

Edward WILCZYŃSKI

PROBLEM BRZEGOWY ANALIZY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO  
W UKŁADZIE WIELU ŚRODOWISK PRZEWODZĄCYCH  
O SYMETRII OSIOWO-OBROTOWEJ

**Streszczenie.** W artykule sformułowano problem brzegowy obliczania pola elektromagnetycznego w układzie wielu brył metalu o różnych konduktywnościach, przenikalnościach magnetycznych i elektrycznych. Przyjmuje się, że każda bryła jest ośrodkiem liniowym, izotropowym i jednorodnym. Źródłem pola elektromagnetycznego jest cewka opisana powierzchnią zadaną gęstością powierzchniową prądu. Układ ośrodków i cewka posiadają symetrię osiowo-obrotową. Pole elektromagnetyczne obliczane jest w stanie ustalonym sinusoidalnie zmiennym. Szukaną funkcją pola elektromagnetycznego jest potencjał wektorowy. W pracy sformułowano równania różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w poszczególnych ośrodkach oraz warunki na brzegach obszarów i w nieskończoności. Zaproponowano również sposób rozwiązania tych równań wyprowadzając odpowiednio wzory całkowe. Po uwzględnieniu wyników prac [9], [10], [11], [12], [13] stwierdzono, że wzory te spełniają równania różniczkowe w przestrzeni oraz odpowiednio warunki graniczne.

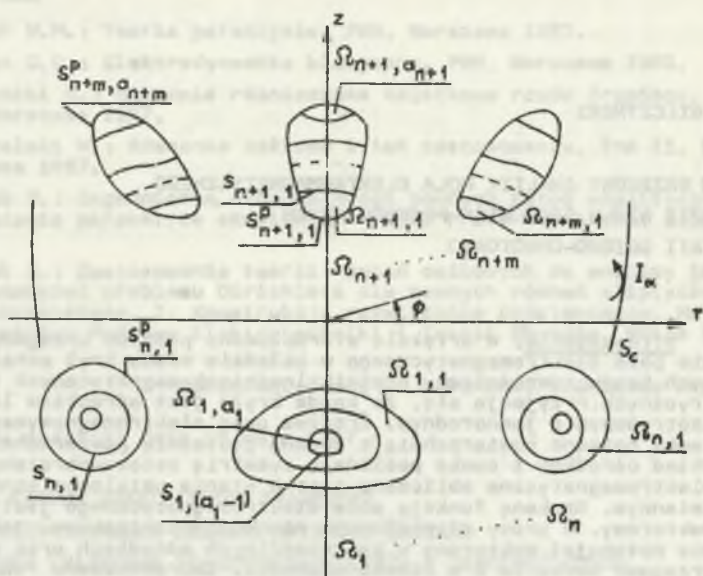
## 1. Wstęp

Niniejsza praca jest próbą rozszerzenia tematyki artykułów [9], [10], [11], [12]. W wielu zastosowaniach praktycznych mamy do czynienia z obliczaniem rozkładu pola elektromagnetycznego w przestrzeni w układzie wielu brył metalowych o różnych konduktywnościach. Bryły te są równocześnie pod wpływem źródeł pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego. Prąd, kształt i rozkład przestrzenny źródeł pola (cewek) jest znany. Obecnie zostanie sformułowany odpowiedni problem brzegowy.

## 2. Model geometryczny układu rzeczywistego brył metalu

Rzeczywisty układ wielu ośrodków przewodzących o symetrii osiowo-obrotowej opisujemy zbiorem obszarów  $\Omega_k$  (4), (7),  $k = 1, 2, \dots, n+m$  zanurzonych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej (obszar  $\Omega_p \subset R^3$ ) rys. 1. Do opisu punktu można w tym przypadku wprowadzić układ współrzędnych cylindrycznych  $(r, \phi, z)$ .

Rozpatrywany model geometryczny (rys. 1) składa się z  $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+m})$  obszarów  $\Omega_{kj} \subset R^3$  opisujących środowiska przewodzące o różnych



Rys. 1. Model geometryczny układu brył metalu

Fig. 1. Geometrical model of the system of metal blocks

konduktywnościach, przewodnościach elektrycznych i magnetycznych. Elementy  $a_1, a_2, \dots, a_{n+m}$  należą do zbioru liczb naturalnych. Podobszary  $\Omega_{kj}$  zgrupowane są w  $(n+m)$  rozłączonych obszarach  $\Omega_k \subset \mathbb{R}^3$   $k = 1, 2, \dots, n+m$  (rys. 1), tzn.:

$$\bigcap_{k=1}^{n+m} \Omega_k = \emptyset. \quad (1)$$

Obszar  $\Omega_{kj}$  konkretnego środowiska opisany jest literą  $\Omega$  z dwoma indeksami ( $k$ ) i ( $j$ ), z których pierwszy oznacza, że:

$$\Omega_{kj} \subset \Omega_k \quad k = 1, 2, \dots, n+m \quad j = 1, 2, \dots, a_k, \quad (2)$$

a drugi wskazuje kolejny numer środowiska ( $j$ ) w obszarze  $\Omega_k$   $j=1, 2, \dots, a_k$ , tzn.:

$$\Omega_k = \bigcup_{j=1}^{a_k} \Omega_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, n+m. \quad (3)$$

