Politechnika Śląska
Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki

Dariusz Kurzyk

Modele kolejkowe z opóźnionym wybudzaniem serwera

Rozprawa doktorska napisana
pod kierunkiem
dr. hab. inż. Wojciecha Kempy

Gliwice 2016

Spis treści

Spis oznaczeń

λ	Intensywność poissonowskiego strumienia wejściowego
μ	Intensywność obsługi zgłoszeń
ρ	Obciążenie stanowiska obsługi
K	Pojemność systemu
$F(t)$	Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa czasu obsługi zgłoszeń
$F^{n*}(t)$	n-krotny splot Stieltjesa dystrybuanty $F(t)$
$f(s)$	Transformata Laplace'a-Stieltjesa $F(t)$, tzn. $f(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}F(t)$
$G(t)$	Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa czasu rozruchu serwera w modelach z probabilistyczną dyscypliną wybudzania
$g(s)$	Transformata Laplace'a-Stieltjesa $G(t)$, tzn. $g(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}G(t)$
L_k	k-ty okres ładowania bufora w modelach z N-progową dyscypliną wybudzania
B_k	k-ty okres nieprzerwanej obsługi zgłoszeń przez serwer w modelach z N-progową dyscypliną wybudzania
$X(t)$	Liczba pakietów w systemie w chwili t
$V(t)$	Wirtualny czas oczekiwania pakietu, który wpłynął do systemu w chwili t
$H(t)$	Liczba obsłużonych pakietów do chwili t
(p_i)	Ciąg opisujący rozkład prawdopodobieństwa rozmiaru grup pakietów wpływających do systemu, gdzie strumień wejściowy jest w postaci złożonego procesu Poissona
p_i^{j*}	i-ty wyraz j-krotnego splotu ciągu (p_k)

$\breve{q}_n(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{X(t)=m \mid X(0)=n\}$ w klasycznych modelach ze skończonym buforem oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\breve{v}_n(s,x)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{V(t)>x \mid X(0)=n\}$ w klasycznych modelach ze skończonym buforem oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{g}^L(s)$	Transformata Laplace'a-Stieltjesa rozkładu $\mathbf{P}\{L_k<t\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{g}^B(s)$	Transformata Laplace'a-Stieltjesa rozkładu $\mathbf{P}\{B_k<t\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{g}^{L^c}(s)$	Transformata Laplace'a-Stieltjesa rozkładu $\mathbf{P}\{L_k<t\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona
$\widetilde{g}^{B^c}(s)$	Transformata Laplace'a-Stieltjesa rozkładu $\mathbf{P}\{B_k<t\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona
$\widetilde{q}^L(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{q}^B(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{q}^{L^c}(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona
$\widetilde{q}^{B^c}(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona
$\widetilde{v}^L(s,x)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{(V(t)>x)\cap(t\in L_k)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona

$\widetilde{v}^B(s,x)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in B_k)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{h}^L(s,z)$	Funkcja tworząca transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in L_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{h}^B(s,z)$	Funkcja tworząca transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in B_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widetilde{h}^{L^c}(s,z)$	Funkcja tworząca transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in L_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona
$\widetilde{h}^{B^c}(s,z)$	Funkcja tworząca transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in B_k\big)\}$ w modelach z N-dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona
$\widehat{q}_n(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{X(t) = m \,\vert\, X(0) = n\}$ w modelach z probabilistyczną dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widehat{v}_n(s,x)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{V(t) > x \,\vert\, X(0) = n\}$ w modelach z probabilistyczną dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widehat{h}_n(s,z)$	Funkcja tworząca transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{H(t) = m \,\vert\, X(0) = n\}$ w modelach z probabilistyczną dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci procesu Poissona
$\widehat{q}^c_n(s,m)$	Transformata Laplace'a rozkładu $\mathbf{P}\{X(t) = m \,\vert\, X(0) = n\}$ w modelach z probabilistyczną dyscypliną wybudzania oraz strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona

Spis rysunków

Spis tablic

Wstęp

Rozwój technologii w dziedzinie telekomunikacji oraz sieci i systemów komputerowych jest możliwy m.in. dzięki wynikom rozważań osiągniętych na polu teorii kolejek zwanej również teorią obsługi masowej. Przedmiotem zainteresowania teorii kolejek są systemy, w których występuje zjawisko kumulacji napływających zleceń, które następnie w odpowiedni sposób zostają obsłużone. Znaczenie tego typu systemów stale wzrasta m.in. ze względu na postępującą informatyzację społeczeństw oraz fakt, że w ostatnich dziesięcioleciach internet stał się nieodłącznym elementem życia ludzi na całym świecie. Istotny wkład w rozwój sieci komputerowych wniósł autor klasycznych podręczników z teorii kolejek [1, 2] Leonard Kleinrock, który jest przez wielu zasłużenie uważany za *ojca internetu*. W jego laboratorium, znajdującym się w Boelter Hall na Uniwersytecie Kalifornijskim, zbudowano jeden z pierwszych węzłów sieci ARPANET. Współcześnie teoria kolejek jest powszechnie wykorzystywana do oceny efektywności oraz zapewnienia odpowiednich wymogów jakościowych (QoS) różnego rodzaju systemów telekomunikacyjnych. Należy również zwrócić uwagę na fakt, że teoria kolejek dobrze się sprawdza w modelowaniu zjawisk występujących w innych gałęziach nauk technicznych, a także w zarządzaniu produkcją, ekonomii, logistyce, czy transporcie.

Tematyka niniejszej rozprawy wpisuje się w nurt badań nad zagadnieniami pochodzącymi z teorii masowej obsługi, z naciskiem na analizę systemów kolejkowych znajdujących zastosowanie w sieciach komputerowych i telekomunikacji. W szczególności, przedmiotem rozważań ujętych w pracy są jednokanałowe modele kolejkowe z poissonowskim strumieniem wejściowym, skończonym buforem kolejki oraz mechanizmem opóźnionego wybudzania stacji obsługi po okresie jej bezczynności. Modele kolejkowe z różnego rodzaju ograniczeniami dostępu do stacji obsługi są obecnie przedmiotem intensywnych rozważań. Ze względu na ich charakterystyczne właściwości, można je wykorzystać do modelowania procesów zachodzących np. w węzłach sieci komputerowych takich jak sieci IP, czy też bezprzewodowych sieciach sensorowych, w których mają miejsce zjawiska związane z akumulacją pakietów w buforze urządzenia sieciowego, przetwarzaniem pakietów, utratą pakietów na wskutek przepełnienia bufora, nieprzerwaną obsługą pakietów, czy też opóźnieniem kolejkowania spowodowanym oczekiwaniem pakietów w buforach itd. Ponadto, modele kolejkowe

z ograniczeniami w dostępie do serwera umożliwiają bardziej precyzyjny opis rzeczywistych systemów, gdzie może dojść do tymczasowej dezaktywacji serwera, co prowadzi do blokady procesu obsługi pakietów lub gdzie serwer po wybudzeniu potrzebuje pewnego czasu na osiągnięcie pełnej gotowości operacyjnej. Ogólna postać zaprezentowanych w pracy wyników umożliwia modelowanie systemów, w których obsługa pakietów jest realizowana według dowolnych rozkładów prawdopodobieństwa, a w szczególności rozkładów z ciężkim ogonem, co ma niebagatelne znaczenie w ocenie pracy sieci i systemów komputerowych [3–7].

Precyzyjne modelowanie kolejkowania ruchu sieciowego ma istotny wpływ na projektowanie urządzeń sieciowych pod względem ich wydajności, kosztów produkcji i użytkowania. Przykładem mogą być bezprzewodowe sieci sensorowe zbudowane z przestrzennie rozproszonych czujników, które wykorzystywane są do monitorowania fizycznych i środowiskowych warunków, takich jak ciśnienie, temperatura, wilgotność, czy też hałas. Ze względu na szeroki wachlarz zastosowań sieci sensorowych m.in. w monitorowaniu zanieczyszczenia powietrza, monitorowaniu natężenia ruchu drogowego, projektowaniu systemów detekcji pożarów itp., węzły sieci są często rozmieszczone w trudno dostępnych miejscach. Stąd wymiana ich źródeł zasilania jest problematyczna. Oszczędność energii w kontekście teorii kolejek jest w ostatnim czasie zagadnieniem intensywnie eksplorowanym. W pracach [8, 9] zaprezentowano jednokanałowy model kolejkowy z poissonowskim strumieniem wejściowym, nieskończonym buforem oraz opóźnionym wybudzaniem serwera jako model umożliwiający bardziej wydajne użytkowanie baterii w węzłach sieci sensorowych. Podobnie, problem oszczędności energii został poruszony w pracach [10–12], w których przedstawiono modele kolejkowe z różnymi mechanizmami wybudzania serwera. Niemniej jednak, w literaturze większość wyników analitycznych dla modeli kolejkowych z ograniczeniami w dostępnie do serwera dotyczy stanu ustalonego systemu. Charakterystyki stanu ustalonego ilustrują długoterminową pracę systemu, co daje podstawy do oceny efektywności ich pracy. W praktyce jednak tranzytywna analiza systemów kolejkowych jest niezbędna, co wynika m.in. z faktu występowania w ruchu sieciowym zjawisk takich jak spiętrzenie pakietów (ang. *burstiness*) [13–15], długookresowa zależność (ang. *long-range dependence*) [16, 17], czy też samopodobieństwo (ang. *self-similarity*) [18–20], co może prowadzić do sytuacji, w której stan ustalony jest w krótkim horyzoncie czasu nieosiągalny dla systemu. Ponadto, tranzytywna analiza zachowania systemów kolejkowych dobrze ilustruje ich pracę bezpośrednio po ich uruchomieniu, w okresach przestojów, w sytuacjach destabilizacji pracy serwera, a także w przypadku, gdy stabilizacja systemu twa relatywnie długo np. wskutek dużego obciążenia lub nieregularnego ruchu wejściowego.

