ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ELEKTRYKA z. 107 Nr kol. 946

Janusz WALCZAK

ZASTOSOWANIE TEORII RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO ANALIZY ISTNIENIA ROZWIĄZAŃ PROBLEMU DIRICHLETA DLA PEWNYCH RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH W ELEKTROSTATYCE

I. KONSTRUKCJA ROZWIĄZANIA PODSTAWOWEGO

Streszczenie. W artykule przeprowadzono analizę rozwiązania podstawowego (w sensie Leviego) dla równania eliptycznego opisującego pole elektrostatyczne w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych.

Podano warunki wystarczające istnienia rozwiązania podstawowego w obszarach nieograniczonych przestrzeni R^3 oraz sposób konstrukcji tego rozwiązania.

1. Wstęp

Rozwiązywanie zagadnień brzegowych w teorii pola elektromagnetycznego przeprowadza się często przez sprowadzenie układu równań Maxwella, uzupełnionych związkami materiałowymi, do układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego z niewiadomymi funkcjami skalarnymi lub wektorowymi, zwanymi potencjałami.

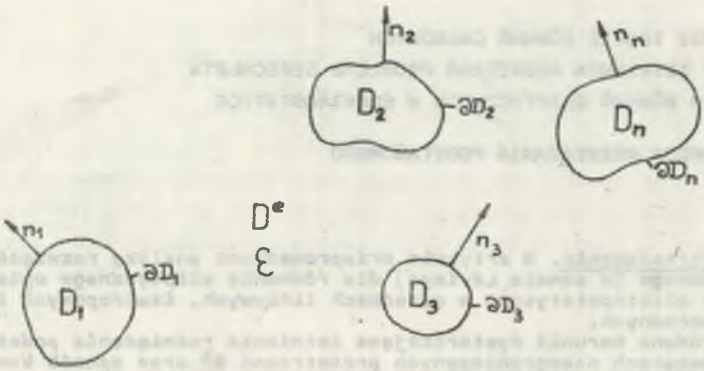
Konstrukcja potencjałów opiera się na pojęciu odpowiedniego, dla danego równania różniczkowego cząstkowego, rozwiązania podstawowego. Problem istnienia rozwiązań podstawowych najprostszych równań fizyki matematycznej (np. równania Laplace'a) jest rozstrzygnięty pozytywnie, natomiast problem ten dla równań bardziej złożonych w sposób globalny nie został rozstrzygnięty do chwili obecnej.

W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązania podstawowego dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a, opisującego pole elektrostatyczne w obszarach nieograniczonych wypełnionych dielektrykiem liniowym, izotropowym i niejednorodnym.

2. Formalizacja problemu

Przyjmijmy następujący model (rys. 1) układu polowego:

Niech w przestrzeni euklidesowej R^3 (stanowiącej ([7], str. 12) rozmaitość współrzędnościową opartą na grupie ortogonalnej), wyposażonej w pole skalarne przenikalności dielektrycznej ε, znajdują się dyfeomorficzne obrazy klasy C_m $(m \geq 2)$ skończonej liczby $n \in N$ kul domkniętych, wszystkie rozłączne między sobą.



Rys. 1. Rzut w płaszczyźnie R^2 modelu układu polowego
Fig. 1. Projection of the field system model in the plane R^2

Zgodnie z powyższą definicję obszary wypełnione dielektrykiem określają wzory:

$$D^e = R^3 \setminus \sum_{j=1}^{n} \bar{D}_j, \tag{1}$$

$$D^i = \sum_{j=1}^{n} D_j \tag{2}$$

gdzie:

D^e - obszar nieograniczony wypełniony dielektrykiem,

D^i - obszar ograniczony i niespójny wypełniony dielektrykiem.

Przyjmuje się, że normalna do brzegu $\partial D = \bigcup_{j=1}^{n} \partial D_j$ obszaru D^e jest skierowana do wnętrza tego obszaru (rys. 1).

