ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ELEKTRYKA z. 107 Nr kol. 946

Janusz WALCZAK

# ZASTOSOWANIE TEORII RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO ANALIZY ISTNIENIA ROZWIĄZNAŃ PROBLEMU DIRICHLETA DLA PEWNYCH RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH W ELEKTROSTATYCE

## II. ANALIZA ISTNIENIA ROZWIĄZAŃ W POSTACI POTENCJAŁÓW

Streszczenie. Artykuł ten jest kontynuacją zagadnienia podjętego w pracy [6]. W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązań zewnętrznego problemu Dirichleta (w postaci potencjałów) dla pola elektrostatycznego w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych. Wykazano, że nie istnieje rozwiązanie w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej, natomiast istnieje w postaci sumy potencjału uogólnionego warstwy podwójnej i potencjału pochodzącego od układu ładunków punktowych lub też w postaci sumy uogólnionych potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej.

### 1. Formalizacja problemu brzegowego

Dla modelu układu polowego zdefiniowanego w pracy [6] (rozdz. 2) sformułujmy zewnętrzny problem Dirichleta:

Wyznaczyć rozwiązanie równania:

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

gdzie:

$$a_i = \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon\right)$$

$\varepsilon$ – funkcja przenikalności dielektrycznej ośrodka w obszarze $D^e$ (por. [6], wzór (1)), będąca funkcją klasy $C_2$ $(D^e)$ oraz funkcją klasy $C_0$ $(\bar{D}^e)$, regularna w nieskończoności i spełniająca na brzegach $\partial D_i$ $(i \in \{1...n\})$ obszaru $D^e$ warunki:

$$
u\big|\partial D_i = \tilde{V}_i \quad \begin{cases} \bigwedge\limits_{i=j} & \tilde{V}_i\big|\partial D_i = V_i \\ \bigwedge\limits_{i\neq j} & \tilde{V}_i\big|\partial D_j = 0 \\ i,j \in \{1\ldots n\} & \\ D(\tilde{V}_i) = \partial D & \\ V_i \in \mathrm{const}\ (\partial D_i). & \end{cases} \tag{2}
$$

Rozwiązania $u$ równania (1) poszukiwać będziemy w postaci potencjałów zdefiniowanych w oparciu o pojęcie rozwiązania podstawowego $\Gamma$ (w sensie Levie'go) równania (1). Istnienie rozwiązania podstawowego $\Gamma$ wykazano w pracy [6].

## 2. Sprowadzenie problemu Dirichleta do układu równań całkowych

Poszukujemy rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej określonego wzorem:

$$
W(M) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} \left[\frac{d}{d\nu Q_i}\Gamma(M,Q_i)\right]\varphi_i(Q_i)dS_{Q_i}, \tag{3}
$$

gdzie:

$\varphi_i$ – funkcje zwane gęstościami warstwy podwójnej określone na brzegu $\partial D$ i spełniające warunki:

$$
\varphi_i\big|\partial D_j = 0 \qquad \text{dla każdego } i,j \in \{1\ldots n\},\ i\neq j \tag{4}
$$

$\Gamma(M,Q_i)$ – rozwiązanie podstawowe ([6]) równania (1) określone wzorem:

$$
\Gamma(M,Q_i) = |MQ_i|^{-1} + \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(X,Q_i)}{|MX|}\, d\tau_x, \tag{5}
$$

$\frac{d}{d\nu_{Q_i}}\Gamma(M,Q_i)$ – pochodna transwersalna rozwiązania podstawowego równania (1) w punkcie $(M,Q_i)$.

Ponieważ częścią główną operatora przyporządkowanego równaniu (1) jest operator Laplace'a, to łatwo wykazać, że pojęcie pochodnej transwersalnej pokrywa się z pojęciem pochodnej normalnej rozwiązania podstawowego dla równania (1).