Zaprezentowane w pracy wyniki badań dotyczą tranzytywnych charakterystyk modeli kolejkowych ze skończonym buforem, jedną stacją obsługi zgłoszeń, poissonowskim strumieniem wejściowym oraz mechanizmami N-progowej i probabilistycz-

nej dyscypliny wybudzania serwera. Założenie skończoności bufora jest znaczące w przypadku opisu procesów zachodzących w sieciach komputerowych. Występujące w ruchu sieciowym zjawiska mają niejednokrotnie charakter losowy o rozkładzie prawdopodobieństwa z ciężkim ogonem, którego wariancja może być nieskończona. Stąd nawet duże rozmiary buforów kolejek w urządzeniach sieciowych nie zapobiegają występowaniu strat. Uzyskane w pracy wyniki analityczne podane są w postaci transformat Laplace'a oraz funkcji tworzących transformat Laplace'a charakterystyk, które w praktyce mogą posłużyć do zapewnienia odpowiedniej jakości usług projektowanych systemów. W pracy uzyskano szczegółowe wyniki dla charakterystyk takich jak długości kolejki, wirtualny czas oczekiwania oraz proces liczący obsłużone zgłoszenia w modelach kolejkowych ze wspomnianymi wcześniej dyscyplinami wybudzania serwera. Na ich podstawie w prosty sposób można wyznaczyć długość okresów przepełnienia bufora systemu, czy też estymować współczynnik strat. Ponadto, część zaprezentowanych charakterystyk odnosi się zarówno dla pojedynczego jak i grupowego napływu pakietów do systemu.

Opisane w pracy wyniki badań zostały uzyskane metodami analitycznymi i są zaprezentowane w postaci twierdzeń, w których odpowiednie charakterystyki mają postać funkcjonałów zależnych od parametrów modelu oraz rozkładów prawdopodobieństwa, np. od intensywności strumienia wejściowego, rozmiaru bufora, czy rozkładu prawdopodobieństwa czasu obsługi zgłoszeń. Ponadto, przedstawione wyniki teoretyczne zostały uzupełnione o liczne przykłady numeryczne przygotowane za pomocą środowiska obliczeniowego `Mathematica 9.0.1.0`. Poprawność zaprezentowanych rozważań została zweryfikowana metodą *symulacji zdarzeń dyskretnych* przy pomocy pakietu `SimPy 3.0.7` języka programowania `Python 3.4`.

Zasadniczą część zawartych w pracy rozważań, a mianowicie rozdziały 3, 4 za wyjątkiem sekcji 3.1.5 stanową oryginalne wyniki badań autora. Uzyskane m.in. na podstawie metodologii włożonych łańcuchów Markowa, metody potencjału błądzenia losowego, twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych oraz teorii odnowy wyniki zostały w większości zaprezentowane na międzynarodowych konferencjach, opublikowane w materiałach konferencyjnych oraz międzynarodowych czasopismach, natomiast część jest aktualnie recenzowana.

Cel rozprawy

Celem rozprawy jest stochastyczna analiza modeli kolejkowych z ograniczonym dostępem do stacji obsługi i progową bądź probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera, a przedstawione w niej rezultaty badań dotyczą

- *precyzyjnego i efektywnego modelowania ruchu sieciowego, gdzie uwzględniony jest skończony rozmiar buforów urządzeń sieciowych oraz mechanizmy wybudzania serwera;*
- *kluczowych charakterystyk modeli w stanie ustalonym i nieustalonym wyzna-*

czonych analitycznie w postaci jawnej;

- *strumienia wejściowego w postaci zarówno pojedynczych jak i grup pakietów;*
- *numerycznej analizy funkcjonowania rozważanych modeli.*

Teza rozprawy

Metody matematyczne oparte na włożonych łańcuchach Markowa, potencjale błądzenia losowego, twierdzeniu o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych oraz zagadnieniach pochodzących z teorii odnowy i algebry liniowej dają możliwość precyzyjnego i efektywnego modelowania zachowania systemów kolejkowych z różnymi dyscyplinami wybudzania stanowiska obsługi zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym.

Dzięki zawartym w pracy wynikom badań można m.in. odpowiedzieć na pytania jak zmiana intensywności wpływu pakietów do routera IP, czy węzła bezprzewodowej sieci sensorowej wpływa na:

- długość kolejki,
- współczynnik utraty pakietów,
- czas trwania okresów przestoju (okresów energooszczędnych) oraz okresów pracy serwera,
- czas oczekiwania pakietów w buforze urządzenia sieciowego,
- liczbę transmitowanych pakietów w określonym czasie.

Podobne pytania można zadać w kontekście zmiany szybkości obsługi pakietów przez serwer. Ponadto, możliwe jest zbadanie, jaka jest relacja pomiędzy wyżej wymienionymi zjawiskami, a stanem początkowym systemu, gdzie zaaplikowana jest probabilistyczna dyscyplina wybudzania. Ważną kwestią, którą również można rozstrzygnąć na podstawie materiałów zaprezentowanych w rozprawie jest określenie, po jakim czasie praca systemu stabilizuje się oraz jaki wpływ na stabilizację systemu ma jego stan początkowy.

Zawarte w pracy wyniki zostały przedstawione według następującego porządku. W Rozdziale 1 opisano wstępne informacje na temat teorii kolejek, a także wykorzystanej w badaniach metodologii. Kolejny Rozdział 2 przedstawia znane już wyniki na temat zależnych od czasu rozkładów prawdopodobieństwa długości kolejki oraz opóźnienia kolejkowania w systemach typu $M/1/G/K$. Rozdziały 3 i 4 stanowią główną część rozprawy. Zaprezentowanie w nich rezultaty dotyczą tranzytywnych charakterystyk długości kolejki, opóźnienia kolejkowania oraz procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w modelach typu $M/1/G/K$ odpowiednio z N-progową i probabilistyczną

dyscypliną wybudzania serwera. Wyniki odnoszą się do kolejkowania procesów Poissona, a część z nich dotyczy również złożonych procesów Poissona. Informacje uzupełniające dotyczące wykorzystywanych narzędzi matematycznych znajdują się w części A dołączonego załącznika, natomiast kod programu umożliwiającego przeprowadzenie odpowiednich symulacji można znaleźć w części B załącznika.

Rozdział 1

Teoria kolejek

Teoria kolejek, nazywana również teorią masowej obsługi, jest rozważana jako gałąź związanej z teorią decyzji dyscypliny zwanej badaniami operacyjnymi. Ponadto, jest ona silnie związana z teorią prawdopodobieństwa, matematyką stosowaną, jak również informatyką i telekomunikacją. Obecnie teoria kolejek jest skutecznym narzędziem wykorzystywanym do modelowania i analizy wydajności złożonych systemów, takich jak sieci komputerowe, systemy telekomunikacyjne, a także znajduje zastosowanie w logistyce, systemach produkcyjnych oraz różnego rodzaju systemach obsługi klientów, takich jak np. kolejki w sklepach, lotniskach, stacjach obsługi samochodów.

1.1. Historia

Historia teorii kolejek sięga początków XX wieku, kiedy to duński inżynier A. K. Erlang, zainspirowany m.in. pomysłami Johannsena [21], w 1909 roku opublikował artykuł [22], w którym dowodził, że losowa liczba połączeń telefonicznych w określonym czasie ma rozkład Poissona. Następnie w roku 1917 Erlang w pracy [23] przedstawił wzory na prawdopodobieństwo blokady żądań klienta oraz prawdopodobieństwo opóźnienia obsługi klienta, które w dużej mierze zostały uzupełnione w latach trzydziestych dwudziestego wieku przez Pollaczka i Chinczyna w pracach [24, 25], w których średnie opóźnienie kolejkowania i średnia długość kolejki w modelu typu $M/G/1$ zostały opisane za pomocą formuł Pollaczka-Chinczyna. Niedocenianym pionierem teorii kolejek był Engset, który dwa lata przed Erlangiem, w 1915 roku, wyprowadził formułę na prawdopodobieństwo blokady systemu, co zostało opublikowane w 1918 roku w artykule [26]. Molina w pracy [27] z 1927 roku opisał zastosowanie teorii prawdopodobieństwa w problemie trunkingu telefonicznego. Rok później została opublikowana książka Fry'a [28], w której rozwinięto wyniki rozważań Erlanga. Ponadto, znaczy wpływ w rozwój teorii kolejek w tamtym okresie mieli

również Crommelin, Feller, Jensen, czy Kolmogorov (więcej informacji na ten temat można znaleźć w [29]).

Większe zainteresowanie tą dziedziną badań nastąpiło w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku. Określenie *teoria kolejek* po raz pierwszy pojawiło się w pracy Kendalla [30], który dwa lata później w artykule [31] zaproponował notację $A/B/C$ umożliwiającą uporządkowanie systemów masowej obsługi. Notacja Kendalla została następnie rozwinięta w pracy Lee [32] z roku 1966 roku. Ponadto, Kendall w [31] zaproponował wykorzystanie włożonych łańcuchów Markowa do analizy systemów kolejkowych. Włożone łańcuchy Markowa zostały również wykorzystane przez Lindley'a w pracy [33] z roku 1952 do sformułowania układu równań całkowych dla rozkładu prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania w systemach typu $GI/G/1$. Rozwinięcie wyników badań Lindley'a można znaleźć w pracy Smitha [34], a koncepcja wykorzystania włożonych łańcuchów Markowa do analizy systemów kolejkowych doprowadziła do zastosowania teorii odnowy na tym polu w następnej dekadzie. Cox w 1955 roku zaproponował analizę niemarkowowskich modeli [35] oraz zauważył, że wiele procesów stochastycznych występujących w modelach kolejkowych można sprowadzić do markowowskich poprzez dodanie zmiennej uzupełniającej. Jackson w artykule [36] z 1957 roku zaprezentował model sieci kolejkowych, które obecnie nazywane są sieciami Jacksona. W latach siedemdziesiątych sieci Jacksona ze względu na swoją uniwersalność były wykorzystywane w wielu kontekstach, między innymi w systemach, które można uznać za pierwowzór dzisiejszych sieci LAN. W 1958 roku Finch w pracy [37] rozważył zachowanie systemów masowej obsługi w zależności od rozmiaru kolejki. W tym samym roku został opublikowany pierwszy podręcznik dotyczący teorii kolejek napisany przez Morse'a [38], natomiast Haight w [39] wprowadził koncept systemu z dwiema równoległymi poczekalniami. White i Christie w pracy [40], również z 1958 roku, rozważyli rozkład długości kolejki w przypadku awarii stanowiska obsługi. W 1961 roku został opublikowany dowód znanego twierdzenia Little'a [41], sformułowanego przez Morse'a w 1958 roku, które mówi, że średnia liczba zgłoszeń w dowolnym systemie kolejkowym jest równa iloczynowi średniego czasu ich przebywania w systemie oraz średniej intensywności ich napływu do systemu.