Pole elektrostatyczne w obszarze D^e i w obszarach D_j opisują równania elektrostatyki:

$$\varepsilon_{klm}\partial_l E_m = 0 \tag{3}$$

$$k,l,m \in \{1,2,3\}.$$

$$\sum_{k=1}^{3} \partial_k D_k = \rho \tag{4}$$

Funkcje D_k, E_k są składowymi funkcji wektorowych indukcji i natężenia pola elektrycznego w ośrodku, a ε_{klm} oznacza symbol permutacyjny Ricciego. Funkcja ρ określa objętościowy rozkład ładunku w obszarach D^e, D^i. Zakładamy, że ośrodek (dielektryk wypełniający obszary D^e, D^i) jest liniowy, izotropowy, niejednorodny i pozbawiony ładunków swobodnych.

Z powyższego założenia wynika, że pomiędzy wektorem indukcji a wektorem natężenia pola elektrycznego zachodzi zależność:

$$D_k = \varepsilon E_k \qquad k \in \{1,2,3\} \tag{5}$$

$$\varepsilon \in klC_2(D^e) \wedge kl\ C_2(D^i)$$

gdzie ε - funkcja przenikalności dielektrycznej ośrodka.

Pole elektryczne w obszarach D^e, D^i jest bezwirowe, a więc rozwiązania układu równań (3), (4) można poszukiwać w postaci funkcji skalarnej u, zwanej potencjałem pola i określonej wzorem:

$$E_k = -\partial_k u \qquad k \in \{1,2,3\}. \tag{6}$$

Wykorzystując wzór (6) sprowadza się układ równań (3), (4), (5), po prostych przekształceniach, do równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a:

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial u}{\partial X_i} = 0,$$

gdzie Δ - operator Laplace'a,

$$a_i(X) = \frac{1}{\varepsilon(X)} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i}(X), \qquad i \in \{1,2,3\}. \tag{8}$$

Rozwiązaniem podstawowym w sensie Leviego równania (7) nazywamy ([5], str. 104) funkcję Γ określoną wzorem:

$$\Gamma(X,Y) = L(X,Y) + \int_{D^e} L(X,M)\Phi(M,Y)d\tau_M, \tag{9}$$

$$X,Y,M \in D^e$$

gdzie:

L - funkcja Leviego dla równania (7) określona wzorem

$$L(X,Y) = |XY|^{-1}, \tag{10}$$

Φ - pewna funkcja pomocnicza.

Rozwiązanie podstawowe Γ równania (7) posiada przejrzystą interpretację fizykalną; rozwiązanie to można traktować jako "odstrojenie" rozwiązania podstawowego dla równania Laplace'a (za pomocą funkcji Φ generowanej przez niejednorodność ośrodka). Wykorzystanie rozwiązania podstawowego do konstrukcji potencjałów będących rozwiązaniami równania (7) umożliwi ponadto przedstawienie tych potencjałów w postaci sumy dwóch składników:

- składnika będącego klasycznym potencjałem dla równania Laplace'a,
- składnika dodatkowego odpowiedzialnego za niejednorodność ośrodka.

Problem istnienia rozwiązania podstawowego Γ, związany ściśle z problemem istnienia i własnościami funkcji Φ, jest analizowany w dalszej części artykułu.

3. Sprowadzenie problemu istnienia rozwiązania podstawowego do problemu istnienia rozwiązania pewnego równania całkowego

Wyznaczenie funkcji Φ, a zatem wyznaczenie rozwiązania podstawowego określonego wzorem (9), umożliwia następujący lemat:

LEMAT 1

Jeżeli funkcja Φ spełnia warunki:

1°

$$\bigwedge_{\substack{Y \in \Lambda = \{Y \in D^0 : X = Y\} \\ K^3(Y,\rho) \in D^0 \\ X \in K^3(Y,\rho)}} \left\{ \begin{array}{l} |\Phi(X,Y)| \leq A_1(X)|XY|^{-2} \\ \displaystyle\int_{K^3(Y,\rho)} A_1^2(X)\,d\tau_X \leq C_1\rho^5, \quad C_1 \in R^+ \end{array} \right. \tag{11}$$