Z powyższego wynika, że:

$$\frac{d}{d\nu_{Q_i}}\Gamma(M,Q_i) = \frac{\cos(\overline{Q_iM},n_{Q_i})}{|Q_iM|^2} + \frac{d}{dn_{Q_i}}\int_{R^3}\frac{\tilde{\Phi}(X,Q_i)}{|MX|}\,d\tau_X \tag{6}$$

$$X\in R^3,\ M\in D^e,\ Q_i\in\ \partial D_i.$$

Wzór na potencjał warstwy podwójnej przyjmie więc postać:

$$W(M) = \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\frac{\cos(\overline{Q_iM},n_{Q_i})}{|Q_i\ M|^2}\varphi_i(Q_i)dS_{Q_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\left[\frac{d}{dn_{Q_i}}\int_{R^3}\frac{\tilde{\Phi}(X,Q_i)}{|MX|}\,d\tau_X\right]\varphi_i(Q_i)dS_{Q_i}. \tag{7}$$

Można wykazać (np. [4], str. 107), że rozwiązanie podstawowe $\Gamma$ posiada oszacowanie:

$$|\Gamma(X,Y)| \leqslant \frac{C}{|XY|},\qquad C\in R^+, \tag{8}$$

a ponadto dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a pochodna normalna jest pochodną transwersalną, skąd wynika, że własności potencjałów uogólnionych będą identyczne jak własności potencjałów klasycznych (tzn. potencjałów dla równania Laplace'a).

Zakładając, że funkcje $\varphi_i (i\in\{1...n\})$ są klasy $C_0$ $(\partial D)$ (założenie to wykazano w pracy [5], ss. 120-122) oraz że brzegi $\partial D_i$ są klasy $C_m (m\geqslant 2)$, można wykazać przy niewielkiej modyfikacji dowodu dla obszaru jednospójnego ([3], str. 432), że wartości graniczne potencjału warstwy podwójnej (3) przy dążeniu z punktu $M\in D^e$ do punktu $P\in\ \partial D_i$ są określone identycznymi wzorami jak dla obszaru jednospójnego.

Stąd i ze wzoru (2) uzyskuje się układ $n$ równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z niewiadomymi funkcjami $\varphi_i$:

$$V_j = -2\pi\varphi_j(P_j) + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\frac{\cos(\overline{Q_iP_j},n_{Q_i})}{|Q_iP_j|^2}\,dS_{Q_i} +$$

$$+\sum_{i=1}\int_{\partial D_i}\left[\frac{d}{dn_{Q_i}}\int_{R^3}\frac{\Phi(X,Q_i)}{|P_jX|}\,d\tau_X\right]\varphi_i(Q_i)dS_{Q_i} \tag{9}$$

$P_i, Q_i \in \partial D_i$
$X \in R^3$
$i,\ j \in \{1...n\}$.

Chcąc wykorzystać teorię Fredholma do analizy równań całkowych (9) należy utworzyć układ równań stowarzyszonych z tymi równaniami.

W tym celu zdefiniujmy wewnętrzny problem Neumanna dla równania (1): Wyznaczyć funkcję $u$ klasy $C_2(D_i)$ i klasy $C_o(\bar{\bar{D}}_i)$ będącą rozwiązaniem równania (1) w obszarach $D_i(i\in\{1...n\})$ i spełniającą na brzegach $D_i$ obszarów $D_i$ warunki:

$$\frac{\partial u}{\partial n^{(w)}}\Big|\,\partial D_i = g_i, \tag{10}$$

gdzie:

$\frac{\partial u}{\partial n^{(w)}}\Big|\partial D_i$ – wartość pochodnej normalnej funkcji $u$ na brzegach $\partial D_i$ przy dążeniu punktu $M \in D_i$ do punktu $P \in \partial D_i$ po normalnej,

$g_i$ – pewne funkcje zadane na brzegach $\partial D_i$.