Jak widać z rys. 1, mamy dwa rodzaje obszarów  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+m$ . Pierwszy to obszary

$$\Omega_k, \quad k = n+1, n+2, \dots, n+m \quad (4)$$

zgrupowane w półprzestrzeni  $z > 0$  zarówno jednoczonne (narysowano 1 szt. -  $\Omega_{n+1}$ ) jak i niejednoczonne (narysowano 1 szt. -  $\Omega_{n+m}$ ). Mają tę własność, że podzielone są na "plasterki" podobszarów  $\Omega_{kj}$  w taki sposób, że brzeg  $\partial\Omega_{kj}$  domknięcia  $\bar{\Omega}_{kj} = \Omega_{kj} \cup \partial\Omega_{kj}$  [4] składa się z dwu części:

- powierzchni  $S_{kj}^p$

$$S_{kj}^p = \bar{\Omega}_p \cap \bar{\Omega}_{kj} \quad \begin{matrix} k = n+1, n+2, \dots, n+m \\ j = 1, 2, \dots, a_k \end{matrix} \quad (5)$$

- powierzchni  $S_{kj}$

$$S_{kj} = \bar{\Omega}_{kj} \cap \bar{\Omega}_{k(j+1)} \quad \begin{matrix} k = n+1, n+2, \dots, n+m \\ j = 1, 2, \dots, (a_k - 1) \end{matrix} \quad (6)$$

Drugi rodzaj obszarów

$$\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

zgrupowano w przestrzeni  $z < 0$ . Mają tę własność, że każdy z nich składa się z:

- obszarów  $\Omega_{kj}$  w kształcie toroidów zawartych jeden w drugim (narysowano 1 szt. -  $\Omega_n$ ),
- obszarów jednoczennych  $\Omega_{kj}$  zawartych jeden w drugim (narysowano 1 szt. -  $\Omega_1$ ).

Wprowadzamy następujące oznaczenia części brzegów  $\partial\Omega_{kj}$  domknięć  $\bar{\Omega}_{kj} \cup \partial\Omega_{kj}$  składających się na  $\bar{\Omega}_k$  (7):

- powierzchnie  $S_{k1}^p$

$$S_{k1}^p = \bar{\Omega}_p \cap \bar{\Omega}_{k1} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

- powierzchnie  $S_{kj}$

$$S_{kj} = \bar{\Omega}_{kj} \cap \bar{\Omega}_{k(j+1)} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, (a_k - 1) \end{matrix} \quad (9)$$

Obszary  $\Omega_k$  (4), (7) obu rodzajów zostały rozdzielone półpłaszczyzną  $z = 0$  tylko w celu uzyskania większej przejrzystości opisu. Źródłem pola elektromagnetycznego jest cewka opisana powierzchnią  $S_c$  z zadaną gęsto-

ścią powierzchniową prądu  $I_\alpha$  (rys. 1), będącą polem wektorowym wyłączone o składowej kątowej [9]. Przyjmujemy, że powierzchnia  $S_C$  jest klasy  $C^2$  a funkcja  $I_\alpha$  klasy  $C^0$ .

### 3. Równania pola elektromagnetycznego w ośrodkach przewodzących

W granicach obszaru  $\Omega_{kj}$  (rys. 1) przyjmujemy, że środowisko jest liniowe, izotropowe i jednorodne (ze względu na stałe  $\mu^{kj}$ ,  $\epsilon^{kj}$  - przenikalność magnetyczną i elektryczną,  $\gamma^{kj}$  - konduktywność metalu). Wszystkie parametry pola elektromagnetycznego i stałe materiałowe dotyczące konkretnego ośrodka  $\Omega_{kj}$  będą oznaczone odpowiednią literą z dwoma indeksami  $k, j$  u góry. Równania pola zapisujemy w rachunku tensorowym w układzie kartezjańskim [7]. Rachunek ten dopuszcza wszelkie transformacje liniowe ortogonalne układu współrzędnych (rys. 1). Wskaźniki tensorów będą oznaczone ciągiem małych liter greckich przebiegających wartości 1, 2, 3. Do przedstawienia sumy wartości tensora względem dwu powtarzających się wskaźników wykorzystujemy umowę sumacyjną Einsteina [2], [7].

Rozpatrujemy rozkład pola elektromagnetycznego w stanie ustalonym sinusoidalnie zmiennym [1], [5], [8], [9]. Układ równań Maxwella ma następującą postać:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{\gamma,\beta}^{kj} = -i\omega\mu^{kj} H_\alpha^{kj}, \quad (10)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} H_{\gamma,\beta}^{kj} = i\omega\epsilon^{kj} E_\alpha^{kj}, \quad (11)$$

$$B_{\alpha,\alpha}^{kj} = 0, \quad (12)$$

$$D_{\alpha,\alpha}^{kj} = 0, \quad (13)$$

gdzie  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  - symbol zupełnie antysymetryczny [7].