W roku 1954 została opublikowana praca Bailey'a [42], w której przedstawiono tranzytywną charakterystykę systemu typu $M/M/1$, co miało znaczący wpływ na rozwój niestacjonarnej analizy modeli kolejkowych. W latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku zaczęło się pojawiać coraz więcej prac na temat stanów nieustalonych systemów kolejkowych. Takács w serii artykułów [43–45] scharakteryzował zachowanie systemów kolejkowych zarówno w stanie tranzytywnym jak i ustalonym. Jego książka [46] z 1962 roku jest dobrym źródłem informacji na ten temat. W późniejszym czasie tematyka tranzytywnej analizy systemów kolejkowych była sukcesywnie eksploatowana w zakresie metod symulacyjnych m.in. przez Gafariana, Anc-

kera i Morisaku'a w [47] z roku 1976, de Souza e Silve, Gaila i Camposa w [48] z 1995 roku, Grassmanna w [49] z 2008 roku. Analityczne rezultaty badań dotyczących analizy tranzytywnej systemów kolejkowych można znaleźć w pracy Grassmanna [50] z 1977 roku, w pracy Pegdena i Rosenshine'a [51] z 1982 roku, gdzie charakterystyki kolejkowe zostały przedstawione w zwartej postaci. W pracy Odoniego i Rotha [52] wykazano istotny wpływ stanu początkowego systemu na jego zachowanie w pierwszych chwilach jego ewolucji. Zwarta postać wyników uzyskanych przez Keltona i Lawa [53] umożliwiła badanie efektywności systemów kolejkowych typu $M/M/c$, co zostało rozszerzone przez Keltona dla systemów $M/E_k/1$ i $E_k/M/1$ [54]. Ponadto należy zwrócić uwagę na prace Parthasarathy'ego [55] z 1987 roku, Abate i Whitta [56] z 1988 roku, w której wykorzystano transformatę Laplace'a do analizy tranzytywnej oraz pracę Leguesdrona, Pellaumaila, Rubino i Sericola [57], w której przestawiono analizę tranzytywną opartą na funkcjach tworzących. Alternatywnym podejściem do analizy systemów kolejkowych w stanie ustalonym i nieustalonym jest aproksymacja dyfuzyjna szerzej opisana w [58–62].

W 1961 roku został opublikowany artykuł Kleinrocka [63], za sprawą którego, teoria kolejek stała się ważna w ocenie pracy maszyn cyfrowych wykorzystywanych do przetwarzania informacji. Gordon i Newell w 1967 roku wprowadzili koncept zamkniętych sieci kolejkowych [64], co stanowiło rozszerzenie zaproponowanego przez Jacksona modelu sieci. W tym samym roku został również opublikowany artykuł Skinnera [65] z rozważaniami na temat priorytetowych systemów kolejkowych $M/G/1$, natomiast w 1968 roku została wydana książka Jaiswala [66], która była poświęcona tej tematyce. Rok później Mandelbaum i Avi-Itzhak wprowadzili idee systemów kolejkowych Folk-Join [67], które w późniejszym czasie znalazły zastosowanie m.in. w projektowaniu macierzy RAID, czy obliczeniach równoległych. Buzen w pracy [68] z 1973 roku zaproponował iteracyjną metodę obliczeniową wyznaczania ilości zgłoszeń w zamkniętych sieciach kolejkowych. W celu analizy charakterystyk zamkniętych sieci kolejkowych, Lavenberg i Reiser opracowali algorytm *mean value analysis* opublikowany w 1980 roku [69], wykorzystywany do wyznaczania wartości średniej długości kolejki oraz czasu pobytu zgłoszeń w systemie. Badania w tym zakresie były kontynuowane m.in. w pracach [2, 70–75].

Intensywne badania w dziedzinie teorii kolejek doprowadziły do jej gwałtownego rozwoju na wielu płaszczyznach, zarówno w kontekście rozważań teoretycznych jak i praktycznych, co przejawia się dużą ilością publikacji na ten temat. Należy zwrócić uwagę na fakt, że ważną klasą modeli kolejkowych są systemy typu $M/G/1$, które stanowią podstawię do rozwijania modeli o bardziej skomplikowanej strukturze, a badania na ich temat trwają nieprzerwanie do dziś [76–80]. Ponadto, w kontekście niniejszej pracy ważną rolę odgrywają modele kolejkowe, w których obsługa zgłoszeń przebiega według pewnych szczególnych dyscyplin. Więcej informacji na ich temat znajduje się m.in. w [81–87]. Można zauważyć, że wykorzystywany do analizy

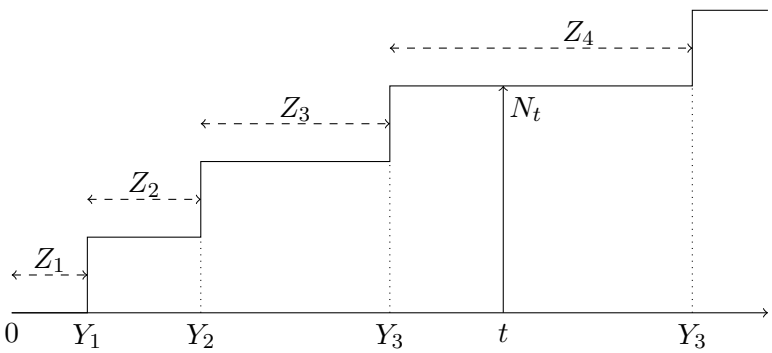
systemów obsługi masowej aparat matematyczny początkowo oparty na teorii prawdopodobieństwa zmieniał się na przestrzeni lat i rozszerzał w kierunku innych gałęzi matematyki. Na przykład Neuts w książce [88] z 1981 roku zaproponował metody analityczne w zakresie teorii kolejek oparte na formalizmie macierzowym, co było przedmiotem zainteresowania m.in. w [89–93].

Na przestrzeni ostatnich 30 lat zostało napisanych wiele znakomitych książek na temat teorii kolejek i jej zastosowań, które na dany moment stanowiły swoiste kompendia w tym zakresie. Stąd, kończąc niniejszą sekcję, można odesłać czytelnika do pozycji książkowych [61, 94–101] stanowiących dobrą podstawę do studiów nad tą dziedziną wiedzy.

1.2. Strumień zdarzeń

Ocena wydajności systemów modelowanych za pomocą teorii kolejek zaczyna się od scharakteryzowania zachowania źródła ruchu w systemie. Do tego celu wykorzystywane są strumienie zdarzeń, które w kontekście teorii kolejek nazywane są również strumieniami zgłoszeń.

Strumieniem zdarzeń [102] nazywamy proces stochastyczny $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ (sekcja A.2), taki że $0 < Y_1 < Y_2 < \ldots$, tzn., którego przyrosty $Y_{n+1} - Y_n$ są dodatnie. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, ...$ reprezentują chwile, w których następuje zajście pewnego powtarzającego się zdarzenia, stąd też nazywane są momentami zdarzeń. Każdy strumień zdarzeń $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ może być określony również na dwa alternatywne sposoby, co ilustruje rysunek 1.2.1.



Rys. 1.2.1. Przykład opisu strumienia zdarzeń za pomocą momentów zdarzeń $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_+\}$, czasów pomiędzy kolejnymi zdarzeniami $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ oraz procesu liczącego $\{N_t, t \geq 0\}$.

Pierwszy sposób jest oparty na reprezentujących czasy pomiędzy zajściami kolejnych zdarzeń zmiennych losowych $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_+\}$, które są przyrostami zmiennych $Y_1, Y_2, \ldots$, tzn. $Z_1 = Y_1$ oraz $Z_n = Y_n - Y_{n-1}$ dla $n > 1$. Podobnie, każda chwila Y_k

może być określona za pomocą $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_+\}$ w postaci

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i. \tag{1.2.1}$$

Stąd też, określając strumień wejściowy w systemach kolejkowych, zamiennie wykorzystuje się momenty zdarzeń oraz czasy pomiędzy kolejnymi zdarzeniami.

Drugą alternatywą opisu strumienia zdarzeń jest proces liczący $\{N_t, t \geq 0\}$ (sekcja A.2.1), gdzie dla każdego $t \geq 0$ zmienna N_t określa liczbę zdarzeń, które zaszły do czasu t. Dla $n \geq 1$ oraz $t > 0$ pomiędzy Y_n i N_t zachodzi następująca relacja

$$\{Y_n \leq t\} \equiv \{N_t \geq n\}, \tag{1.2.2}$$

gdzie $\{Y_n \leq t\}$ i $\{N_t \geq n\}$ opisują odpowiednio fakty, że n-ty moment zdarzeń miał miejsce do czasu $\tau \leq t$ oraz w chwili τ zostało zliczonych n zajść zdarzeń.

Przedstawiony powyżej opis strumienia zdarzeń oraz jego alternatywne formy opisu są wykorzystywane w teorii kolejek zarówno do określania strumienia wejściowego zgłoszeń, jak i procesu liczącego obsłużone zgłoszenia.

