartley transform (FHT) and fast Walsh transform (FWT) instead of the fast Fourier transform (FFT) algorithm.