Równania te uzupełniamy związkami materiałowymi:

$$D_\alpha^{kj} = \epsilon^{kj} E_\alpha^{kj}, \quad (14)$$

$$B_\alpha^{kj} = \mu^{kj} H_\alpha^{kj}, \quad (15)$$

$$J_\alpha^{kj} = \gamma^{kj} E_\alpha^{kj}. \quad (16)$$

Przenikalność elektryczna we wzorze (11) jest liczbą zespoloną:

$$\epsilon^{kj} = -i \frac{1}{\omega} \gamma^{kj}. \quad (17)$$

Powyższe oznacza, że częstotliwość źródła zasilania ograniczona jest od góry warunkiem pomijalnie małej wartości prądu przesunięcia w metalu w porównaniu z prądem przewodzenia, tzn.:

$$\xi^{kj} \ll \frac{1}{\omega} \gamma^{kj}. \quad (18)$$

Wprowadzamy potencjał wektorowy wg wzoru:

$$B_{\alpha}^{kj} = e_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma,\beta}^{kj}. \quad (19)$$

Z równań (10), (15), (19) uzyskuje się wzór na natężenie pola elektrycznego w obszarze  $\Omega_{kj}$ :

$$E_{\alpha}^{kj} = -i\omega A_{\alpha}^{kj} - \frac{k_j}{p_{,\alpha}}. \quad (20)$$

Przypuszczamy, że potencjał wektorowy jest wektorem solenoidalnym:

$$A_{\alpha,\alpha}^{kj} = 0. \quad (21)$$

W obliczeniach pomijamy pole elektrostatyczne, tzn. zakładamy, że potencjał skalarny we wzorze (20) znika:

$$\varphi^{kj} = 0. \quad (22)$$

Podstawiając równania (15), (19), (20), (22) do (11) otrzymujemy równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_{kj}$ :

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\kappa\nu} A_{\nu,\kappa,\beta}^{kj} = \omega^2 \varepsilon^{kj\mu} k_j A_{\alpha}^{kj}. \quad (23)$$

Po uwzględnieniu wzoru na zwężony iloczyn dwu tensorów  $e$  [2], [7]:

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\kappa\nu} = \delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\kappa}. \quad (24)$$

gdzie  $\delta_{\alpha\beta}$  - delta Kroneckera [7],

można dokonać nasunięcia tensora (24) na  $A_{\nu,\kappa,\beta}^{kj}$ .

Ostatecznie równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_{kj}$   $k = 1, 2, \dots, n+m$ ,  $j = 1, 2, \dots, a_k$ , przyjmie postać:

$$A_{\alpha,\beta,\beta}^{kj} + (p^{kj})^2 A_{\alpha}^{kj} = 0, \quad (25)$$

gdzie  $(p^{kj})^2 = -i\omega\mu^{kj}\psi^{kj}$  - po uwzględnieniu wzoru (17).

Poszukujemy rozwiązania układu równań (21), (25), jakie spełnia potencjał wektorowy w ośrodkach przewodzących (obszar  $\Omega_{kj}$ ). Przyjmujemy, że rozwiązanie takie istnieje w postaci wyrażań całkowych wynikających z wektorowego symetrycznego wzoru Greensa:

$$\int_{\Omega} (F_{\alpha} A_{\beta, \alpha, \beta} - F_{\alpha} A_{\alpha, \beta, \beta} - A_{\gamma} F_{\delta, \gamma, \delta} + A_{\gamma} F_{\gamma, \delta, \delta}) dv = \\ = \int_{\partial\Omega} (A_{\beta} F_{\beta, \alpha} - A_{\beta} F_{\alpha, \beta} - F_{\kappa} A_{\kappa, \alpha} + F_{\kappa} A_{\alpha, \kappa}) n_{\alpha} ds, \quad (26)$$

gdzie:

$\Omega$  - obszar wraz z brzegiem dyfeomorficzny z kulą domkniętą,

$\partial\Omega$  - brzeg obszaru,

$A_{\alpha}$  - potencjał wektorowy wg wzoru (19) (funkcja klasy  $C^2$ ),

$F_{\alpha}$  - dowolna funkcja wektorowa klasy  $C^2$ ,

$n_{\alpha}$  - ciągle pole wektorów jednostkowych określonych na  $\partial\Omega$  normalnych do  $\partial\Omega$ , skierowanych na zewnątrz obszaru  $\Omega$ .

W literaturze symetryczny wektorowy wzór Greena podawany jest w symbolice wektorowej [1]. Po wprowadzeniu zapisu tensorowego i uwzględnieniu zależności (24) wzór ten przyjmuje postać (26). Zakładamy, że funkcje  $A_{\alpha}$  i  $F_{\alpha}$  określone są w domknięciu  $\bar{\Omega}$ . Potencjał wektorowy  $A_{\alpha}$  w tożsamości (26) spełnia równania (21), (25) oraz

$$A_{\alpha}^{kj} n_{\alpha} = 0 \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n+m \\ j = 1, 2, \dots, a_k \end{matrix} \quad (27)$$

a funkcja  $F_{\alpha}$  inna dla każdego ośrodka ma postać:

$$F_{\alpha} = W_{\alpha} \left( \frac{e^{-ip^{kj}r}}{r} \right)_{(x, y)}, \quad (28)$$

gdzie:

$W_{\alpha}$  - stałe pole wektorowe,

$x \in \Omega_{kj}$  - ustalony punkt obszaru  $\Omega_{kj}$ ,

$y \in \bar{\Omega}_{kj}$  - punkt całkowania,

$r$  - odległość punktów  $x$  i  $y$ ,

$p^{kj}$  - stała występująca we wzorze (25).

