ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: BUDOWNICTWO z. 60 Nr kol. 841

Stanisław KEMPNY

PODSTAWY KOMPUTEROWEJ ANALIZY STATYCZNEJ PŁASKICH USTROJÓW PRĘTOWYCH Z JEDNOSTRONNYMI WIĘZAMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwa sposoby obliczania ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami metodę przemieszczeń. Zagadnienie sprowadzono do poszukiwania rozwiązania dopuszczalnego programowania liniowego.

1. WSTĘP

Do ustrojów z jednostronnymi więzami można zaliczyć ustroje posiadające elementy charakteryzujące się znaczną sztywnością w pewnych kierunkach i równocześnie znikomą w kierunkach przeciwnych. Są to np. ustroje wyposażone w wiotkie pręty, cięgna bądź połączenia pracujące w pewnym kierunku. Z zagadnieniami statyki ustrojów z jednostronnymi więzami spotykamy się przy obliczaniu ustrojów cięgnowych, prętowo-cięgnowych, a także w zagadnieniach kontaktowych, np. ławy fundamentowej lub płyty fundamentowej z podłożem gruntowym na terenach podlegających wpływom eksploatacji górniczej.

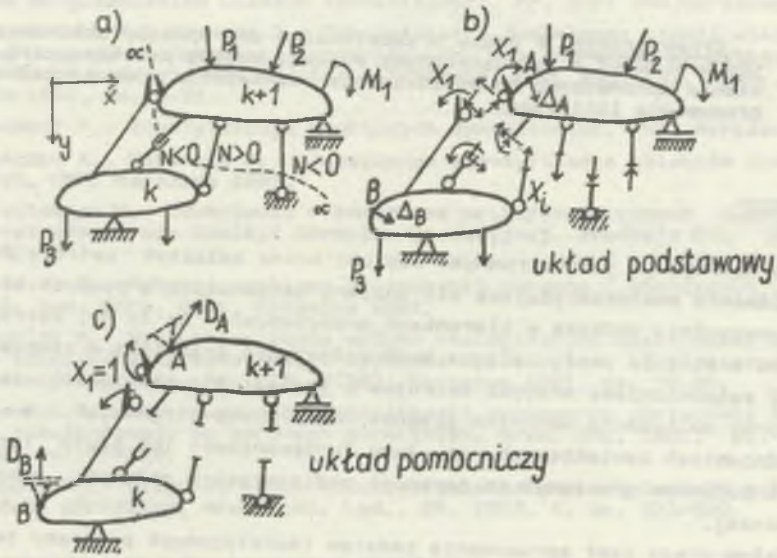
Celem pracy jest opracowanie podstaw teoretycznych programu tworzącego i rozwiązującego równania kanoniczne ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami. Równania kanoniczne ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami można uzyskać, stosując metodę sił, metodę przemieszczeń w ujęciu klasycznym, a także wariant metody przemieszczeń stosowany w programach komputerowych. W pracy [3] do uzyskania równań kanonicznych ustrojów z jednostronnymi więzami wykorzystano metodę sił. W niniejszej pracy do tworzenia tych równań wykorzystano metodę przemieszczeń.

W pracy [1] podano metody sił i przemieszczeń dla ustrojów z jednostronnymi więzami, a także sprowadzono obliczanie tych ustrojów do zadania programowania kwadratowego. W pracy [2] zaproponowano rozwiązywanie równań ustrojów z jednostronnymi więzami metodę prób.

2. TWORZENIE RÓWNAŃ KANONICZNYCH USTROJÓW Z JEDNOSTRONNYMI WIĘZAMI KLASYCZNĄ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

W wariancie klasycznym metody przemieszczeń każdy krok toku postępowania, ma swój odpowiednik w toku postępowania metody sił:

a) Metoda sił - układ podstawowy otrzymujemy przez przecięcie więzów uznanych za nadliczbowe m.in. jednostronnych i zastępienie ich siłami które mogą być przez te więzy przeniesione (rys. 1b). Metoda przemieszczeń - układ podstawowy metody przemieszczeń otrzymujemy przez dodanie więzów m.in. uzupełniając więzy jednostronne do dwustronnych. Niewiadome przemieszczenia w miejscach występowania więzów jednostronnych przyjmuje się o kierunkach nieograniczonych przez dodane fikcyjne więzy jednostronne $Z_1 \ldots Z_i$ na rys. 2a.