Zakładając dodatkowo, że przyrosty $N_t - N_s$, dla $0 \leq s < t$ są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładami Poissona (sekcja A.1.5.1) z parametrem $\lambda(t-s)$ otrzymujemy strumień Poissona (sekcja A.2.2), gdzie $1/\lambda$ jest średnim czasem pomiędzy następującymi po sobie zdarzaniami. Strumień Poissona jest najstarszym modelem ruchu sieciowego [23, 103], wykorzystywanym powszechnie do dziś, m.in. z powodu jego własności braku pamięci. Ponadto, w praktyce wykorzystuje się również systemy kolejkowe z strumieniem zgłoszeń w postaci złożonego procesu Poissona (sekcja A.2.3), co umożliwia modelowanie rozmiarów grup pakietów napływających do systemu.

1.3. Systemy kolejkowe

Typowy model kolejkowy jest charakteryzowany przez:

1) Strumień wejściowy, którego zachowanie określa strumień zdarzeń określony w sekcji 1.2 w postaci procesu stochastycznego opisującego losowy napływ zgłoszeń do systemu. Strumień zgłoszeń często jest charakteryzowany przez średni czas $\frac{1}{\lambda}$ pomiędzy kolejnymi wpływami zgłoszeń lub intensywność napływu zgłoszeń λ. W zależności od kontekstu zamiennie stosuje się określenia: klient, zgłoszenie, pakiet, zadanie, wiadomość itp. Ze względu na strukturę matematyczną strumienia zdarzeń, możliwa jest charakterystyka strumienia wejściowego poprzez rozkłady prawdopodobieństwa czasów pomiędzy następującymi po sobie wpływami zgłoszeń. Zazwyczaj zakłada się, że czasy pomiędzy

napływami kolejnych zgłoszeń są opisywane za pomocą niezależnych zmiennych losowych o tych samych rozkładach prawdopodobieństwa. Stąd często strumień wejściowy jest modelowany za pomocą procesów Poissona. Wówczas czasy pomiędzy napływami kolejnych zgłoszeń podlegają rozkładom wykładniczym. W szczególnym przypadku można założyć, że zgłoszenia napływają do systemu w stałych odstępach czasu, w wyniku czego strumień wejściowy będzie opisany w sposób deterministyczny. Ponadto, grupowy wpływ pakietów do systemu może być modelowany m.in. za pomocą złożonych procesów Poissona.

2) Czas obsługi zgłoszeń określony jest za pomocą zmiennej losowej z rozkładem prawdopodobieństwa opisanym dystrybuantą F. Zazwyczaj określa się średni czas obsługi zgłoszeń $\frac{1}{\mu}$ lub intensywność ich obsługi μ. W zależności od modelowanego problemu, zamiennie stosuje się określenia: obsługa, serwis, transmisja. Modelując obsługę zgłoszeń zakłada się, że czas ich obsługi nie zależy od strumienia wejściowego. Należy zwrócić uwagę na fakt, że czas pobytu pakietu w systemie różni się od czasu jego obsługi, co wynika z opóźnień kolejkowania spowodowanych oczekiwaniem pakietu na obsługę w buforze kolejki w sytuacji, gdy stanowisko obsługi jest zajęte. Podobnie jak w przypadku strumienia wejściowego, obsługa zgłoszeń może przebiegać grupowo.

3) Dyscyplina obsługi zgłoszeń określa kolejność wyboru zgłoszeń z kolejki, które następnie trafiają na stanowisko obsługi. Wyróżnia się m.in. następujące algorytmy szeregowania:

   – FIFO (*first in, first out*) - kolejność obsługi następuje zgodnie z porządkiem wpływu zgłoszeń do systemu;
   – LIFO (*last in, first out*) - jako pierwsze obsługiwane jest zgłoszenie, które pojawiło się ostatnie w systemie, co odpowiada stosom, np. stos danych, stos w magazynie;
   – SIRO (*service in random order*) - kolejność obsługi zgłoszeń jest losowa;
   – priorytetowa obsługa zgłoszeń, np. pierwsze wybierane są zgłoszenia, których obsługa jest najkrótsza;
   – Round robin (algorytm kołowy) - każdemu zgłoszeniu w systemie zostaje nadany odpowiedni przedział czasowy, w którym zgłoszenie ma zostać obsłużone. W przypadku, gdy serwis zgłoszenia nie zostanie ukończony w danym przedziale czasowym, wówczas zgłoszenie ponownie trafia na koniec kolejki.

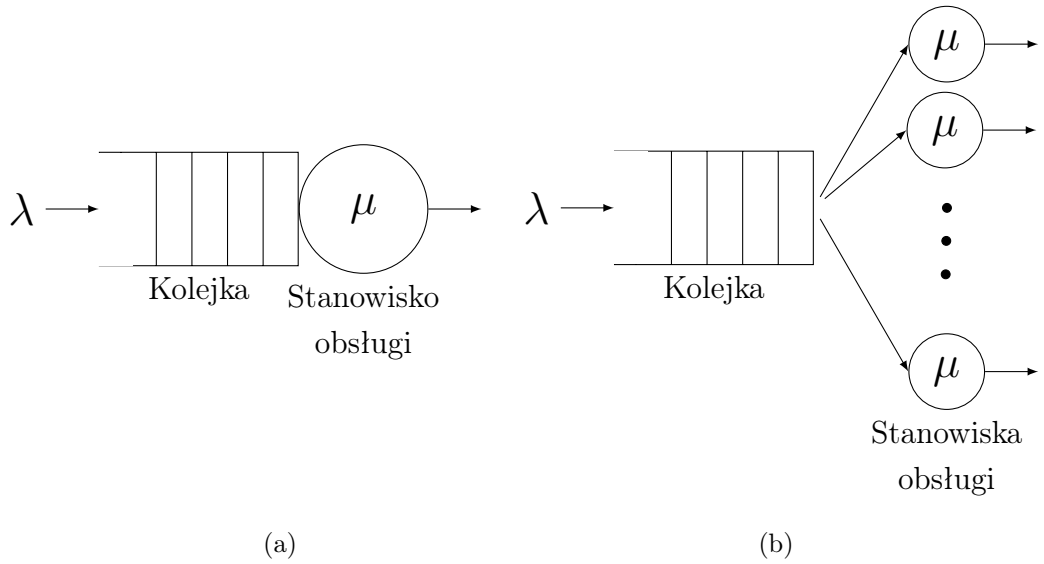
4) Długość kolejki określa ilość miejsc, na których są akumulowane zgłoszenia oczekujące na obsługę. Określenie *kolejka* bywa zastępowane np. przez *poczekalnia*, czy *bufor*. Jeżeli w systemie kolejkowym zachodzi sytuacja, w której

wszystkie miejsca w kolejce są zajęte, wówczas każde następne przychodzące zgłoszenie opuszcza system bez obsługi.

5) Liczba identycznych stanowisk obsługi, które są odpowiedzialne za równoległą obsługę zgłoszeń. Stanowiska mogą mieć współdzieloną kolejkę lub też oddzielne kolejki. Zamiennie stosuje się określenia stanowisko obsługi, stacja obsługi, kanał obsługi i serwer.

6) Reakcja klientów na oczekiwanie w kolejce. W niektórych przypadkach można brać pod uwagę sytuację, w której klienci, zniecierpliwieni oczekiwaniem w kolejce, opuszczają ją. Tego typu sytuacje mogą zachodzić w przypadku kolejek w sklepach lub centralach telefonicznych: jeżeli numer jest zajęty, klient po pewnym czasie ponawia próbę ponownego połączenia się z centralą.

Na rysunkach 1.3.1 przedstawiono schemat typowych systemów masowej obsługi z jednym i wieloma stanowiskami obsługi.



Rys. 1.3.1. Schemat typowego systemu kolejkowego (a) z jednym stanowiskiem obsługi, (b) z wieloma stanowiskami obsługi.

1.4. Notacja Kendalla

Do klasyfikacji systemów kolejkowych wykorzystuje się wprowadzoną przez Kendalla [31] notację $A/B/C$, która później została rozszerzona w pracy [32] o dodatkowe symbole K, L, D. W wyniku czego $A/B/C/K/L/D$ określa system kolejkowy, gdzie

- A określa rozkład zmiennej losowej czasu między kolejnymi zgłoszeniami,

- B określa rozkład zmiennej losowej czasu obsługi zgłoszeń,
- C oznacza liczbę identycznych stanowisk obsługi,
- K oznacza długość kolejki,
- L oznacza wymiar źródła zgłoszeń,
- D oznacza dyscyplinę obsługi zgłoszeń.

W przypadku, gdy K lub L są pominięte, zakłada się, że długość kolejki lub wymiar źródła zgłoszeń rozpatrywanego modelu są nieskończone. Ponadto, w notacji Kendalla literom A i B mogą odpowiadać m.in. symbole D, M, E_k, H_k, G, które oznaczają odpowiednio rozkład deterministyczny, wykładniczy (sekcja A.1.5.2), rozkład Erlanga rzędu k (sekcja A.1.5.3), hiperwykładniczy z parametrem kształtu k (sekcja A.1.5.5), rozkład dowolny.

1.5. Ocena wydajności modeli kolejkowych

Systemy kolejkowe ze skończonym buforem (rozmiarem kolejki) stanowią podstawę w modelowaniu kolejek zgłoszeń występujących w węzłach sieci komputerowych, czy też sieci telefonii komórkowych [104]. Stąd wiedza na temat stochastycznych charakterystyk dotyczących m.in. zachowania się długości kolejki czy czasów trwania okresów przepełnienia bufora ma kluczowe znaczenie w ocenie efektywności modelowanej sieci [105, 106]. Wykorzystując informacje na temat ruchu pakietów w węźle sieci, możliwe jest m.in. ustalenie odpowiedniego rozmiaru bufora systemu, w zależności od intensywności napływu i obsługi zgłoszeń, w celu ograniczenia liczby utraconych pakietów. Ponadto, możliwa jest analiza ilości potrzebnej pojemności pamięci węzłów sieci komunikacyjnych w przypadku zgłoszeń o losowej objętości [107, 108]. Dobór odpowiedniej intensywności obsługi zgłoszeń umożliwia z jednej strony zmniejszenie czasu pobytu pakietów w systemie, a z drugiej strony może mieć wpływ na energooszczędność węzłów sieci. Zatem, modele kolejkowe są pomocne m.in. w ustaleniu kompromisu pomiędzy kosztem obsługi zgłoszeń, a rozmiarem bufora systemu lub czasem oczekiwania w kolejce. Ocena wydajności modeli kolejkowych polega na wyznaczeniu probabilistycznych charakterystyk dotyczących m.in.