Zakładamy, że potencjał wektorowy  $A_\alpha$  (19) jest wektorem wyłącznie o składowej kątowej. Wzór (26) można zastosować do podobszaru  $\Omega_{(n+1)j} \subset \Omega_{n+1}$  (rys. 1, obszary wraz z brzegiem dyfeomorficzne z kulą domkniętą).

Postępując podobnie jak w pracach [1], [11] uzyskujemy ze wzoru (26) wyrażenie całkowe na potencjał wektorowy w obszarach  $\Omega_{(n+1)j} \subset \Omega_{n+1}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+1}$  (rys. 1):

$$A_\alpha^{kj}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_{kj}} \left[ M_{\alpha\beta}^{kj}(y) v_{,\beta}^{kj}(x,y) + N_\alpha^{kj}(y) v^{kj}(x,y) \right] dS(y), \quad (29)$$

gdzie:

$$M_{\alpha\beta}^{kj}(y) = A_\beta^{kj}(y) n_\alpha(y) - A_\alpha^{kj}(y) n_\beta(y) \quad (30)$$

$$N_\alpha^{kj}(y) = \left[ A_{\alpha,\gamma}^{kj}(y) - A_{\gamma,\alpha}^{kj}(y) \right] n_\gamma(y), \quad (31)$$

$$v^{kj}(x,y) = \frac{1}{r} e^{-ip^{kj}r}, \quad (32)$$

$$k = n+1, \quad j = 1, 2, \dots, d_k.$$

Dla tensora  $M_{\alpha\beta}$  (30) przyjmujemy nazwę gęstości warstwy podwójnej prądu (ze względu na jego związek z wielkościami  $L_{||}$  i  $L_{\perp}$  wprowadzonymi w pracy [11]). Wektor  $N_\alpha$  (31) jest identyczny z gęstością warstwy pojedynczej prądu  $N$  wprowadzoną w pracy [9]. Zakładamy, że pola tensorowe (30), (31) są wielkościami zespolonymi klasy  $C^0$ , określonymi na powierzchni  $\partial\Omega_{(n+1)j}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+1}$ . Przyjęte nazwy tych funkcji łączą się z ich interpretacją fizyczną.

Do obszarów  $\Omega_{kj} \subset \Omega_1 \cup \Omega_n \cup \Omega_{n+m}$   $k = 1, n, n+m$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, a_k$  (rys. 1) nie można bezpośrednio zastosować wzoru (26).

Wytnijmy z obszaru  $\Omega_{n+m}$  (rys. 1) część przestrzeni zawartą między półpłaszczyznami  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Uzyskamy obszar

$$\Omega'_{n+m} = \bigcup_{j=1}^{a_{n+m}} \Omega'_{(n+m)j} \quad j = 1, 2, \dots, a_{n+m}, \quad (33)$$

składający się z domknięć  $\bar{\Omega}'_{(n+m)j} \subset \bar{\Omega}_{(n+m)j}$  dyfeomorficznych z kulą domkniętą (z wyjątkiem pewnych krzywych leżących na półpłaszczyznach  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \varepsilon$ ). Do obszarów  $\Omega'_{(n+m)j}$  (33) można zastosować wzór Greena (26). Uzyskamy wyrażenie podobne do wzoru (29). Występują w nim:

- całki w gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_\alpha$  (31) liczone na częściach  $S_0 \subset \partial\Omega'_{(n+m)j}$ ,  $S_\varepsilon \subset \partial\Omega'_{(n+m)j}$  brzegu  $\partial\Omega'_{(n+m)j}$  leżących na półpłaszczyznach  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \varepsilon$ .

- całka  $A_{\alpha}^{kj}$  z gęstości  $\mathcal{K}$  [1]

$$A_{\alpha}^{kj}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0 \cup S_{\xi}} \overline{\mathcal{K}^{kj}}(y) v_{,\alpha}^{kj}(x,y) dS, \quad (34)$$

gdzie

$$\overline{\mathcal{K}^{kj}}(y) = A_{\beta}^{kj}(y) n_{\beta}(y) \quad (35)$$

$v_{,\alpha}^{kj}(x,y)$  - funkcja (32)

$$k = n+m, j = 1, 2, \dots, a_{n+m},$$

- wyrażenie postaci (29) z płata  $\partial\Omega'_{(n+m)j} = S_0 \cup S_{\xi}$ .