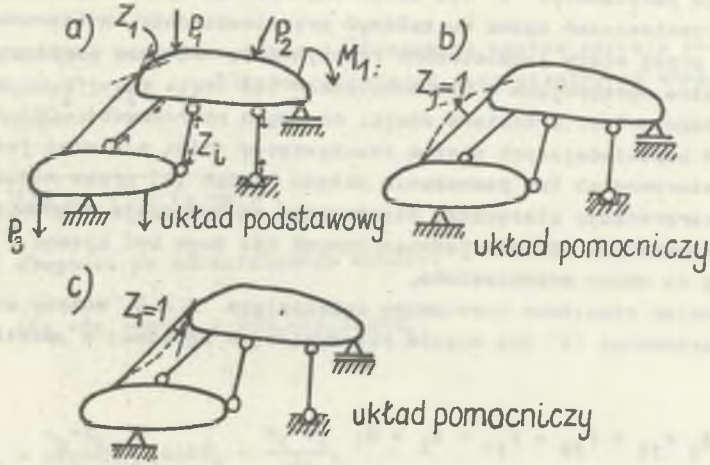


Rys. 1

b) Metoda sił - posługując się układami pomocniczymi z siłami jednostkowymi, działającymi kolejno w miejscach występowania więzów jednostronnych i o kierunkach pracy więzów (rys. 1c), dochodzimy do równań kanonicznych ustrojów z jednostronnymi więzami, czy to z zasady wzajemności prac Bettiego, czy też z warunku na nieujemne wartości przemieszczeń w usuniętych więzach jednostronnych ustroju podstawowego [3] dla i,j = 1,2...n

$$\Sigma X_i \delta_{ji} + \Delta_{jp} + \Delta_{jT} - \Sigma D \cdot \Delta \geqslant 0. \qquad (1)$$

Metoda przemieszczeń - posługując się układami pomocniczymi z wymuszonymi przemieszczeniami jednostkowymi, kolejno w miejscach wprowadzonych więzów fikcyjnych, o kierunkach nieograniczonych przez te więzy (rys. 2b), dochodzimy do równań kanonicznych ustrojów z jednostronnymi



Rys. 2

więzami, czy to z zasady wzajemności prac Bettiego, czy też z warunku na niedodatnie wartości sił w dodatkowych więzach jednostronnych ustroju podstawowego (dodatkowe więzy nie pracują) dla $i,j = 1,2,...n$

$$\sum Z_i r_{ji} + r_{jp} + r_{jT} \leq 0, \tag{2}$$

gdzie:

X_i - siły w przeciętych więzach m.in. jednostronnych,

δ_{ji} - przemieszczenia w układach pomocniczych jednostkowych,

Δ_{jp}, Δ_{jT} - przemieszczenia w układzie pomocniczym od obciążeń i wpływów występujących w układzie rzeczywistym,

D - siły w dodatkowych podporach w układach pomocniczych zapewniających ich geometryczną niezmienność,

Δ - przemieszczenia w układach podstawowym i rzeczywistym w miejscu dodatkowych podpór jw.,

Z_i - przemieszczenia w układzie podstawowym m.in. w miejscu dodatkowych więzów, w kierunku nieograniczonym przez te więzy,

r_{ji} - reakcje w układach pomocniczych jednostkowych w dodatkowych więzach,

r_{jp}, r_{jr} - reakcje w dodatkowych więzach w układzie pomocniczym od obciążeń i wpływów występujących w układzie rzeczywistym

Liczba równań (1) i (2) pokrywa się z liczbą niewiadomych sił lub przemieszczeń. W równaniach tych siły w jednostronnych więzach oraz przemieszczenia nieograniczone przez te więzy muszą być nieujemne, czyli

$$X_i \geq 0, \quad Z_i \geq 0, \quad \text{dla} \quad i = 1,2,...n$$

W układzie podstawowym i tym samym odpowiednio w układach pomocniczych metody przemieszczeń można by założyć przemieszczenia w kierunku nieograniczonym przez więzy jednostronne rzeczywiste, wówczas współczynniki i wyrazy wolne występujące w nierównościach (2) (r_{ji}, r_{jo}, r_{jT}) mają takie same wartości, lecz przeciwne znaki. Analogon nierówności (2) dla przemieszczeń odpowiadających więzom rzeczywistym różni się więc jedynie kierunkiem nierówności (po pomnożeniu układu równań (2) przez minus jeden) i ma on interpretację statyczną. Nierówności te oznaczają mianowicie, że siły w rzeczywistych więzach jednostronnych nie mogą być ujemne, tj. mogą być przez te więzy przeniesione.