Poszukujemy rozwiązania wewnętrznego problemu Neumanna dla równania (1) w postaci uogólnionego potencjału warstwa pojedynczej $V$:

$$V(M) = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\Gamma(M,Q_i)\Psi_i(Q_i)dS_{Q_i}, \tag{11}$$

$M \in D^1$, $Q_i \in \partial D_i$

gdzie:

$\Psi_i$ – funkcje zwane uogólnionymi gęstościami warstwy pojedynczej, określone na brzegu $\partial D$ i spełniające warunki:

$$\Psi_i\Big|\partial D_j = 0 \qquad i,j\in\{1...n\},\quad i \neq j. \tag{12}$$

Przyjmując, że funkcja $\Psi_i$ są całkowalne na brzegach $\partial D_i$ (założenie to wykazano w pracy [5], ss. 120-122, można wykazać, że uogólniony potencjał warstwy pojedynczej $V$ jest funkcją klasy $C_2(D_i)$ i $C_o(\bar{\bar{D}}_i)$.

Pochodną normalną uogólnionego potencjału warstwy pojedynczej określa wzór:

$$\frac{\partial V}{\partial n}(M) = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} \frac{d}{dn_p}\Gamma(M,Q_i)\Psi_i(Q_i)dS_{Q_i}, \tag{13}$$

$$P_i,\ Q_i \in \partial D_i$$

$$M \in D_i$$

gdzie $n_p$ - normalna zewnętrzna do brzegu $\partial D_i$ w punkcie P.

Uwzględniając we wzorze (13) wzór (5) uzyskujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial n}(M) = -\left[\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} \frac{\cos(\overline{MQ_i},n_p)}{|MQ_i|^2}\Psi_i(Q_i)dS_{Q_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} \left[\frac{d}{dn_p}\int\limits_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(X,Q_i)}{|MX|}d\tau_x\right]\Psi_i(Q_i)dS_{Q_i}\right]. \tag{14}$$

Można wykazać, że jeśli $\Psi_i \in C_0(\partial D_i)$, to wartości graniczne pochodnej normalnej (14) przy dążeniu do brzegów obszarów $\partial D_i$ z wnętrza obszarów $D_i$ są określone identycznymi wzorami jak dla obszaru jednospójnego ([3], str. 437). Wykorzystując te wzory oraz wzory (10), (14) uzyskuje się układ n-równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z niewiadomymi funkcjami $\Psi_i$:

$$g_j(P_j) = 2\pi\Psi_j(P_j) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} \frac{\cos(\overline{P_jQ_i},n_{p_j})}{|P_jQ_i|^2}dS_{Q_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial D_i} \Psi_i(Q_i)\left[\frac{d}{dn_{P_j}}\int\limits_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(X,Q_i)}{|P_jX|}d\tau_x\right]dS_{Q_i}. \tag{15}$$

Zdefiniujmy na brzegu $\partial D$ funkcje:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i,$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, \tag{16}$$

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i, \tag{16}$$

$$V' = \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i.$$

Układy równań całkowych (9), (15) można zapisać (przy wykorzystaniu wzorów (16)) w postaci układu dwóch równań całkowych z niewiadomymi funkcjami $\varphi$, $\Psi$:

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\partial D} K_{11}(P,Q)\varphi(Q)dS_Q + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\partial D} K_{12}(P,Q)\varphi(Q)dS_Q - \frac{\lambda}{2\pi}V' \tag{17}$$

$$\Psi(P) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\partial D} K_{21}(P,Q)\Psi(Q)dS_Q - \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\partial D} K_{22}(P,Q)\Psi(Q)dS_Q + \frac{\lambda}{2\pi}g(P) \tag{18}$$

dla parametru $\lambda = 1$, przy czym:

$$K_{11}(P,Q) = \frac{\cos(\overline{QP},n_Q)}{|PQ|^2}, \tag{19}$$

$$K_{22}(P,Q) = \frac{\cos(\overline{PQ},n_P)}{|QP|^2}, \tag{20}$$

$$K_{12}(P,Q) = \frac{d}{dn_Q}\int_{R_3} \frac{\tilde{\Phi}(X,Q)}{|PX|}\, d\tau_X, \tag{21}$$

$$K_{21}(P,Q) = \frac{d}{dn_P}\int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(X,Q)}{|PX|}\, d\tau_X. \tag{22}$$

Jądra $K_{ij}$ $(i,j \in \{1,2\})$ posiadają następujące oszacowania:

$$|K_{ij}(P,Q)| \leqslant \frac{C_{ij}}{|PQ|} \qquad C_{ij} \in R^+. \tag{23}$$

Jądra $K_{11}$ i $K_{22}$ są ze sobą sprzężone. Z symetrii funkcji $\Gamma$ ([3], str. 428) wynika, że jądra $K_{12}$ i $K_{21}$ są ze sobą również sprzężone ([3], str. 441). Równania (17), (18) stanowią więc układ stowarzyszonych równań Fredholma drugiego rodzaju.