- długości kolejki (liczby zgłoszeń w systemie),
- opóźnienia kolejkowania,
- liczby obsłużonych zgłoszeń,
- okresów zajętości systemu,

- okresów przepełnienia bufora,
- okresów bezczynności stacji obsługi,
- współczynnika strat,
- współczynnika wykorzystania stanowiska obsługi.

Jedną z podstawowych wielkości charakteryzujących systemy kolejkowe jest współczynnik obciążenia stanowiska obsługi. Zakładając, że λ określa intensywność napływu zgłoszeń do systemu, natomiast μ określa intensywność ich obsługi (czyli liczbę zgłoszeń obsługiwanych w jednostce czasu), obciążenie serwera jest opisane przez wielkość

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}, \tag{1.5.1}$$

gdzie c jest liczbą stanowisk obsługi. Jednym z warunków zapewniających stabilność pracy systemów kolejkowych jest, by $\rho < 1$. W przypadku systemów $M/M/c$ jest to warunek wystarczający, aby system był stabilny. Dla $\rho = 1$ system może osiągnąć stan stabilny, tylko w przypadku, gdy napływ zgłoszeń i ich obsługa są deterministyczne.

Innymi ważnymi charakterystykami są oczekiwana liczba zgłoszeń w systemie L oraz oczekiwana liczba zgłoszeń w kolejce L_q. Wielkości te można wyznaczyć za pomocą formuły Little'a [41], która jest jednym z najbardziej ogólnych i powszechnie wykorzystywanych wyników w teorii kolejek, którego postać jest następująca

$$L = \lambda W, \qquad L_q = \lambda W_q, \tag{1.5.2}$$

gdzie W jest średnim czasem pobytu zgłoszenia w systemie, natomiast W_q jest średnim czasem pobytu zgłoszenia w kolejce.

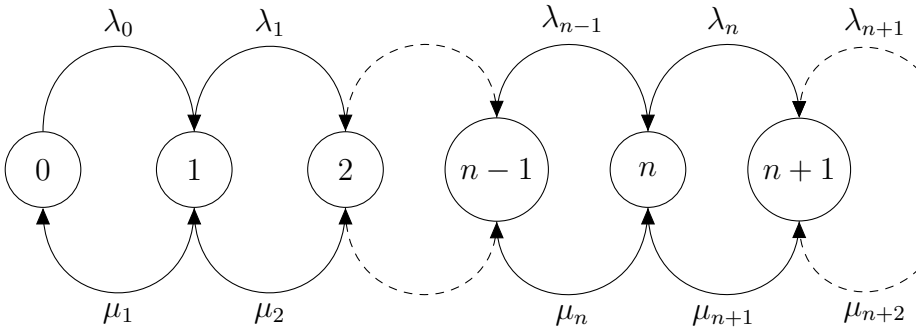
Jak już wcześniej zostało wspomniane, analiza stanu ustalonego systemów kolejkowych pozwala ocenić ich pracę w długoterminowych ramach czasowych. Niemniej jednak ze względu na zjawiska zachodzące w ruchu sieciowym osiągnięcie stanu ustalonego może być niemożliwe lub trwać relatywnie długo. W dalszej części pracy zostaną zaprezentowane techniki umożliwiające analizę tranzytywną systemów kolejkowych. Ponadto, w modelowaniu systemów kolejkowych istotną rolę odgrywa odpowiedni wybór rozkładów prawdopodobieństwa, za pomocą których opisywany jest ruch sieciowy. W ocenie wydajności systemów i sieci komputerowych powszechnie wykorzystywane są rozkłady prawdopodobieństwa z tak zwanym ciężkim ogonem (sekcja A.1.4.8). Już pod koniec ubiegłego stulecia zbadano eksperymentalnie, że zdarzenia akumulujące się w systemach i sieciach komputerowych mają rozkłady prawdopodobieństwa z ciężkim ogonem [3–7, 19, 109–112], co można zaobserwować podczas transferu plików przez internet, czy zapisywaniu plików na serwerze sieciowym. Przykładowo do modelowania przesyłu plików za pomocą protokołu TCP

w internecie, gdzie występuje dużo plików małego rozmiaru oraz mało plików dużego rozmiaru wykorzystywany jest m.in. rozkład Pareto [113, 114]. Powodem zainteresowania tego typu rozkładami jest możliwość modelowania za ich pomocą ekstremalnie wysokiej zmienności badanego zjawiska. Ponadto, są one wykorzystywane również od modelowania zjawiska samopodobieństwa w ruchu sieciowym [19, 115].

Zatem, w ocenie wydajności modeli kolejkowych kluczowe są zarówno charakterystyki tranzytywne jak również odpowiedni dobór rozkładów prawdopodobieństwa.

1.6. Proces narodzin i śmierci

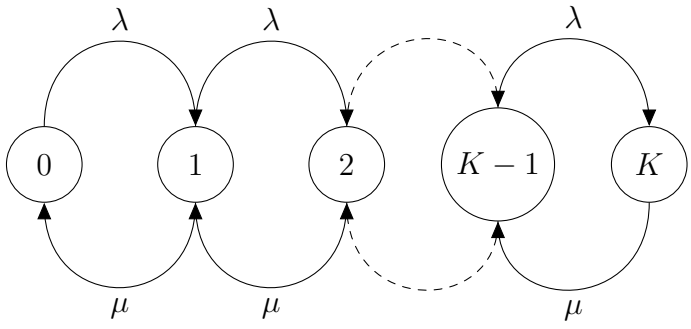
Proces narodzin i śmierci jest specjalnym przypadkiem jednorodnego procesu Markowa (sekcja A.2.4) z czasem ciągłym i nieskończonym zbiorem stanów, gdzie ze stanu n można przejść jedynie do stanu $n-1$ lub $n+1$ dla $n > 0$, natomiast w przypadku $n = 0$ można przejść jedynie do stanu 1. Stan n jest interpretowany jako aktualna wielkość populacji, przejście do stanu $n+1$ jest interpretowane jako narodziny, natomiast do stanu $n-1$ jako śmierć. Intensywność przejść pomiędzy stanami jest opisywana przez parametry $\{\lambda_i\}$ w przypadku narodzin oraz $\{\mu_i\}$ w przypadku śmierci, co ilustruje schemat przedstawiony na rysunku 1.6.1. Proces naro-



Rys. 1.6.1. Graf przedstawiający proces narodzin i śmierci.

dzin i śmierci znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach badań, m.in. epidemiologi, biologii i demografii. W teorii kolejek proces narodzin i śmierci opisuje najbardziej fundamentalny przykład modelu kolejkowego typu $M/M/C/K$ z nieskończonym wymiarem źródła zgłoszeń oraz dyscypliną obsługi FIFO. Czystym procesem narodzin nazywamy proces narodzin i śmierci, gdzie $\mu_i = 0$, dla $i \geq 1$. Ponadto, jeśli $\lambda_i = \lambda$, gdzie $i \geq 0$, wówczas czysty proces narodzin jest procesem Poissona z parametrem λ. Analogicznie, w przypadku gdy $\lambda_i = 0$, dla $i \geq 0$ otrzymujemy czysty proces śmierci. W kontekście teorii kolejek, zakładając, że $\lambda_i = \lambda$ oraz $\mu_i = \mu$, proces narodzin i śmierci opisuje zachowanie się liczby zgłoszeń obecnych w systemie typu $M/M/1$ z nieskończonym buforem, jednym stanowiskiem obsługi zgłoszeń, intensywnością napływu zgłoszeń λ oraz średnim czasem obsługi zgłoszeń $\frac{1}{\mu}$. W przypadku, gdy

$\mu_i = i\mu$ dla $i \leq C$ oraz $\mu_i = C\mu$ dla $i \geq C$ otrzymujemy model kolejkowy $M/M/C$, tzn. model z C stanowiskami obsługi zgłoszeń. Model kolejkowy $M/M/1/K$ można scharakteryzować procesem narodzin i śmierci, w którym $\lambda_i = \lambda$ dla $0 \leq i < K$, $\lambda_i = 0$ dla $i \geq K$ oraz $\mu_i = \mu$ dla $1 \leq i \leq K$, co ilustruje schemat przedstawiony na rysunku 1.6.2.



Rys. 1.6.2. Proces narodzin i śmierci dla systemu $M/M/1/K$.

Modele kolejkowe, które można przedstawić za pomocą procesu narodzin i śmierci są modelami markowowskimi. Generalnie, markowowskimi nazywamy systemy kolejowe, w których rozkłady prawdopodobieństwa czasów pomiędzy kolejnymi wpływami zgłoszeń do systemu oraz czasów ich obsługi są wykładnicze, w wyniku czego, tego typu modele mogą być opisane za pomocą łańcuchów Markowa z czasem ciągłym. Zaletą markowowskich modelki kolejkowych jest ich łatwość symulacji oraz dobrze rozwinięty opis analityczny oparty m.in. na formalizmie procesu narodzin i śmierci. W praktyce jednak zachowanie wielu systemów jest niemarkowowskie, stąd istnieje potrzeba korzystania z innych metod umożliwiających ich analizę, o czym będzie więcej w dalszej części pracy.