Rozpatrzmy całki z gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_{\alpha}$  (31),  $\mathcal{K}$  (35) po powierzchni  $S_0 \cup S_{\xi}$ . Liczymy je w punkcie  $x \in \Omega'_{(n+m)j}$  przy zdeżeniu parametru  $\xi$  do zera. Wychodząc z punktu całkowania  $y_0 \in S_0$  w kierunku wektora  $n_{\alpha}$  (26) do punktu  $y_{\xi} \in S_{\xi}$  można zauważyć (dla  $\xi \rightarrow 0$ ) że:

- gęstości  $N_{\alpha}(y_0)$ ,  $\mathcal{K}(y_0)$  zmieniają znak w stosunku do  $N_{\alpha}(y_{\xi})$  i  $\mathcal{K}(y_{\xi})$  (zmiana znaku wektora  $n_{\alpha}$ ),

- wielkość  $M_{\alpha\beta}$  znika na  $S_0 \cup S_{\xi}$

$$M_{\alpha\beta}(y_{\xi}) = M_{\alpha\beta}(y_0) = 0$$

- funkcje  $v$  (32) oraz  $v_{,\alpha}$  zachowują ciągłość.

W granicy dla  $\xi = 0$  całka po powierzchni  $S_0 \cup S_{\xi}$  z gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_{\alpha}$  (31),  $\mathcal{K}$  (35) jest równa zeru. Dla  $\xi = 0$  obszar  $\Omega'_{(n+m)j}$  (33) pokrywa się z obszarem  $\Omega_{(n+m)j} \subset \Omega_{(n+m)}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+m}$  (rys. 1). Do obliczenia rozkładu potencjału wektorowego wewnątrz obszaru  $\Omega_{(n+m)j}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+m}$  (rys. 1) można więc wykorzystać wzór (29).

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku obszaru  $\Omega_1$  (rys. 1). Obszar ten należy przeciąć płaszczyzną (c) o równaniu  $z = \text{const}$ . Wszystkie podobezary  $\Omega_{1j}$   $j = 1, 2, \dots, a_1$  zostaną podzielone na dwie części, będące wraz z brzegiem obrazami kuli domkniętej. Odwzorowanie to będzie dyfeomorfizmem z wyjątkiem pewnych krzywych leżących na płaszczyźnie (c) [6]. Do takiej części obszaru  $\Omega_{1j}$  wolno zastosować wzór Greena (26). Można udowodnić, że całki z gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_{\alpha}$  (31),  $\mathcal{K}$  (35), liczone po części brzegu leżącej na płaszczyźnie (c) w punkcie  $x \in \Omega_{1j}$ , są równe zeru.

Powyższe wynika z faktu, że gęstość  $\mathcal{K}$  (35) znika na (c), a funkcje  $M_{\alpha\beta}$  i  $N_{\alpha}$  zmieniają znak w zależności od tego, czy całki są liczone z jednej lub z drugiej strony powierzchni (c). W konsekwencji wyrażenie całkowe podające rozkład potencjału wektorowego w obszarze  $\Omega_{1j} \subset \Omega_1$   $j = 1, 2, \dots, a_1$  (rys. 1) ma postać wzoru (29) dla indeksu  $k = 1$ .



Aby można było zastosować wzór Greena (26) do obszaru  $\Omega_n$  (rys. 1) należy postąpić podobnie jak w przypadku obszarów  $\Omega_1$  i  $\Omega_{n+m}$ . Obszar  $\Omega_n$  przecinamy równocześnie płaszczyzną ( $c$ ) ( $z = \text{const}$ ) oraz półpłaszczyznami o równaniach  $\Phi = 0$  i  $\Phi = \varepsilon$ . Uwzględniając tok rozumowania przeprowadzony dla obszarów  $\Omega_1$  i  $\Omega_{n+m}$  dochodzimy do wniosku, że również w obszarach  $\Omega_{nj} \subset \Omega_n$ ,  $j = 1, 2, \dots, a_n$  (rys. 1) rozkład potencjału wektorowego określa wyrażenie całkowe (29) dla  $k = n$ ,  $j = 1, 2, \dots, a_n$ .

#### 4. Równania pola elektromagnetycznego w przestrzeni powietrznej

Przestrzeń powietrzną opisujemy obszarem nieograniczonym  $\Omega_p \subset R^3$ . Równania Maxwella (10), (11), (12), (13) i wzory (14), (15) obowiązują również w przestrzeni powietrznej dla przenikalności próżni  $\varepsilon_0$  i  $\mu_0$ . Po wprowadzeniu potencjału wektorowego wg definicji (19) i uwzględnieniu równań Maxwella można uzyskać równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_p$ . Równanie to jest identyczne ze wzorem (25), przy czym zakładamy, że:

$$\rho^2 = 0. \quad (36)$$

Warunek (36) jest słuszny w pobliżu układu promieniującego fale elektromagnetyczną w przypadku, gdy jej długość znacznie przewyższa rozmiary układu. Równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_p$ , przyjmie postać:

$$\Delta_{\alpha} A_{\alpha} = 0. \quad (37)$$

Poszukujemy wyrażenia całkowego na potencjał wektorowy  $A_{\alpha}$ , spełniającego w obszarze  $\Omega_p$  (rys. 1) równania (37), (21). Postępujemy podobnie jak w punkcie poprzednim. Rozpatrywany obszar  $\Omega_p$  nie jest jednoznaczny. Można go podzielić na podobezary dyfeomorficzne z kulą (płaszczyznami  $z = \text{const}$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \varepsilon$ ) i zastosować podobne rozumowanie jak w przypadku obszarów  $\Omega_1, \Omega_n, \Omega_{n+m}$ , eliminując całki po powierzchni  $z = \text{const}$ ,  $\Phi = 0$  dla  $\varepsilon = 0$ .