## 3. Analiza funkcji własnych równań całkowych (17), (18)

Rozpatrzmy równanie całkowe jednorodne przyporządkowane równaniu (18):

$$\rho(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho(Q)dS_Q - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} K_{22}(P,Q)\rho(Q)dS_Q \tag{24}$$

dla parametru $\lambda = 1$. Równanie to opisuje wewnętrzny jednorodny problem Neumanna dla równania (1).

Wykażemy następujący lemat:

LEMAT 1

Równanie całkowe (24) posiada jednoznaczne rozwiązanie postaci:

$$\rho(P) = \rho^{(1)}(P) + \rho^{(2)}(P), \tag{25}$$

gdzie:

$\rho^{(1)}$ – funkcja własna zagadnienia Robina dla równania Laplace'a ([1], str. 161) określona wzorem:

$$\rho^{(1)}(P) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(1)}(P), \qquad D(\rho_i) = \partial D \tag{26}$$

i spełniająca warunki:

$$\int\limits_{\partial D_j} \rho_i^{(1)}(P)dS_{P_j} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i=j \\ 0 \text{ dla } i\neq j \end{cases} \qquad i,j \in \{1...n\} \tag{27}$$

$\rho^{(2)}$ – funkcja będąca jednoznacznym rozwiązaniem równania całkowego:

$$\rho^{(2)}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} K_{22}(P,Q)\rho^{(2)}(Q)dS_Q - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho^{(2)}(Q)dS_Q - $$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho^{(1)}(Q)dS_Q. \tag{28}$$

Dowód

$1^o$

Rozwiązania równania całkowego (24) bez utraty ogólności rozważań można przedstawić w postaci wzoru (25), przy czym $\rho^{(1)}$ oznacza funkcję własną zagadnienia Robina dla równania Laplace'a, a $\rho^{(2)}$ oznacza pewną funkcję tak dobraną, by funkcja $\rho$ spełniała równanie (24).

Podstawiając funkcję określoną wzorem (25) do równania (24) uzyskujemy:

$$\rho^{(1)}(P) + \rho^{(2)}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{22}(P,Q)\rho^{(1)}(Q)dS_Q - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho^{(1)}(Q)dS_Q - $$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{22}(P,Q)\rho^{(2)}(Q)dS_Q - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho^{(2)}(Q)dS_Q. \tag{29}$$

Funkcja $\rho^{(1)}$ jest (z założenia) rozwiązaniem zagadnienia Robina dla równania Laplace'a i spełnia równanie:

$$\rho^{(1)}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{22}(P,Q)\rho^{(1)}(Q)dS_Q. \tag{30}$$

Odejmując stronami równania (29), (30) uzyskamy:

$$\rho^{(2)}(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{22}(P,Q)\rho^{(2)}(Q)dS_Q - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho^{(2)}(Q)dS_Q -$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} K_{21}(P,Q)\rho^{(1)}(Q)dS_Q.$$

Z powyższych rozważań widać, że jeśli rozwiązania równania (24) przedstawić w postaci wzoru (25), to funkcja $\rho^{(2)}$ winna spełniać niejednorodne równanie Fredholma drugiego rodzaju (wzór (28)).

$2^o$

Wykażemy obecnie, że równanie całkowe (28) posiada jednoznaczne rozwiązanie. W celu wykazania powyższego stwierdzenia należy dowieść, że równanie jednorodne odpowiadające równaniu (28) posiada wyłącznie rozwiązania zerowe (zgodnie z pierwszym twierdzeniem Fredholma).