1.7. Okres przestoju pracy serwera

Modele kolejowe z różnego rodzaju ograniczeniami w pracy i dostępie do stanowiska obsługi są istotne m.in. z punktu widzenia optymalizacji pracy serwera, np. w kontekście oszczędności poboru energii, czy też z punktu widzenia fizycznych ograniczeń modelowanego systemu, np. w kontekście czasu potrzebnego na regenerację i przygotowanie do pełnej gotowości stanowiska obsługi zgłoszeń. Analityczne rozważania na temat oceny wydajności systemów z mechanizmem oszczędzania energii w standardzie IEEE 802.16e można znaleźć m.in. w pracach [12, 116, 117], natomiast w [10, 118–120] zostały opisane inne zastosowania tego typu modeli.

W ramach systemów kolejkowych z przestojami w pracy serwera można wyróżnić m.in. systemy z:

- N-dyscypliną wybudzania serwera (N-*policy*), gdzie serwer rozpoczyna pracę dopiero wówczas, gdy liczba zgłoszeń zakumulowanych w kolejce osiągnie pewną ustaloną z góry progową wartość N;
- probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera, gdzie po wpłynięciu do pustego systemu pierwszego pakietu serwer potrzebuje pewnego czasu (*setup time*) na uzyskanie pełnej gotowości do pracy i dopiero po upływie tego czasu rozpoczyna się obsługa pakietów;
- okresami regeneracji serwera (*server vacations*), gdzie serwer po obsłużeniu wszystkich zgłoszeń przechodzi w stan regeneracji, wówczas pakiet, który wpłynie do systemu w okresie regeneracji zostanie obsłużony po jego zakończeniu.

Przegląd różnego typu modeli kolejkowych z ograniczonym dostępem do stacji obsługi można znaleźć w pozycji [121].

1.8. Analiza systemów kolejkowych

1.8.1. Metody analityczne

W literaturze różnego rodzaju systemy kolejkowe ze skończonym buforem są dosyć dobrze omówione, niemniej jednak większość wyników dotyczy stanu ustalonego. Jedno z pierwszych podejść do analizy systemów kolejkowych było oparte na procesie narodzin i śmierci (sekcja 1.6). Analiza stanu ustalonego niemarkowowskich modeli często jest dokonywana poprzez wyznaczenie za pomocą metody zmiennych uzupełniających [35, 122] równań Kołmogorowa [123, 124], które następnie są rozwiązywane za pomocą funkcji tworzących rozkłady prawdopodobieństwa. Inne podejście związane jest z zaproponowaną przez Kendalla [31] opartą na włożonych łańcucha Markowa metodą wyznaczania charakterystyk kolejkowych poprzez łańcuchy Markowa wyekstrahowane z procesów niemarkowowskich przy użyciu punktów regeneracji [125]. Ta metodologia została rozwinięta między innymi w pracach [33, 34], gdzie badane rozkłady prawdopodobieństwa opisywano za pomocą układów równań całkowych, a w późniejszym czasie metodologię tę rozwinięto na polu teorii odnowy, co dało narzędzia do analizy tranzytywnej.

W przypadku analizy stanów nieustalonych sytuacja się komplikuje, gdyż tranzytywna analiza charakterystyk niemarkowowskich systemów kolejkowych bywa trudna. Ponadto, zdarza się, że uzyskane wyniki analityczne są w skomplikowanej postaci, co utrudnia korzystanie z nich. W praktyce istnieje wiele argumentów przemawiających za wyznaczaniem tego typu charakterystyk, co może wynikać m.in. z faktu, że modele kolejkowe sieci komputerowych mogą nie osiągać stanów ustalonych lub też zbieżność do stanu ustalonego przebiega bardzo powoli, co może być

konsekwencją ciągle zmieniającego się ruchu sieciowego. Ponadto, można rozważyć w tym kontekście systemy, których stan bywa co pewien czas destabilizowany.

Jedne z pierwszych wyników na temat stanu nieustalonego systemów kolejkowych pojawiły się w pracach Takácsa [46]. Gafarian, Ancker i Morisaku na podstawie pracy Lawa [126] zaproponowali ramy symulacyjnej metody analizy tranzytywnej modeli kolejkowych zależnej od warunków początkowych [47]. Grassmann w 1977 roku w pracy [50] dokonał porównania trzech metod analizy tranzytywnej markowowskich systemów kolejkowych: Rungego-Kutty, Liou'a oraz metody opartej o randomizację. Pegden i Rosenshine w [51] zaprezentowali analityczną i zwartą charakterystykę prawdopodobieństwa napływu dokładnie i-zgłoszeń, przy obsłudze j zgłoszeń w ustalonym przedziale czasu t dla systemu $M/M/1$. Zaprezentowane wyniki miały znaczenie w przypadku modeli kolejkowych, w których cyklicznie następuje napływ zgłoszeń, a następnie ich obsługa do momentu opróżnienia systemu. Odoni i Roth w [52] przedstawili tranzytywne zachowanie długości kolejki w markowowskich systemach kolejkowych z nieskończonym buforem, gdzie zgodnie z uzyskanymi wynikami początkowy stan systemu ma istotny wpływ na jego zachowanie w pierwszych chwilach po uruchomieniu. Ponadto, w pracy zaprezentowano aproksymację momentu osiągnięcia przez system stanu ustalonego. Zaprezentowana charakterystyka została uzyskana jako rozwiązanie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Następnie Kelton i Law [53] opisali tranzytywne zachowanie systemu kolejkowego $M/M/c$, który rozpoczyna pracę z ustaloną liczą zgłoszeń w buforze. Zwarta forma uzyskanych wyników umożliwiła ich wykorzystanie do analizy efektywności tego typu systemów, m.in. w kontekście opóźnienia kolejkowania zgłoszeń znajdujących się w systemie. Rezultaty badań Keltona i Lawa zostały rozwinięte dla systemów, gdzie za pomocą rozkładu Erlanga opisywany jest napływ lub obsługa zgłoszeń w pracy Keltona [54] z 1985 roku. Podobne rozważania zostały przeprowadzone przez Parthasarathy'ego w pracy [55] z 1987 roku, gdzie opisano prawdopodobieństwo pobytu n zgłoszeń w systemie $M/M/1$ w chwili t. Zastosowanie transformaty Laplace'a oraz funkcji tworzących prawdopodobieństwa można znaleźć m.in. w [56, 57].

Zaprezentowane w pracy wyniki dla tranzytywnych charakterystyk kolejkowych zostały uzyskane za pomocą podejścia opartego na metodologii włożonych łańcuchów Markowa, gdzie badane rozkłady prawdopodobieństwa opisane są przez układy równań całkowych Volterry, sformułowane na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwa całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych. Wyznaczone układy równań następnie są rozwiązywane za pomocą metody potencjału błądzenia losowego. Ponadto, w przeprowadzonych rozważaniach wykorzystano fakty z teorii odnowy oraz algebry liniowej. Uzyskane charakterystyki mają postaci transformat Laplace'a lub funkcji tworzących transformat Laplace'a rozkładów prawdopodobieństw, gdzie do ich odwracania wykorzystano odpowiednio wzór całkowy Bromwicha lub wzór całkowy Cauchy'ego.

1.8.2. Metody symulacyjne

Banks w [127] stwierdził, że analiza złożonych systemów kolejkowych napotykanych w praktyce jest trudna do przeprowadzenia za pomocą modeli kolejkowych, których formalizm matematyczny bywa skomplikowany. Stąd też popularnością cieszą się metody symulacyjne wykorzystywane do analizowania tego typu problemów. Ogólnie w kontekście metod symulacyjnych można wyróżnić trzy klasy systemów:

- Systemy ciągłe, w których zmiana stanu następuje w sposób ciągły. Tego typu systemy zazwyczaj opisuje się za pomocą układów równań różniczkowych.
- Systemy dyskretne, w których zmiana stanu następuje w sposób dyskretny. Innymi słowy są to systemy, których stan jest obserwowalny w ustalonych, regularnych chwilach, natomiast ich analiza jest przeprowadzana na podstawie opisujących ich równań różnicowych.
- Systemy zdarzeń dyskretnych. Tego typu systemy są opisywane za pomocą ciągu zdarzeń losowych $x_1, x_2, ...$ zachodzących w czasie, gdzie zajście każdego ze zdarzeń powoduje zmianę stanu systemu. W ramach klasy systemów zdarzeń dyskretnych można wyszczególnić modele kolejkowe. Modelowanie zachowania systemów zdarzeń dyskretnych dokonywane jest za pomocą metody *symulacji zdarzeń dyskretnych* (DES).

Jak wynika z powyższego, przedmiotem naszego zainteresowania jest symulacja zdarzeń dyskretnych, która może być realizowana w oparciu o dwie zasadnicze koncepcje wskazane przez Centeno w [128]:

- Orientacja na zdarzeniach, zgodnie z którą działanie systemu zostaje opisane za pomocą listy zachodzących po sobie zdarzeń, które mają wpływ na stan systemu, np. w kontekście teorii kolejek można wyszczególnić zdarzenia wpływu zgłoszenia do systemu, rozpoczęcia obsługi zgłoszenia itp.
- Interakcja pomiędzy procesami, gdzie uwaga zostaje skoncentrowana na obiektach składających się na system np. zgłoszenia, serwer, generator napływu zgłoszeń oraz sekwencji procesów zachodzących pomiędzy tymi obiektami.

Ponadto, inne koncepcje realizacji symulacji zdarzeń dyskretnych zostały opisane m.in. w [127, 129–131]. Przykład wykorzystania DES w teorii kolejek można znaleźć w pracy Grassmanna [49] z 2008 roku, w której przedstawiono wyniki dotyczące czasu trwania symulacji zdarzeń dyskretnych, po jakim system kolejkowy osiąga stan stacjonarny.

Na potrzeby niniejszej pracy, zaprezentowane wyniki analityczne zostały zweryfikowane za pomocą symulacji zdarzeń dyskretnych opartej na interakcji między

procesami. Symulacje wykonano za pomocą dedykowanego do tego celu pakietu `SimPy 3.0.7` języka programowania `Python 3.4`. W części B załącznika można znaleźć kod programu umożliwiającego wykonanie symulacji zachowania rozważanych modeli kolejkowych z dyscyplinami wybudzania serwera.