Potencjał wektorowy  $A_{\alpha}^c$  od powierzchni opisujących cewkę  $S_c$  obliczamy identycznie jak w pracy [9]:

$$A_{\alpha}^c(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_c} I_{\alpha}(y) \frac{1}{r(x,y)} dS(y), \quad (38)$$

gdzie  $x \in \Omega_p$ ,  $y \in S_c$ ,

$I_{\alpha}$  - gęstość powierzchniowa prądu.

W artykule [9] dokonano oszacowania zachowania się potencjału wektorowego i indukcji elektromagnetycznej w nieskończoności:

$$A_\alpha \in O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad (39)$$

$$\partial_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma,\beta} \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad (40)$$

Uwzględniając te wyniki uzyskujemy wyrażenie całkowe na potencjał wektorowy  $A_\alpha$  w obszarze  $\Omega_p$  [9]:

$$A_\alpha(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\partial\Omega_p} \left[ M_{\alpha\beta}(y) \left(\frac{1}{r(x,y)}\right)_{,\beta} + N_\alpha(y) \left(\frac{1}{r(x,y)}\right) \right] dS(y) + A_\alpha^c(x) \quad (41)$$

gdzie:

$M_{\alpha\beta}$ ,  $N_\alpha$  - funkcje odpowiednio (30), (31) określone na powierzchni  $\partial\Omega_p$ ,  
 $r$  - odległość punktów  $x \in \Omega_p$  i  $y \in \partial\Omega_p$ ,

$$\partial\Omega_p = \left[ \bigcup_{k=n+1}^{n+m} \left( \bigcup_{j=1}^{a_k} S_{kj}^p \right) \right] \cup \left( \bigcup_{k=1}^n S_{k1}^p \right) - \text{zbiór} \quad (42)$$

utworzony z powierzchni  $S_{kj}^p$  (5), (8),

$A_\alpha^c$  - funkcja (38).

## 5. Sformułowanie problemu brzegowego

Zakładamy, że na powierzchniach rozdziału ośrodków  $S_{kj}^p$  (5), (8) i  $S_{kj}$  (6), (9) gęstości prądów i ładunków są równe zero. Definiujemy granice jednostronne wartości natężenia pola elektrycznego, magnetycznego, potencjału wektorowego oraz wektora  $N_\alpha$  (31) na powierzchniach określonych wzorami (5), (6), (7), (8):

${}^1_{E_{\alpha kj}}$ ,  ${}^1_{H_{\alpha kj}}$ ,  ${}^1_{A_{\alpha kj}}$ ,  ${}^1_{N_{\alpha kj}}$  - granice jednostronne w metalu dotyczące ośrodka opisanego obszarem  $\Omega_{kj}$  w punkcie  $y \in \partial\Omega_{kj}$  (dla obszaru  $\Omega_{k(j+1)}$  wszystkie wielkości oznaczamy cyfrą 2 nad literą),

${}^2_{E_{\alpha kj}}$ ,  ${}^2_{H_{\alpha kj}}$ ,  ${}^2_{A_{\alpha kj}}$ ,  ${}^2_{N_{\alpha kj}}$  - granice jednostronne w obszarze  $\Omega_p$  w punkcie  $y \in \partial\Omega_p$  (42).

Wektor  $N_\alpha$  (31) określamy w pobliżu brzegu  $\partial\Omega$  (powierzchnia klasy  $C_2$ ) poprzez:

- zbudowanie odpowiedniego układu współrzędnych dla otoczenia punktów powierzchni  $\partial\Omega$ ,
- rozpropagowanie wektora  $n_\alpha$  w tym otoczeniu,
- zdefiniowanie wektora  $N_\alpha$  (31) w przestrzeni.