Energia elektrostatyczna pola $W_1^e$ dla przyjętego modelu układu polowego i dla ośrodka jednorodnego ($\varepsilon$ = const) wyraża się wzorem:

$$W_1^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} C_{ij}^* V_i V_j, \tag{31}$$

gdzie:

$C_{ij}^*$ - współczynniki pojemnościowe przyjętego modelu układu polowego przy $\mathcal{E} \in$ const,

$V_j$ - potencjały generowane na brzegach $\partial D_i$ przez rozkłady ładunków $\rho_i^{(1)}$ rozmieszczone na tych brzegach.

Jeśli dla przyjętego modelu układu polowego zastąpić dielektryk jednorodny dielektrykiem niejednorodnym (opisanym funkcją $\mathcal{E}$), to przyrost energii $\Delta W^e = W_2^e - W_1^e$ ($W_2^e$ - energia pola w układzie z dielektrykiem niejednorodnym) wyniesie ([2], str. 171):

$$\Delta W^e = \frac{1}{2} \int_{R^3} (\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}) \operatorname{grad} V(X) \operatorname{grad} V_o(X) d\tau_x, \tag{32}$$

gdzie:

$V_o$ - potencjał generowany przez rozkład ładunków $\rho^{(1)}$,

$V$ - potencjał generowany przez rozkład ładunków $\rho$ (wzór (25)).

Przyjmując, że $\rho^{(1)}$ jest funkcją zerową, mamy $V_o(X) = 0$ (dla każdego $X \in R^3$) oraz mamy $W_1^e = 0$. Ze wzoru (32) wynika, że w tym przypadku $\Delta W^e = 0$ oraz że $W_2^e = 0$.

Z drugiej strony:

$$W_2^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \tilde{C}_{ij} \tilde{V}_i \tilde{V}_j, \tag{33}$$

gdzie:

$\tilde{C}_{ij}$ - współczynniki pojemnościowe przyjętego modelu polowego dla ośrodka niejednorodnego,

$\tilde{V}_i$ - potencjały generowane przez rozkłady ładunków $\rho^{(2)}$ na brzegach $\partial D_i$.

Z warunku $W_2^e = 0$ oraz ze ściśle dodatniej określoności formy kwadratowej (33) wynika natychmiast, że potencjały na brzegach $\partial D_i$ oznaczone jako $\tilde{V}_i (i \in \{1...n\})$ są tożsamościowo równe zeru. Stąd i na podstawie pewnego twierdzenia ([3], str. 440) (lub też z zasady jednoznaczności rozwiązań równań eliptycznych) można stwierdzić, że funkcje $\rho^{(2)}$ będące rozwiązaniami równania jednorodnego przyporządkowanego równania (28) są funkcjami zerowymi.

Zgodnie z pierwszym twierdzeniem Fredholma równanie (28) posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Ponieważ rozwiązanie zagadnienia Robina jest jednoznaczne oraz ponieważ równanie (28) posiada jednoznaczne rozwiązanie, to tym samym funkcja (wzór (25)) będąca rozwiązaniem równania (24) jest określona jednoznacznie.

$3^o$

Funkcję $\rho^{(2)}$ można zapisać w postaci wzoru:

$$\rho^{(2)}(p) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(2)}(P), \tag{34}$$

przy czym $\rho_i^{(2)}$ interpretuje się jako zastępcze gęstości ładunków pozornych rozmieszczonych na brzegach $\partial D_i$ i wywołanych polaryzacją dielektryka niejednorodnego.

Można wykazać ([5], ss. 95-97), że funkcje $\rho_i^{(2)}$ spełniają warunki:

$$\int_{\partial D} \rho_i^{(2)}(P)dS_P = 0 \qquad \begin{array}{l} i,j \in \{1...n\} \\ D(\rho^{(2)}) = \partial D \\ D(\rho_i^{(2)}) = \partial D \end{array} \tag{35}$$

Wzór powyższy stanowi interpretację faktu, że całkowite ładunki pozorne idealnego dielektryka (a taki model dielektryka przyjęto w pracy) są równe zeru.

□

## 4. Analiza istnienia rozwiązań problemu Dirichleta

Równania całkowe (17), (18) stanowią układ słaboosobliwych stowarzyszonych równań Fredholma drugiego rodzaju. Liczba $\lambda = 1$ jest wartością własną tych równań.