2°

$$\bigwedge_{X_1, X_2 \in D^0 \setminus K^3(Y,\rho)} |\Phi(X_1,Y) - \Phi(X_2,Y)| \leq C_2 |X_1X_2|^{\alpha} \tag{12}$$

$$C_2 \in R^+$$

$$\alpha \in (0,1]$$

3°

$$\bigwedge_{X \in D^{e} \setminus K^{3}(Y,\rho)} \quad |\Phi(X,Y)| \leq \frac{C_3}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^{2}} \tag{13}$$

$$C_3 \in R^{+}$$

$$\varepsilon' > 0$$

gdzie:

$|X|$, $|Y|$ - odległość punktów X, Y od początku układu współrzędnych,

to jest one rozwiązaniem następującego równania całkowego:

$$4\pi\Phi(X,Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i(X) \frac{\partial}{\partial X_i} L(X,Y) + \int_{D^{e}} \left[\sum_{i=1}^{3} a_i(X) \frac{\partial}{\partial X_i} L(X,M) \right] \Phi(M,Y) d\tau_M$$

$$X,Y,M \in D^{e}. \tag{14}$$

<u>Dowód</u>

Utwórzmy quasi-potencjał ([5], ss. 91-107) określony wzorem:

$$\hat{V}(X,Y) = \int_{D^{e}} L(X,M)\Phi(M,Y)d\tau_M, \tag{15}$$

w którym współrzędną Y traktujemy jako parametr.

Quasi-potencjał $\hat{V}$ zapiszmy w postaci:

$$\hat{V}(X,Y) = \int_{D^{e}\setminus K^{3}(Y,\rho)} L(X,M)\Phi(M,Y)d\tau_M + \int_{K^{3}(Y,\rho)} L(X,M)\Phi(M,Y)d\tau_M \tag{16}$$

$$Y \in \Lambda$$

W obszarze $D^{e}\setminus K^{3}(Y,\rho)$ funkcja Φ spełnia założenia 2, 3 lematu, a zatem przyczynek do quasi-potencjału pochodzący od pierwszej całki wzoru (16) spełnia ([6], ss. 171-176) równanie Poissona w sensie klasycznym.

W obszarze $K^{3}(Y,\rho)$ $(Y \in \Lambda)$ funkcja Φ spełnia warunek 1 lematu i jest klasy L_2 względem współrzędnej X:

$$\|\Phi\|_{L_2(K(Y,\rho))} = \int_{K^{3}(Y,\rho)} |\Phi(X,Y)|^{2} d\tau_x \leq \int_{K^{3}(Y,\rho)} \left| \frac{A_1(X)}{|XY|^{2}} \right|^{2} d\tau_x \leq C_4$$

$$C_4 \in R^{+}. \tag{17}$$

Wzór powyższy jest wnioskiem z pewnego twierdzenia zamieszczonego w pracy [4], str. 82.

Przyczynek do quasi-potencjału pochodzący od drugiej całki wzoru (17) spełnia równanie Poissona w sensie uogólnionym ([1], str. 119).

Ostatecznie quasi-potencjał $\hat{V}$ spełnia w obszarze D^e równanie Poissona w sensie uogólnionym (pochodne funkcji $\hat{V}$ względem zmiennej X należy rozumieć jako pochodne uogólnione w sensie Sobolewa).

Wykorzystując powyższe stwierdzenie oraz fakt, że funkcja Γ (wzór (9)) winna z założenia spełniać równanie (7), podstawiamy funkcję Γ do wzoru (7) i po prostych przekształceniach uzyskujemy równanie całkowe (14). Tym samym dowód lematu został zakończony.

□

Przedłużmy funkcje występujące we wzorze (14) na całą przestrzeń R^3 z zachowaniem założeń lematu 1.