Przyjmując nieujemne niewiadome osłabiające $X \geq 0$, możemy analogon układu nierówności (2) dla więzów rzeczywistych zapisać w postaci układu równań:

$$\sum Z_i r_{ji} + r_{jp} + r_{jT} - X_i = 0, \tag{3}$$

gdzie X i Z oznaczają odpowiednio wartości sił i przemieszczeń w rzeczywistych więzach m.in. jednostronnych.

Przeprowadzone rozważania doprowadziły do bardzo prostego sposobu tworzenia równań kanonicznych ustrojów z jednostronnymi więzami polegającym na:

1) traktowaniu wszystkich więzów jednostronnych jako dwustronnych, przypisując im w kierunku nieograniczonym przez te więzy te same parametry co w kierunku przeciwnym,
2) obliczeniu elementów macierzy sztywności r_{ji} równań (3) jako wartości sił reakcji wywołanych przemieszczeniami jednostkowymi, wymuszonymi kolejno w kierunku nieograniczonym przez rzeczywiste więzy jednostronne (jak błędami montażowymi lub osiadaniem podpór), (por. rys. 1a i 2c), a wyrazów wolnych r_{jp} i r_{jT} jako wartości sił reakcji w tych więzach od obciążeń i wpływów zewnętrznych. Ustrój pomocniczy służący do wyznaczania współczynników przy niewiadomych Z i wyrazów wolnych równań kanonicznych (3) jest ustrojem pozbawionym jednostronnych więzów, można zatem do ich obliczenia wykorzystywać odpowiednie programy komputerowe.

Układ równań (3) dla przedstawionego sposobu ma tyle równań, ile jest więzów jednostronnych, lecz dwukrotnie więcej niewiadomych (X i Z) - nieujemnych $X \geq 0$ i $Z \geq 0$.

Mamy zatem do czynienia z zagadnieniem poszukiwania rozwiązania dopuszczalnego programowania liniowego [4] z warunkami:

$$Z_i = 0, \quad \text{gdy} \quad X_i > 0,$$

$$X_i = 0, \quad \text{gdy} \quad Z_i > 0.$$

3. WARIANT KOMPUTEROWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Związki pomiędzy przemieszczeniami składowymi węzłów ustroju prętowego a zmianę długości pręta oraz kątem nachylenia jego cięciny po odkształceniu są następujące (rys. 3):

$$l_j = \sqrt{(x_k-x_i)^2 + (y_k-y_i)^2},$$

stąd zmiana długości po odkształceniu wynosi:

$$\delta l_j = (\delta x_k-\delta x_i)\cos\varphi_j + (\delta y_k-\delta y_i)\sin\varphi_j, \tag{4}$$

gdzie

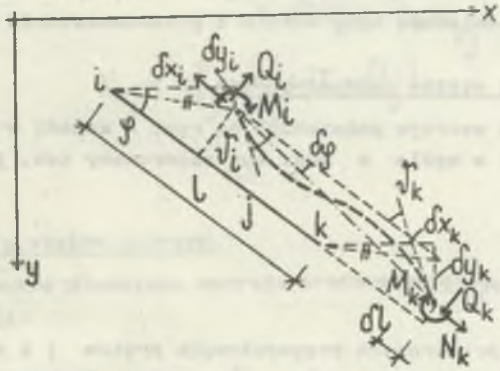
$$\cos\varphi_j = \frac{x_k-x_i}{l_j}, \quad \sin\varphi_j = \frac{y_k-y_i}{l_j},$$

a kąt nachylenia cięciwy do osi pręta przed odkształceniem

$$-\delta\varphi_j\sin\varphi_j = \frac{(\delta x_k-\delta x_i)l_j - (x_k-x_i)\delta l_j}{l_j^2},$$

stąd

$$\delta\varphi_j = \frac{1}{l_j}\left[-(\delta x_k-\delta x_i)\sin\varphi_j + (\delta y_k-\delta y_i)\cos\varphi_j\right] \tag{5}$$



Rys. 3

Momenty w przekrojach przywęzłowych pręta i-k można wyrazić za pomocę kątów obrotu końców prętów ϑ_i, ϑ_k oraz kąta obrotu cięciwy pręta j $\delta\varphi_j$ np. moment na końcu k wynosi:

$$M_{kj} = M_{kj}^P + \frac{EJ_i}{l_j}(c_1\vartheta_k + c_2\vartheta_i - c\delta\varphi_j), \tag{6}$$

gdzie współczynniki c_1, c_2 i c przyjmują wartości 4,2 i 6 dla pręta połączonego w węzłach i,k sztywno, 3,0 i 3 w przypadku przegubu w węzle i. Wyrażenie na siłę poprzeczną na końcu k ma postać:

$$Q_{kj} = Q_{kj}^P - \frac{EJ_i}{l_j^2}\left[c(\vartheta_i + \vartheta_k) - c_3\delta\varphi_j\right], \tag{7}$$

gdzie $c_3 = 12$ dla pręta sztywno połączonego z węzłami i oraz k, $c_3 = 3$ dla pręta przegubowo połączonego w jednym z węzłów. Siłę osiową w pręcie można wyrazić za pomocą wydłużenia δl_j

$$N_{kj} = N_{kj}^P + \frac{EA_i}{l_j}\delta l_j. \tag{8}$$

We wzorach (6-8) siły wewnętrzne M, Q, N z indeksem P oznaczają wartości tych sił od obciążenia pręta.