Mamy następujące zależności zachodzące dla punktu  $y \in S_{kj}$  (wzory (6), (9)):

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (E_\gamma^{1kj} - E_\gamma^{2k(j+1)}) = 0, \quad (43)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (H_\gamma^{1kj} - H_\gamma^{2k(j+1)}) = 0, \quad (44)$$

$$n_\alpha (\epsilon^{kj} E_\alpha^{1kj} - \epsilon^{k(j+1)} E_\alpha^{2k(j+1)}) = 0, \quad (45)$$

$$n_\alpha (\mu^{kj} H_\alpha^{1kj} - \mu^{k(j+1)} H_\alpha^{2k(j+1)}) = 0, \quad (46)$$

gdzie  $n_\alpha$  - pole wektorów jednostkowych normalnych do  $S_{kj}$  (6), (9) skierowanych na zewnątrz obszaru  $\Omega_{kj}$

$$k = 1, 2, \dots, n+m \quad j = 1, 2, \dots, (a_k - 1).$$

Analogicznie dla punktu  $y \in S_{kj}^p$  (wzory (5), (8)):

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (E_\gamma^2 - E_\gamma^{1kj}) = 0, \quad (47)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (H_\gamma^2 - H_\gamma^{1kj}) = 0, \quad (48)$$

$$n_\alpha (\epsilon_0 E_\alpha^2 - \epsilon^{kj} E_\alpha^{1kj}) = 0, \quad (49)$$

$$n_\alpha (\mu_0 H_\alpha^2 - \mu^{kj} H_\alpha^{1kj}) = 0, \quad (50)$$

gdzie  $n_\alpha$  - pole wektorów jednostkowych normalnych do  $\Omega_p$  skierowanych na zewnątrz obszaru  $\Omega_p$ .

Dla płatów  $S_{k1}^p$  (8) indeksy  $k, j$  we wzorach (47), (48), (49), (50) przyjmują wartości  $k = 1, 2, \dots, n, j = 1$ , natomiast dla powierzchni  $S_{kj}^p$  (5)  $k = n+1, \dots, n+m, j = 1, 2, \dots, a_k$ .

Warunki graniczne (45), (49) spełniane są tożsamościowo (prostokątność wektorów  $n_\alpha$  i  $E_\alpha$ ). W dowodzie jednoznaczności postawionego problemu brzegowego (kolejna publikacja) będziemy korzystać z warunków (43), (44), (47), (48). Pozostałe równania (46), (50) niepotrzebne w dowodzie jednoznaczności można pominąć w sformułowaniu problemu brzegowego [1].

Podstawiamy równania (15), (19) do warunków (44), (48) oraz równania (20), (22) do (43), (47). Otrzymujemy warunki graniczne, jakie spełnia potencjał wektorowy dla punktu  $y \in S_{kj}$  (6), (9):

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} (A_{\gamma}^{1kj} - A_{\gamma}^{2k(j+1)}) = 0, \quad (51)$$

$$\frac{1}{\mu^{kj}} N_{\alpha}^{1kj} - \frac{1}{\mu^{k(j+1)}} N_{\alpha}^{2k(j+1)} = 0 \quad (52)$$

oraz dla punktu  $y \in S_{kj}^p$  (5), (8)

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} (A_{\gamma}^2 - A_{\gamma}^{1kj}) = 0, \quad (53)$$

$$\frac{1}{\mu^0} N_{\alpha}^2 - \frac{1}{\mu^{kj}} N_{\alpha}^{1kj} = 0. \quad (54)$$

Analogiczne warunki spełnienia potencjał wektorowy na powierzchni cewki [9]:

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} (A_{\gamma}^1 - A_{\gamma}^2) = 0, \quad (55)$$

$$N_{\alpha}^1 - N_{\alpha}^2 = 0, \quad (56)$$

gdzie  $A_{\alpha}^1, A_{\alpha}^2, N_{\alpha}^1, N_{\alpha}^2$  - granice jednostronne wartości potencjału wektorowego i wektora  $N_{\alpha}$  obliczane z jednej lub drugiej strony cewki (cyfra 1 lub 2),  $n_{\alpha}$  - pole wektorów jednostkowych, normalnych określonych na  $S_{\alpha}$ .

Obecnie możemy przystąpić do sformułowania problemu brzegowego. Poszukujemy rozwiązania potencjału wektorowego  $A_{\alpha}$  w przestrzeni (rys. 1), który spełnia:

- w nieskończoności warunki (39), (40),
- na powierzchni cewki równania (55), (56),
- na brzegach ośrodków przewodzących warunki graniczne (51), (52), (53), (54),
- równania (25), (21) wewnątrz ośrodków przewodzących oraz (37), (21) w przestrzeni powietrznej.

W celu rozwiązania postawionego problemu brzegowego wyprowadzono wzory całkowe (29), (41) określające rozkład potencjału wektorowego w całej przestrzeni. Uwzględniając wyniki prac [9], [10], [11], [12], [13] można stwierdzić, że wyrażenia (29), (41) spełniają:

- w całej przestrzeni równania (25), (37), (21) [10],
- na powierzchni cewki warunki (55), (56) [11],
- warunek symetrii osiowo-obrotowej rozkładu potencjału wektorowego w przestrzeni [13],

- w nieskończoności warunki (39), (40) [9],
- na brzegach ośrodków warunki graniczne (51), (52), (53), (54) [13].

## 6. Wnioski

Wyrażenia całkowe (29), (41) spełniają wszystkie postulaty postawione-go problemu brzegowego. Nie stanowią jednak poszukiwanego rozwiązania dopóki nie znamy funkcji podcałkowych  $M_{\alpha\beta}$  i  $N_{\alpha}$ . Gęstości  $M_{\alpha\beta}$  i  $N_{\alpha}$  można będzie obliczyć z odpowiedniego układu równań całkowych zapisanego na brzegach ośrodków przewodzących [4], [5], [8], [12], [13].