Funkcje przedłużone na przestrzeń R^3 oznaczać będziemy wężykiem nad znakiem funkcji. Równanie (14) zapiszemy w postaci:

$$\tilde{\Phi}(X,Y) = \tilde{N}(X,Y) + \int_{R^3} \tilde{N}(X,M)\tilde{\Phi}(M,Y)d\tau_M \qquad X,Y,M \in R^3 \tag{18}$$

gdzie:

$$N(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3} a_i(X)\frac{\partial}{\partial X_i}L(X,Y). \tag{19}$$

Zakładając, że funkcje a_i ($i \in \{1,2,3\}$) klasy $C_1(D^e)$ spełniają warunki:

$$\bigwedge_{\substack{X \in D^e \\ i \in \{1,2,3\}}} \left|a_i(X)\right| = \left|\frac{1}{\varepsilon(X)} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i}(X)\right| \leqslant \frac{C_5}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}}, \qquad C_5 \in R^+, \ \varepsilon' > 0 \tag{20}$$

można wykazać ([8], ss. 74-76), że jądro $\tilde{N}$ operatora całkowego określonego wzorem (18) posiada oszacowania:

$$\bigwedge_{\substack{X \in K^3(Y,\rho) \\ Y \in R^3}} \left|\tilde{N}(X,Y)\right| \leqslant \frac{C_6}{|XY|^2}, \qquad C_6 \in R^+ \tag{21}$$

$$\bigwedge_{\substack{X \in R^3 \setminus K^3(Y,\rho) \\ \rho = \frac{3|Y|+1}{2} \\ Y \in R^3}} \left|\tilde{N}(X,Y)\right| \leqslant \frac{C_7}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^2} \qquad C_7 \in R^+, \ \varepsilon' > 0 \tag{22}$$

Ze wzorów (21), (22) oraz z faktu, że nośniki funkcji $\tilde{N}$, $\tilde{\Phi}$ nie są zwarte, wynika, że równanie całkowe określone wzorem (18) nie jest równaniem typu Fredholma. Sposób rozwiązania tego równania różnić się zatem będzie od znanych w literaturze metod rozwiązywania równań całkowych typu Fredholma.

4. Analiza istnienia rozwiązania równania całkowiego (18)

Zdefiniujmy operator T wzorem:

$$Tf(X,Y) = \int_{R^3} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s \tag{23}$$

i zapiszmy równanie całkowe (18) w postaci:

$$\tilde{\Phi} - T\tilde{\Phi} = \tilde{N}. \tag{24}$$

Równanie (24) (podobnie jak w pracy [8], ss. 76-80) sprowadzimy do następującej postaci:

$$\tilde{\Phi}' + T\tilde{\Phi}' = \tilde{N}', \tag{25}$$

$$\tilde{\Phi}' = (-1)^{m+1}T^{m+1}\tilde{\Phi} \tag{26}$$

$$m \in N$$

$$\tilde{N}' = (-1)^{m+1}T^{m+1}\tilde{N} \tag{27}$$

w celu wyeliminowania osobliwości funkcji $\tilde{\Phi}$ przez dobór liczby iteracji operatora T. Rozwiązanie równania (18) (podobnie jak w pracy [8], str.77) przedstawić można w postaci wzoru:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^j T^j \tilde{N} + \tilde{\Phi}'. \tag{28}$$

Wykażemy następujący lemat:

LEMAT 2

Jeżeli funkcja f posiada oszacowania:

$$\bigwedge_{\substack{X \in K^3(Y,\rho) \\ Y \in R^3}} |f(X,Y)| \leq \frac{C_8}{|XY|^2}, \qquad C_8 \in R^+ \tag{29}$$

$$\bigwedge_{\substack{X \in R^3 \setminus K^3(Y,\rho) \\ Y \in R^3}} |f(X,Y)| \leqslant \frac{C_9}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|X|+1)^2}, \quad C_9 \in R^+, \quad \varepsilon' > 0 \tag{30}$$

to funkcja $|T^j f|$ posiada oszacowania:

$$|T^j f(X,Y)| \leqslant \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \dfrac{C_{10}}{|XY|} & j = 1 \\ C_{11} \log|XY| + C_{12} & j = 2 \\ C_{13} & j = 3 \end{array}\right\} & X \in K^3(Y,\rho),\ Y \in R^3 \\ \dfrac{C_{14}}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^2} \quad j = 1,2,3 & X \notin K^3(Y,\ ) \end{cases} \tag{31}$$

$$C_{10},\ C_{11},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{14} \in R^+$$