Łatwo wykazać, że rozwiązanie równania (1) w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej nie istnieje, gdyż zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma nie są spełnione następujące warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial D} V\rho_i(P)dS_P = V_i \qquad i \in \{1...n\}, \tag{36}$$

gdzie:

$V_i$ - funkcje stałe zadane na brzegach $\partial D_i$ i określone wzorem (2),

$$\rho_i = \rho_i^{(1)} + \rho_i^{(2)};$$ przy czym funkcje $\rho_i^{(1)}, \rho_i^{(2)}$ spełniają zależności określone wzorami (27), (35).

Wykażemy, że rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci sumy uogólnionego potencjału warstwy podwójnej i potencjału uogólnionego pochodzącego od układu ładunków punktowych $\mathcal{L}_i$ $(i \in \{1...n\})$ jest zawsze możliwe. W tym celu zdefiniujmy potencjał uogólniony $W_P$ pochodzący od układu ładunków punktowych $\mathcal{L}_i$:

$$W_P(M) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, M), \tag{37}$$

gdzie:

$\mathcal{L}_i$ - ładunki punktowe,

$\Gamma$ - rozwiązanie podstawowe równania (1).

Poszukujemy rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci:

$$\underline{W}(M) = \int_{\partial D} \frac{d}{dn_{Q_i}} \Gamma(M,Q)\varphi(Q)dS_Q + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, M) \tag{38}$$

$$A_i \in D_i.$$

Zamiast równania całkowego (17) należy rozpatrzyć równanie:

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D} (K_{11}(P,Q) + K_{12}(P,Q))\varphi(Q)dS_Q - \frac{\lambda}{2\pi}(V' - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, M)). \tag{39}$$

Jądro równania (39) jest takie samo jak jądro równania (17), a więc zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma równanie (39) posiada rozwiązanie dla $\lambda = 1$, gdy są spełnione następujące warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial D} (V' - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, P))\rho_i(P)dS_P = 0, \qquad i \in \{1...n\}. \tag{40}$$

Po prostych przekształceniach wzór (40) przyjmie postać:

$$V_j - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i V_{ij} = 0, \qquad j \in \{1...n\}. \tag{41}$$

gdzie:

$V_j$ - potencjał zadany na brzegu $\partial D_j$,

$$V_{ij} = \int_{\partial D} \Gamma(A_i,P)\varrho_i(P)dS_P. \tag{42}$$

Z definicji funkcji własnych $\varrho_i$ wynika, że funkcje $V_{ij}$ $(i,j \in \{1...n\})$ należą do klasy funkcji stałych w obszarach $D_i$. Funkcje te nazywane są współczynnikami potencjałowymi i posiadają własność określoną wzorem:

$$\det\left[V_{ij}\right] \neq 0. \tag{43}$$

Z powyższego wzoru i z twierdzenia Cramera wynika, że układ równań (41) względem zmiennych $\mathcal{L}_i$ posiada zawsze rozwiązanie, tym samym zawsze można dobrać ciąg stałych $\mathcal{L}_i$ tak, by spełnione były warunki ortogonalności (40). Tym samym rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) w postaci sumy uogólnionych potencjałów warstwy podwójnej i ładunków punktowych (38) jest zawsze możliwe.

Poszukajmy jeszcze rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) w postaci sumy potencjału uogólnionego warstwy podwójnej i potencjału warstwy pojedynczej (o znanej z założenia gęstości $\xi$):

$$\underline{V}(M) = \int_{\partial D} \left[\frac{d}{dn_Q}\Gamma(Q,M)\right]\varphi(Q)dS_Q + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\Gamma(Q_i,M)\xi_i(Q_i)dS_{Qi}. \tag{44}$$

Rozpatrzmy równanie całkowe:

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\partial D}(K_{11}(P,Q) + K_{12}(P,Q))\varphi(Q)dS_Q -$$

$$- \frac{\lambda}{2\pi}\left(V' - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\Gamma(Q_i,P)\xi_i(Q_i)dS_{Q_i}\right). \tag{45}$$