Dowód iatnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego oraz eksperymenty numeryczne testujące algorytm takich obliczeń są obeszernymi i czasochłonnymi zagadnieniami. Dopiero po uporaniu się z nimi (w kolejnych publikacjach) metodę można by uznać za opracowaną. Byłaby przydatna szczególnie w układzie brył o różnych konduktywnościach. Ciekawym zastosowaniem może być przypadek nagrzewania indukcyjnego, w trakcie którego poszczególne części bryły metalu różnią się znacznie konduktywnością i przenikalnością magnetyczną (np. ferromagnetyk tak nagrany, że warstwy powierzchniowe znajdują się powyżej punktu Curie, a wewnątrz poniżej tego punktu). Nagrzewanie się ekranu lub obudowy urządzenia łącznie z ośrodkiem nagrzewanym (wsadem) może być traktowane jako jeden problem obliczeniowy. Bryłę metalu o nieliniowej charakterystyce magnesowania  $B = f(H)$  można podzielić na podobezary, w granicach których przyjmujemy stałe wartości przenikalności magnetycznej. Obliczenie takiego układu wg proponowanej metody jest stosunkowo nieskomplikowanym i dokładnym sposobem rozwiązywania pola elektromagnetycznego w ośrodkach nieliniowych. W tym przypadku podział bryły metalu na podobezary byłby zależny od kształtu cewki (rozkładu źródeł pola elektromagnetycznego) i wielkości prądu cewki.

## LITERATURA

- [1] Bochenek K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa 1961.
- [2] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
- [3] Jackson J.D.: Elektrodynamika klasyczna. PWN, Warszawa 1982.
- [4] Marcinkowska H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1972.
- [5] Müller C.: Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen, Springer Verlag Berlin 1957.
- [6] Sikoraki R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych. PWN, Warszawa 1977.
- [7] Suffczyński M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.
- [8] Tozoní O.V., Maergoiz I.D.: Raeczet trechmernych elektromagnitnyh polej. Kijów 1974.

- [9] Wilczyński E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka, z.75, Gliwice 1981.
- [10] Wilczyński E.: Potencjał wektorowy na granicy środowiska powietrza i przewodnika metalowego, dyskusja poprawności postawionego problemu brzegowego. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka z. 75, Gliwice 1981.
- [11] Wilczyński E.: Zagadnienie istnienia rozwiązania problemu brzegowego analizy pola elektromagnetycznego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka, z. 75, Gliwice 1981.
- [12] Wilczyński E.: Zastosowanie metody równań całkowych do wyznaczania parametrów elektromagnetycznych układu cewka - walec przewodzący, IX SPETO Gliwice-Wisła 1986.
- [13] Wilczyński E.: Analiza pola magnetycznego w układzie bryła metalu - powietrze. Rozprawa doktorska, Pol. Śl. Gliwice 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ПРОБЛЕМА КРАЕВОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В СИСТЕМЕ РАЗНЫХ ПРОВОДЯЩИХ  
СРЕД ИМЕЮЩИХ ВРАЩАТЕЛЬНУЮ - ОСЕВУЮ СИММЕТРИЮ

Р е з ю м е

В работе сформулирована краевая задача расчета электромагнитного поля в системе кусок металла с разными проводимостями, электрическими и магнитными проницаемостями. Предполагается, что каждый кусок является линейной изотропной и однородной средой. Источником электромагнитного поля является катушка (поверхность с определенной плотностью токов). Система сред и катушка имеют вращательно-осевую симметрию. Электромагнитное поле рассчитывается для синусоидальных переменных токов. Векторный потенциал является искомой функцией электромагнитного поля. В работе сформулированы дифференциальные уравнения, которые удовлетворяют векторному потенциалу в каждой среде, условиям на краю области и в бесконечности. В статье предложено решение этих уравнений после вывода соответствующих интегральных формул. Принимая итоги работ [9], [10], [11], [12], [13] установлены формулы удовлетворяющие дифференциальным уравнениям в пространстве соответствующим условиям.

BOUNDARY PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD  
ANALYSIS IN A SYSTEM OF MANY CONDUCTING  
MEDIA WITH AXIAL-ROTATIONAL SYMMETRY

S u m m a r y

The boundary problem of calculating the electromagnetic field in the system of many metal blocks of various conductivities, magnetic permeabilities and permittivities has been formulated in the paper. It is assumed that every block is a linear, isotropic and homogenous medium. The coil described by the surface with a given surface current density is a source of the electromagnetic field. The system of media and the coil have an axial - rotational symmetry. The electromagnetic field is calculated in the sinusoidal steady state. Vector potential constitutes the function of the electromagnetic field being looked for. The paper formulates the differential equations that are followed by the vector potential in particular media as well as conditions on the boundaries of the areas and in the infinity. The way of solving these equations has been also suggested by deriving special integral formulae.

Having taken the results of papers [9], [10], [11], [12], [13] into account, it has been stated that these formulae satisfy the integral equations in a space and adequate boundary conditions.