W wariancie komputerowym metody przemieszczeń nie da się uniknąć konieczności wprowadzenia dodatkowych więzów dwustronnych, gdyż równania transformacyjne (6-8) dotyczą pręta prostego o stałych parametrach geometrycznych przekroju. W związku z tym w równaniach metody przemieszczeń, oprócz przemieszczeń w kierunku nieograniczonym przez więzy jednostronne, pojawiają się niewiadome kąty obrotu i przemieszczenia węzłów ustroju.

3.1. Warunki dla więzów jednostronnych

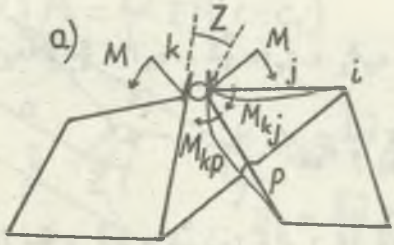
Dla fragmentu ustroju pokazanego na rys. 4 moment w więzi jednostronnej występującej w węźle k musi być skierowany tak, jak to pokazano na rysunku.
Czyli

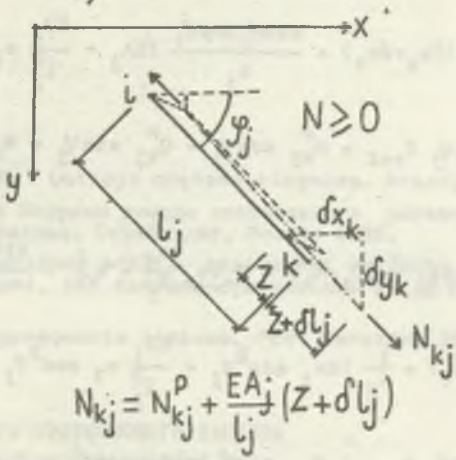
$$M = M_{kj} + M_{kp} \geq 0, \tag{9}$$

gdzie momenty w przekrojach przywęzłowych prętów j i p można wyrazić za pomocę wzoru (6), w którym zamiast ϑ_k należy podstawić $\vartheta_k + Z$.
Jeśli pręt ustroju może przenosić wyłącznie siłę rozciągającą, to wykorzystując równanie (8) można napisać nierówność:

$$N = N^{p}_{kj} + \frac{EA_j}{l_j}(\delta l_j + Z) \geq 0. \tag{10}$$

W nierównościach np. (9 i 10) oprócz ewentualnych przemieszczeń w więzach jednostronnych Z występuję niewiadome kąty obrotu i składowe przemieszczenia węzłów ustroju, które należy wyeliminować dla uzyskanie równań zawierających jako niewiadome wyłącznie przemieszczenia o kierunku nieograniczonym przez więzy jednostronne.





Rys. 4

3.2. Równania dla węzłów ustroju

Dla każdego węzła płaskiego ustroju prętowego muszą być spełnione trzy warunki równowagi:

$$\sum_{(j)} M_{kj} - M_{kw} = 0,$$

$$\sum_{(j)} (N_{kj}\cos\varphi_j - Q_{kj}\sin\varphi_j) - P_{kx} = 0,$$

$$\sum_{(j)} (N_{kj}\sin\varphi_j + Q_{kj}\cos\varphi_j) - P_{ky} = 0,$$

dla $k = 1,2,\ldots n$,

gdzie:

n - oznacza liczbę węzłów ustroju,

M_{kw}, P_{kx}, P_{ky} - siły zewnętrzne działające na węzeł k.