Równanie całkowe (45) posiada takie samo jądro jak równanie (17), a więc zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma równanie (45) dla $\lambda = 1$ posiada rozwiązanie, gdy spełnione będą warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial D}\left(V' - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}\Gamma(Q_i P)\xi_i(Q_i)dS_{Q_i}\right)\varrho_j(P)dS_P = 0. \tag{46}$$

Wzory (46) po prostych przekształceniach i zmianie porządku całkowania przyjmują postać:

$$V_j - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} \xi_i(Q_i)\left( \int_{\partial D} \rho_j(P)\Gamma(Q_i,P)dS_{Q_i}\right)dS_P = 0. \tag{47}$$

Oznaczając:

$$q_i = \int_{\partial D_i} \xi_i(Q_i)dS_{Q_i} \tag{48}$$

oraz wykorzystując wzór (42) uzyskuje się zależność:

$$V_j - \sum_{i=1}^{n} q_i V_{ij} = 0. \tag{49}$$

Z uwagi na wzór (43) układ równań (49) posiada zawsze rozwiązanie ze względu na zmienne $q_i$.

Można więc zawsze dobrać ciąg gładkich funkcji $\xi_i$ $(i\in\{1...n\})$ spełniających warunek (48) (np. utożsamiając funkcje $\xi_i$ z funkcjami własnymi $\rho_i$ równania całkowego (24)).

Tak więc rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) można zawsze przedstawić w postaci sumy potencjału uogólnionego warstwy podwójnej i potencjału uogólnionego warstwy pojedynczej o znanej gęstości $\xi$.

## 5. Podsumowanie

W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązań (w postaci potencjałów) zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a, opisującego pole elektrostatyczne w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych.

Wykazano, że:

- rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej nie istnieje,
- rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta istnieje w postaci:
  - sumy uogólnionych potencjałów warstwy podwójnej i ładunków punktowych,
  - sumy uogólnionych potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej.

LITERATURA

[1] Giunter N.M.: Teoria potencjału. PWN, Warszawa 1957.

[2] Jackson J.D.: Elektrodynamika klasyczna. PWN, Warszawa 1982.

[3] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Tom I. PWN, Warszawa 1957.

[4] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. Tom II. PWN, Warszawa 1957.

[5] Walczak J.: Zagadnienie stosowalności pewnych metod analitycznych wyznaczania parametrów skupionych R,L,C. Praca doktorska, Gliwice 1986.

[6] Walczak J.: Zastosowanie teorii równań całkowych do analizy istnienia rozwiązań problemu Dirichleta dla pewnych równań eliptycznych w elektrostatyce. I. Konstrukcja rozwiązania podstawowego. Materiały X Seminarium Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Wisła 1987.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
К АНАЛИЗУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ
II. АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ТИПА ПОТЕНЦИАЛОВ

Р е з ю м е

Данная статья является продолжением проблемы, рассматриваемой в работе [6]. Представлен анализ существования решений внешней проблемы Дирихле (в виде потенциалов) для электростатического поля в линейных изотропных и неоднородных средах. Показано, что решение в виде обобщенного потенциала двойного слоя не существует. Показано также, что это решение существует в виде суммы обобщенного потенциала двойного слоя и обобщенного потенциала от системы точечных зарядов или в виде суммы обобщенных потенциалов простого и двойного слоев.

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION THEORY TO ANALYSIS OF
EXISTENCE OF DIRICHLET PROBLEM SOLUTIONS FOR CERTAIN ELLIPTIC
EQUATIONS IN ELECTROSTATICS
II. THE ANALYSIS OF EXISTENCE OF POTENTIAL FORM SOLUTIONS

S u m m a r y

This article is continuation of the problem dealt with in the work [6]. In the article the analysis of existence of external Dirichlet problem solutions (in the form of potentials) for electrostatic field in linear, isotropic and heterogeneous media has been carried out. It has been shown that there is no solution in the form of a generalized potential of a double layer, however, there is a solution in the form of a sum of generalized potential of a duable layer and the potential derived from a point charge system or in the form of a sum of generalized potentials of a single and double layer.