<u>Dowód</u>

Zgodnie z określeniem operatora T (wzór (23)) mamy:

$$Tf(X,y) = \int_{R^3} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s = \int_{R^3\setminus K^3(Y,\rho)} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s + \int_{K^3(Y,\rho)} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s \tag{32}$$

Stąd:

$$|Tf(X,Y)| \leqslant \left|\int_{R^3\setminus K^3(Y,\rho)} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s\right| + \left|\int_{K^3(Y,\rho)} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s\right|. \tag{33}$$

1°

Wykorzystując oszacowania funkcji $\tilde{N}$, f (wzory (21), (22), (29), (30)) rozpatrzmy pierwszą z całek wzoru (33):

$$\left|\int_{R^3\setminus K^3(Y,\rho)} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s\right| \leqslant \int_{R^3\setminus K^3(Y,\rho)} \frac{C_7C_9}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|S|+1)^2(|S|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^2} d\tau_s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_7C_9}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^2} \int_{R^3\setminus K^3(Y,\rho)} \frac{1}{(|S|+1)^{5+\varepsilon'}} d\tau_s \leqslant \frac{C_{14}}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^2}. \tag{34}$$

Ze wzorów (30), (34) wynika, że funkcja $|T^j f|$ dla $X \in K^3(Y,\rho)$ i dla $j = 1,2,3 \ldots$ posiada to samo oszacowanie określone wzorem (31).

2^0

Rozpatrzmy drugą całkę wzoru (33).
Na podstawie wzorów (21), (29) dla $j = 1$ mamy:

$$\left|\int_{K^3(Y,\rho)} \tilde{N}(X,S)f(S,Y)d\tau_s\right| \leq \int_{K^3(Y,\rho)} \frac{C_6C_8}{|XS|^2|SY|^2}\, d\tau_s. \tag{35}$$

Z pewnego lematu ([3], str. 330) wynika, że

$$\int_{K^3(Y,\rho)} \frac{C_6C_8}{|XS|^2|SY|^2}\, d\tau_s \leq \frac{C_{10}}{|XY|}. \tag{36}$$

Postępując podobnie dla $j = 2,3$ (por. [8], ss. 79, 80) uzyskujemy dalsze oszacowania funkcji $|T^j f|$ określone wzorem (31) (dla $X \in K^3(Y,\rho)$)

Przedstawione rozumowania umożliwiają wykazanie lematu:

LEMAT 3

Równanie całkowe iterowane (25) dla $m = 2$ jest równaniem Fredholma drugiego rodzaju.

Dowód

Wyprowadźmy podobnie jak w pracy [2] (str. 310) przestrzeń $\mathcal{L}$ funkcji f całkowalnych w sensie Lebesgue'a na R^3 z normą:

$$\|f\|_{\mathcal{L}(R^3)} = \left[\int_{R^3} |f(X)|^p (|X|+1)^{(3+\varepsilon')\frac{p}{g}}\, d\tau_x\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{37}$$

gdzie:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{g} = 1; \quad p = 2, \quad g = 2.$$

Wykorzystując oszacowania (11), (13), (21), (22) oraz lemat 2 łatwo sprawdzić, przez bezpośrednie obliczenie, że funkcje $T^{m+1}\tilde{\Phi}'$, $T^{m+1}\tilde{N}'$ dla $m = 2$ należą do przestrzeni $\mathcal{L}$.

Zgodnie z pewnym twierdzeniem ([2], str. 311), mówiącym, że jeśli jądro operatora T posiada oszacowania określone wzorami (21), (22), a funk-

cje $\tilde{\Phi}'$, $\tilde{N}'$ należą do przestrzeni $\mathcal{L}$, to operator $T\tilde{\Phi}'$ jest pełnociągły w przestrzeni $\mathcal{L}$, uzyskujemy tezę lematu.

□

Określmy obecnie, jakie warunki winny spełniać współczynniki a_i równania eliptycznego (7), by funkcja Φ spełniała założenia lematu 1 (tym samym warunki te stanowić będą warunek wystarczający wyznaczenia funkcji Φ jako rozwiązania równania całkowego (14)).