Rozdział 2

System kolejkowy typu $M/G/1/K$

Rozdział przestawia tranzytywną analizę długości kolejki oraz opóźnienia kolejkowania w modelach obsługi masowej ze skończonym buforem i poissonowskim strumieniem zgłoszeń. Opisane charakterystyki pochodzą z [132–134], a rozważania na ich temat są wstępem do tranzytywnej analizy modeli kolejkowych typu $M/G/1/K$ z dyscyplinami opóźnionego wybudzaniem stanowiska obsługi.

Systemy kolejkowe ze skończonym buforem są intensywnie wykorzystywane do modelowania oraz analizy wydajności systemów telekomunikacyjnych i sieci komputerowych. Znajomość rozkładów prawdopodobieństwa stochastycznych charakterystyk opisujących ewolucję tego typu systemów pozwala zbadać, jaki wpływ na zachowanie systemu ma m.in. długość kolejki, intensywność napływu zgłoszeń, czy też szybkość obsługi zgłoszeń. Założenie nieskończoności rozmiaru bufora systemu upraszcza wyznaczanie analitycznych charakterystyk badanego modelu, niemniej jednak analiza systemów kolejkowych ze skończonym buforem ma istotne znaczenie w praktycznych zastosowaniach, co wynika z faktu, że w rzeczywistości bufory urządzeń sieciowych mają skończony rozmiar, a ich przepełnienie ma wpływ na zachowanie urządzenia. Systemy z nieskończonym buforem są ważne z teoretycznego punktu widzenia, a ich charakterystyki mogą zostać uzyskane na postawie charakterystyk ich odpowiedników ze skończonym buforem przy założeniu jego odpowiednio wielkiego rozmiaru.

Podstawowe charakterystyki modeli kolejkowych ze skończonym buforem kolejki dla stanu ustalonego można znaleźć w większości monografii dotyczących teorii masowej obsługi [1, 96, 98, 99]. W przypadku analizy tranzytywnej tego typu modeli, oprócz wcześniej przytoczonej długości kolejki i opóźnienia kolejkowania, w literaturze można znaleźć wyniki dotyczące okresów przepełnienia bufora [132, 135–137], liczby utraconych pakietów [138, 139]. Okres przepełnienia bufora został scharakteryzowany również dla modeli ze strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona [140–142], a także dla ogólnego strumienia wejściowego [143]. Po-

nadto w literaturze można znaleźć tranzytywną charakterystykę procesu liczącego obsłużone zgłoszenia dla modelu kolejkowego typu $M^X/G/1/K$ [144].

2.1. Kolejkowanie procesów Poissona

2.1.1. Opis modelu

Rozważmy system kolejkowy, w którym napływ pakietów jest modelowany za pomocą procesu Poissona z parametrem λ, który opisuje intensywność strumienia wejściowego. Obsługa zgłoszeń następuje według zmiennej losowej o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym dystrybuantą F oraz według dyscypliny FIFO. Ponadto, będziemy zakładać, że w systemie występuje jedno stanowisko obsługi pakietów oraz $K-1$ miejsc w kolejce, stąd w systemie może przebywać nie więcej niż K zgłoszeń.

Wyniki analityczne zaprezentowane poniżej są w postaci transformat Laplace'a (sekcja A.4), a do ich wyznaczenia wykorzystano metodologię opartą na włożonych łańcuchach Markowa (sekcja A.2.4), potencjale błądzenia losowego (sekcja A.9) oraz twierdzeniu o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych (sekcja A.1.4.7).

2.1.2. Długość kolejki

Niech $X(t)$ oznacza liczbę pakietów znajdujących się w systemie w chwili t. Tranzytywna analiza długości kolejki systemu jest możliwa przy wykorzystaniu rozkładu warunkowego prawdopodobieństwa pobytu m zgłoszeń w kolejce w chwili t przy założeniu, że system rozpoczął pracę z n zgłoszeniami, tzn.

$$\mathbf{P}\{X(t)=m|X(0)=n\} \quad t\geq 0, \quad m,n=0,1,...,K. \tag{2.1.1}$$

Powyższe prawdopodobieństwo można przedstawić w zwartej formie w postaci transformaty Laplace'a

$$\breve{q}_n(s,m)=\int_0^\infty \mathbf{P}\{X(t)=m|X(0)=n\}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.2}$$

gdzie Re(s) >0. W celu wyznaczenia transformaty (2.1.2) zostały wprowadzone następujące ciągi funkcyjne (a_k), (b_k), (c_k), (d_k), (r_k), (h_k) w postaci

$$a_k(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{d}F(t), \tag{2.1.3}$$

$$b_k(s)=a_{k+1}(s)+\frac{1}{f(s)}\sum_{i=0}^{k}a_i(s)-1, \tag{2.1.4}$$

$$c_k(s) = R_{k+1}(s)a_0(s) + \sum_{i=0}^{k} R_{k-i}(s)b_i(s), \tag{2.1.5}$$

$$d_k(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}(1-F(t))\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.6}$$

$$r_k(s,m) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m < k, \\ d_{m-k}(s) & \text{dla} \quad k \le m < K, \\ \dfrac{1-f(s)}{s} - \displaystyle\sum_{i=0}^{K-n-1} d_i(s) & \text{dla} \quad m = K, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

$$h_k(s,m) = \sum_{i=0}^{k} R_{k-i}(s)\left(r_K(s,m)\left(1 - \frac{1}{f(s)}\sum_{j=0}^{i} a_j(s)\right) - r_{K-i}(s,m)\right), \tag{2.1.8}$$

gdzie ciąg (R_k) jest potencjałem ciągu (a_k) (sekcja A.9).

Twierdzenie 2.1.1 ([134]) *Postać transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie typu $M/G/1/K$ jest następująca*

$$\breve{q}_n(s,m) = c_{K-n}(s)\frac{\lambda h_{K-1}(s,m) - (s+\lambda)h_K(s,m) + \delta_{0,m}}{(s+\lambda)c_K(s) - \lambda c_{K-1}(s)} + h_{K-n}(s,m), \tag{2.1.9}$$

gdzie $\delta_{i,j}$ oznacza deltę Kroneckera natomiast formuły $c_k(s)$, $h_k(s)$ zostały podane odpowiednio w (2.1.5), (2.1.8).

Korzystając z własności granicznych transformaty Laplace'a (A.4.8) można wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym (tzn. przy t dążącym do nieskończoności) w postaci

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{X(t) = m | X(0) = n\} = \lim_{s\to 0^+} s\breve{q}_n(s,m). \tag{2.1.10}$$

Wyznaczenie długości kolejki w stanie nieustalonym można zrealizować za pomocą numerycznego algorytmu odwracania transformaty Laplace'a (sekcja A.6). Ponadto, podstawiając za m wartość K uzyskujemy prawdopodobieństwo przepełnienia bufora kolejki w chwili t.

2.1.3. Opóźnienie kolejkowania

Opóźnieniem kolejkowania $V(t)$ pakietu przybyłego do systemu w chwili t nazywany jest czas jego pobytu w buforze. Charakterystyka ta nazywana jest również wirtualnym czasem oczekiwania. Przyjmuje się, że opóźnienie kolejkowania jest równe 0 w przypadku utraty pakietu. Wyznaczenie charakterystyki $V(t)$ można sprowadzić do wyznaczenia podwójnej transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania wyrażonej w postaci

$$\breve{v}_n(s,\sigma) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-sx}\mathbf{P}\{V(t) > x | X(0) = n\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.11}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$ i $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$. Podobnie jak w przypadku długości kolejki systemu typu $M/G/1/K$, do wyznaczenia podwójnej transformaty (2.1.11) zostały wykorzystane ciągi funkcyjne (a_k), (d_k), (e_k), (q_k), (y_k), (z_k) określone następująco

$$e_k(s,\sigma) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\sigma)t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}_x F(x+t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.1.12}$$

$$q_k(s,\sigma) = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{K-k-1}\left(d_i(\sigma) - e_i(s,\sigma)(f(s))^{k+i-1}\right), \tag{2.1.13}$$

$$y_k(s,\sigma) = q_K(s,\sigma)\left(1 - \frac{1}{f(\sigma)}\sum_{i=0}^{k} a_i(\sigma)\right) - q_{K-k}(s,\sigma), \tag{2.1.14}$$

$$z_n(s,\sigma) = \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}(\sigma)y_i(s,\sigma), \tag{2.1.15}$$

przy czym ciągi (a_k), (d_k) zostały podane odpowiednio w (2.1.3), (2.1.6), natomiast ciąg (R_k) jest potencjałem ciągu (a_k) (sekcja A.9).

Twierdzenie 2.1.2 ([134]) *Podwójna transformata Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania w systemie typu $M/G/1/K$ ma postać*

$$\breve{v}_n(s,\sigma) = c_{K-n}(\sigma)\frac{\lambda z_{K-1}(s,\sigma) - (\sigma+\lambda)z_K(s,\sigma)}{(\sigma+\lambda)c_K(\sigma) - \lambda c_{K-1}(\sigma)} + z_{K-n}(s,\sigma), \tag{2.1.16}$$

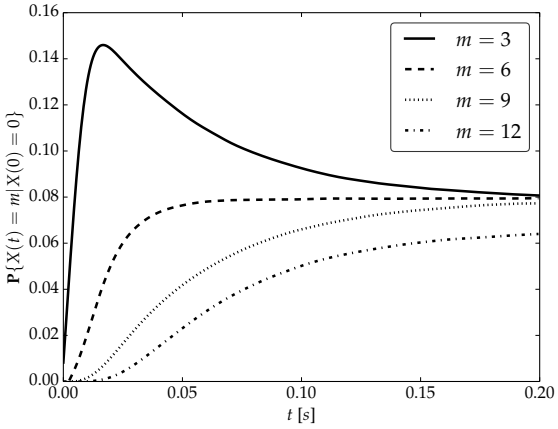
gdzie ciągi (c_k), (z_k) zostały odpowiednio zdefiniowane w (2.1.5) i (2.1.15).