Wykorzystując wzory (4-8), równania te można przekształcić do następującej postaci:

$$\sum_{(j)} \frac{EJ_i}{l_j}\left\{c_1\vartheta_k + c_2\vartheta_i + Z_r\left(c\frac{a_i}{l_j} - c_2\right) + \frac{c}{l_j}\left[(\delta x_k-\delta x_i)\sin\varphi_j-(\delta y_k-\delta y_i).\right.\right.$$

$$\left.\left..\cos\varphi_j\right]\right\} + M^P_{kj} = M_{kw},$$

$$\sum_{(j)} \frac{EJ_i}{l_j^2}\sin\varphi_j\left[c(\vartheta_i+\vartheta_k) + Z_r\left(c_3\frac{a_i}{l_j} - c\right)\right] + \frac{1}{l_j}\left(EA_j\cos^2\varphi_j + \frac{EJ_i}{l_j^2}c_3\right.\cdot$$

$$\left..\sin^2\varphi_j\right)(\delta x_k-\delta x_i) + \frac{\sin\varphi_j\cos\varphi_j}{l_j}\left(EA_j - \frac{EJ_i}{l_j^2}c_3\right)(\delta y_k-\delta y_i) +$$

$$+ \frac{EA_i}{l_j}\cos\varphi_j\, Z_{r+1} + N^P_{kj}\cos\varphi_j - Q^P_{kj}\sin\varphi_j = P_{kx}, \tag{11}$$

$$\sum_{(j)} -\frac{EJ_i}{l_j^2}\cos\varphi_j\left[c(\vartheta_i+\vartheta_k) + Z_r\left(c_3\frac{a_i}{l_j} - c\right)\right] + \frac{\sin\varphi_j\cos\varphi_j}{l_j}\left(EA_j - \frac{EJ_i}{l_j^2}c_3\right).$$

$$.\,(\delta x_k-\delta x_i) + \frac{1}{l_j}\left(EA_j\sin^2\varphi_j + \frac{EJ_i}{l_j^2}c_3\cos^2\varphi_j\right)(\delta y_k-\delta y_i) +$$

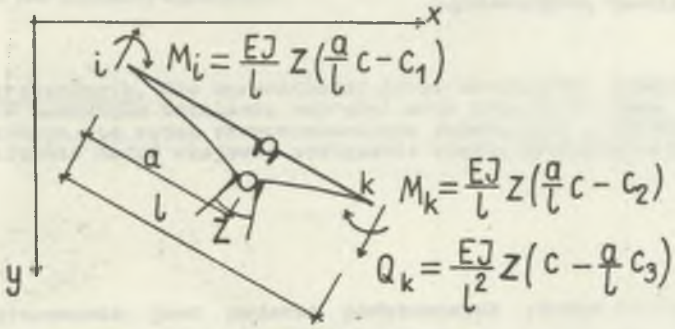
$$+ \frac{EA_i}{l_j}\sin\varphi_j\, Z_{r+1} + N_{kj}\sin\varphi_j + Q_{kj}\cos\varphi_j = P_{ky}, \quad k = 1,2\ldots n.$$

W równaniach tych kąt φ_j odnosi się do wektora o początku w węźle i oraz końcu w węźle k.

W sumach występujących w równaniach (11) j przyjmuje wartości numerów prętów tworzących węzeł k.

Składniki równań (11) dotyczą prętów z jednostronnymi więzami liniowymi i kątowymi pokazanymi na rys. 4b i 5. Dla prętów bez więzów jednostronnych zachodzi $Z_r = Z_{r+1} = 0$.

Z równań (11) oraz nierówności (9) i (10) należy wyeliminować przemieszczenia ϑ, δx i δy. Doprowadzi to do równań kanonicznych ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami, tj. równań o nieujemnych niewiadomych w liczbie więzów jednostronnych, lecz o dwukrotnie większej liczbie niewiadomych, czyli do zagadnienia poszukiwania rozwiązania dopuszczalnego programowania liniowego. Tok postępowania zostanie zilustrowany na przykładzie ustroju belkowego z jednostronnymi więzami.



Rys. 5

LITERATURA

[1] Pierelmuter A.W.: Ustroje prętowo cięgnowe. Arkady, Warszawa 1972.

[2] Рабинович И.М.: Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. Стройиздат, Москва 1975.

[3] Kempny S. Zagadnienie analizy statycznej ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami. XXX Konferencja naukowa KILiW PAN - KN PZITB - Krynica 1984.

[4] Gass S.I.: Programowanie liniowe. PWN, Warszawa 1976.

ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОГО СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Р е з ю м е

В работе представлены два способа расчета сооружений с односторонними связями методом перемещений. Эту проблему сведено поиску допустимого решения линейного программирования.

COMPUTER AIDED STATIC ANALYSIS OF PLANE BAR SYSTEMS
WITH UNILATERAL CONSTRAINTS

S u m m a r y

In this paper two approaches for static analysis of bar systems with unilateral constraints by the use of the displacement method are presented. This problem is reduced to a problem of searching for a feasible solution in linear programming.