Zapiszmy równanie (18) w postaci:

$$\tilde{\Phi} = T\tilde{\Phi} + \tilde{N}. \tag{38}$$

Stąd mamy:

$$|\tilde{\Phi}| \leq |T\tilde{\Phi}| + |\tilde{N}|. \tag{39}$$

Zauważmy, że:

- funkcje $\tilde{\Phi}$, $\tilde{N}$ mają te same oszacowania określone wzorami (11), (13), (21), (22),
- działanie operatora T na funkcję $\tilde{\Phi}$ zmniejsza jej rząd osobliwości, nie zmieniając własności tej funkcji przy dążeniu jej argumentu do nieskończoności (lemat 2) zgodnie z teorią iteracji słaboosobliwych równań całkowych.

Z powyższych uwag wynika nierówność:

$$|\tilde{\Phi}(X,Y)| \leq C_{15}|\tilde{N}(X,Y)|, \quad C_{15} \in R^+. \tag{40}$$

Stąd na podstawie wzoru (19) mamy:

$$|\Phi(X,Y)| \leq \frac{C_{15}C_{16}}{|XY|^2}\sum_{i=1}^{3}|a_i(X)| = \frac{C_1(X)}{|XY|^2}, \tag{41}$$

gdzie:

$$C_1(X) = C_{15}C_{16}\sum_{i=1}^{3}|a_i(X)|, \quad C_{15}, C_{16} \in R^+, \quad X \in K^3(Y,\rho).$$

Ze wzorów (40), (41) wynika, że funkcja Φ w kuli $K^3(Y,\rho)$ $(X \in K^3(Y,\rho))$ będzie posiadała oszacowania określone wzorami (11), jeśli założymy, że:

$$\bigwedge_{\substack{K^3(Y,\rho)\\ K^3(Y,\rho)\in R^3\\ X\in K^3(Y,\rho)\\ Y\in\Lambda=\{Y\in R^3\,:\,X=Y\}}} \sum_{i=1}^{3}\int_{K^3(Y,\rho)}|a_i(X)|^2 d\tau_X \leq C_1\rho^5. \tag{42}$$

Zakładając, że funkcje a_i $(i\in\{1,2,3\})$ spełniają w przestrzeni R^3 warunek Höldera z wykładnikiem $\mathcal{L}$ oraz warunek:

$$\bigwedge_{\substack{X\in R^3\\ i\in\{1,2,3\}}} |a_i(X)| \leq \frac{C_1}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}},\quad C_1\in R^+,\quad \varepsilon'>0, \tag{43}$$

uzyskujemy dla funkcji Φ oszacowanie określone wzorem (13):

$$\bigwedge_{\substack{X\in R^3\setminus K^3(Y,\rho)\\ Y\in R^3}} |\Phi(X,Y)| \leq C_{15}|\tilde{N}(X,Y)| \leq \frac{C_{15}C_{16}C_{17}}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}|XY|^2} \leq$$

$$\leq \frac{C_3}{(|X|+1)^{3+\varepsilon'}(|Y|+1)^2} \tag{44}$$

$$\varepsilon'>0,\quad C_{15},\ C_{16},\ C_{17},\ C_3\in R^+.$$

Z rozważań przeprowadzonych w punkcie 4 artykułu wynika następujący lemat:

LEMAT 4

Jeżeli współczynniki równania eliptycznego a_i spełniają warunki określone wzorami (42), (43) oraz spełniają warunek Höldera w przestrzeni R^3, to rozwiązania podstawowego Γ równania eliptycznego można poszukiwać w postaci określonej wzorem (9).

Funkcja Φ występująca we wzorze (9) jest związana z funkcją $\tilde{\Phi}'$ zależnością (28). Funkcja $\tilde{\Phi}'$ jest rozwiązaniem równania całkowego Fedholma drugiego rodzaju określonego wzorem (25).

□

Wykażmy jeszcze, że liczba $\lambda = 1$ nie jest wartością własną równań:

$$\tilde{\Phi} - \lambda T\tilde{\Phi} = \tilde{N} \tag{42'}$$

$$\tilde{\Phi}' + \lambda T\tilde{\Phi}' = \tilde{N}' \tag{43'}$$

W tym celu zapiszym równanie (42) w postaci wzoru (18):

$$\tilde{\Phi}(X,Y) = \tilde{N}(X,Y) + \int_{R^3} \tilde{N}(X,M)\tilde{\Phi}(M,Y)d\tau_M \qquad X,Y,M \in R^3 \quad \lambda = 1.$$

Zauważmy, że z warunku $\tilde{N}(X,Y) = 0$ wynika wprost, że $\Phi(X,Y) = 0$. Jeśli $\tilde{N}(X,Y) = 0$ i $\tilde{\Phi}(X,Y) = 0$ to ze wzoru (28) wynika, że $\tilde{\Phi}'(X,Y) = 0$, zatem $\lambda = 1$ nie jest wartością własną równań (42'), (43').

Równanie (43) posiada więc jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji $f \in \mathcal{L}$. Ze wzoru (28) wynika, że równanie (42) posiada jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji L_2 (R^3).

Powyższe rozumowanie posiada prostą interpretację fizykalną: Zauważmy, że przyjęcie warunku $N(X,Y) = 0$ implikuje warunek $a_1(X) = 0$. Zatem wtedy $\Gamma(X,Y) = L(X,Y)$, tzn. rozwiązanie podstawowe równania eliptycznego (7) staje się rozwiązaniem podstawowym dla równania Laplace'a, co zachodzi tylko wtedy, gdy $\Phi = 0$ (wzór (9)).

5. Podsumowanie

W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązania podstawowego w sensie Leviego (wzór (9)) dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a. Równanie to opisuje pole elektrostatyczne w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych.

Stwierdzono, że warunkiem wystarczającym istnienia rozwiązania podstawowego jest:

- spełnienie warunku Höldera przez współczynniki równania eliptycznego,
- spełnienie pewnych dodatkowych warunków określonych wzorami (42), (43).

W artykule wykazano również, że rozwiązania podstawowego Γ należy poszukiwać poprzez:

- rozwiązanie równania całkowego (25),
- wyznaczenie funkcji Φ na podstawie wzoru (28),
- wyznaczenie funkcji Γ poprzez wykorzystanie wzoru (9).

LITERATURA

[1] Giunter N.M.: Teoria potencjału. PWN, Warszawa 1957.

[2] Jager W.: Über das Dirichletsche Aussenraum problem für die Schwingungsgleichung. Math. Zeitschr. Bd 95. 1967, ss. 299-323.

[3] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. T. I. PWN, Warszawa 1957.

[4] Ładyżenskaja O.A., Uralceva N.N.: Liniejnyje i kvaziliniejnyje urawnenija ellipticzeskogo tipa. Nauka, Moskwa 1964.

[5] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. T. II. PWN, Warszawa 1957.

[6] Sobolew S.L.: Uravnienija matematiczeskoj fiziki. G.I.T.T.L. Moskwa 1954.

[7] Sulanke R., Wintgen P.: Geometria różniczkowa i teoria wiązek. PWN, Warszawa 1977.

[8] Walczak J.: Zagadnienie stosowalności pewnych metod analitycznych wyznaczania parametrów skupionych RLC. Prace doktorska, Gliwice 1986.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
К АНАЛИЗУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ
НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

I. КОНСТРУКЦИЯ ГЛАВНОГО РЕШЕНИЯ

Р е з ю м е

В статье представлен анализ существования главного решения (в смысле Леви) для эллиптического уравнения описывающего электростатическое поле в линейных, изотропных и неоднородных средах. Даны необходимые условия существования главного решения в неограниченных областях пространства R^3 и метод конструкции этого решения.

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION THEORY TO ANALYSIS OF
EXISTENCE OF DIRICHLET PROBLEM SOLUTIONS FOR CERTAIN ELLIPTIC
EQUATIONS IN ELECTROSTATICS

I. THE STRUCTURE OF FUNDAMENTAL SOLUTION

S u m m a r y

In the article the analysis of existance of fundamental solution (according to Levie) for elliptic equation describing electrostatic field in the linear, isotropic and heterogeneous media has been carried out.

Sufficient conditions for the existance of fundamental solution in the unlimited ranges of space R^3 and the method of constructing this solution have been given.