Przykład Rozpatrzmy węzeł sieci bezprzewodowej o pojemności $K = 12$. Pakiety o wielkości 500 B napływają do węzła sieci według procesu Poissona z intensywnością 1.6 Mb/s. Zatem do systemu średnio wpływa $\lambda = 400$ pakietów na sekundę zgodnie z rozkładem wykładniczym, natomiast średni czas pomiędzy kolejnymi wpływami do systemu wynosi 2.5 ms. Rozpatrzmy dwie prędkości obsługi zgłoszeń odpowiednio 1.6 Mb/s i 2 Mb/s, gdzie transmisja pakietów przebiega według rozkładu gamma (sekcja A.1.5.4) z parametrami $k = 1.5$ oraz odpowiednio $\bar{\mu} = 600$ lub $\bar{\mu} = 750$. W zależności od prędkości transmisji, serwer potrzebuje 2.5 lub 2 ms, aby obsłużyć pakiet i być gotowym do obsługi kolejnego pakietu. Stąd, współczynnik wykorzystania serwera wynosi $\rho = \frac{\lambda}{\bar{\mu}/k} = 1$ lub $\rho = 0.8$ w zależności od intensywności transmisji pakietów. Rysunki 2.1.1(a) i 2.1.1(b) przedstawiają prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{X(t) = m|X(0) = 0\}$ pobytu m pakietów systemie w chwili t odpowiednio dla $\rho = 1$ lub $\rho = 0.8$ oraz $m = 3, 6, 9$ i 12. Kolejne rysunki 2.1.1(c) i 2.1.1(d) ilustrują liczbę pakietów w systemie w przypadku losowych realizacji pracy systemu. Para rysunków 2.1.1(e) i 2.1.1(f) to rozkłady prawdopodobieństwa liczby pakietów w systemie w chwili $t = 0.2$. Na postawie uzyskanych wyników można zaobserwować, że prawdopodobieństwo przepełnienia bufora systemu jest znacznie większe

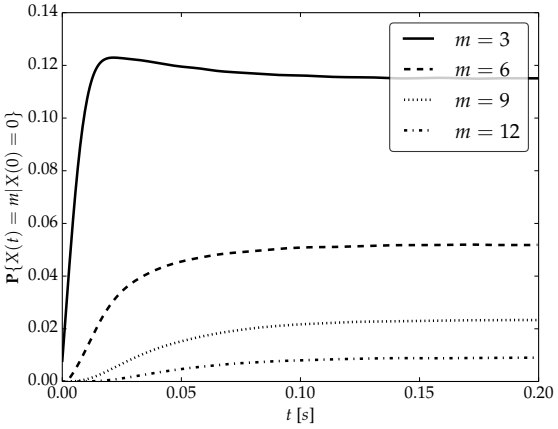
w przypadku systemu ze współczynnikiem $\rho = 1$, co nie jest zaskoczeniem. Ponadto, do przepełnienia bufora może dojść relatywnie szybko po rozpoczęciu pracy systemu, co pokazuje rysunek 2.1.1(d). Na podstawie formuły (2.1.10) został wyznaczony rozkład długości kolejki w stanie ustalonym odpowiednio dla $\rho = 0.8$ i $\rho = 1$, co przedstawia tabela 2.1.1. Można zaobserwować, że w chwili $t = 0.2$ zachowanie systemu stabilizuje się, a prawdopodobieństwa liczby pakietów w systemie są bliskie ich wartościom granicznym. Ponadto na rysunkach 2.1.2(a), 2.1.2(b) pokazano średnią ilość pakietów w systemie w chwili t, natomiast rysunki 2.1.2(c), 2.1.2(d) przedstawiają prawdopodobieństwa opóźnień kolejkowania przekraczających odpowiednio 0.5 i 1 ms.

$\mathbf{P}\{X(\infty) = m \mid X(0) = 0\}$		
N	$\rho = 1$	$\rho = 0.8$
0	0.0685	0.2078
1	0.0785	0.1866
2	0.0803	0.1482
3	0.0806	0.1149
4	0.0808	0.0885
5	0.0798	0.0678
6	0.0796	0.0521
7	0.0787	0.0397
8	0.0781	0.0304
9	0.0772	0.0234
10	0.0771	0.0179
11	0.0767	0.0138
12	0.0641	0.0090

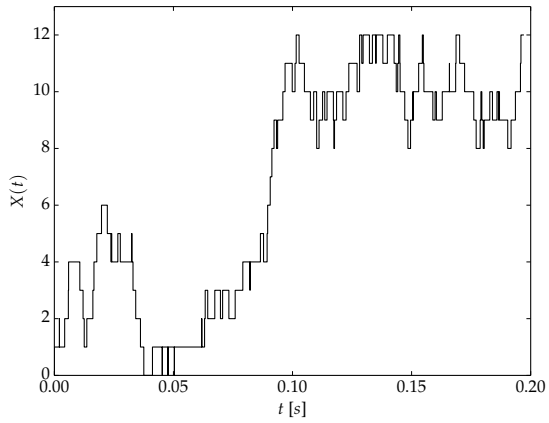
Tab. 2.1.1. Rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym odpowiednio dla $\rho = 0.8$ i $\rho = 1$.



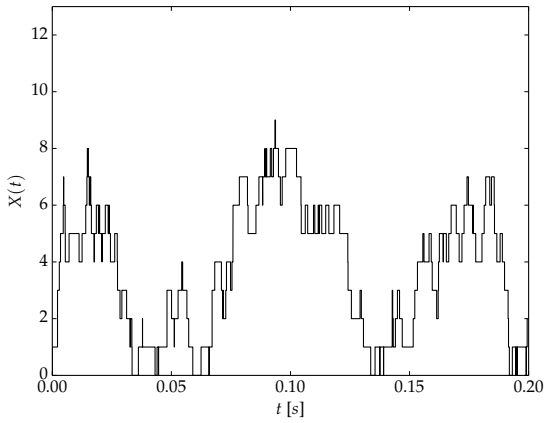
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 1$.



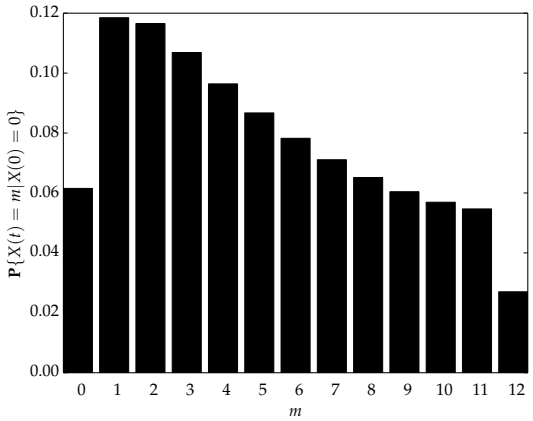
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.8$.



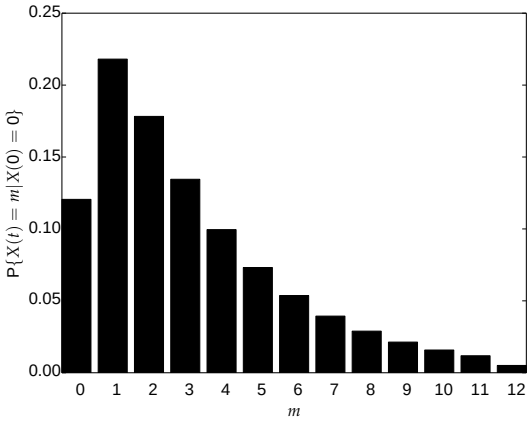
(c) Liczba pakietów w systmie w chwili t dla losowej realizacji pracy systemu, gdy $\rho = 1$.



(d) Liczba pakietów w systmie w chwili t dla losowej realizacji pracy systemu, gdy $\rho = 0.8$.

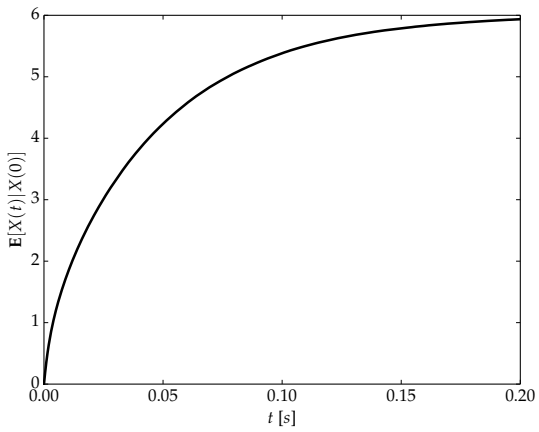


(e) Rozkład prawdopodobieństwa liczby pakietów w systmie do chwili $t = 0.2$ oraz $\rho = 1$.

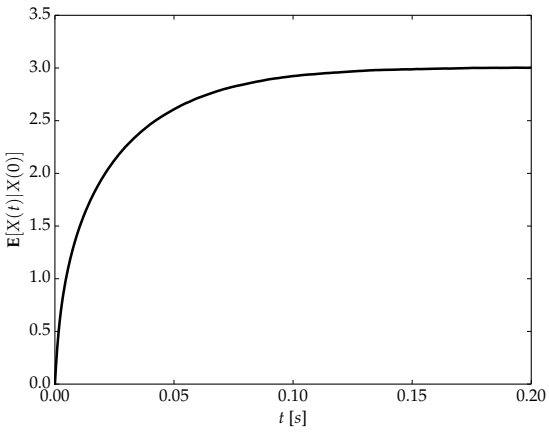


(f) Rozkład prawdopodobieństwa liczby pakietów w systmie do chwili $t = 0.2$ oraz $\rho = 0.8$.

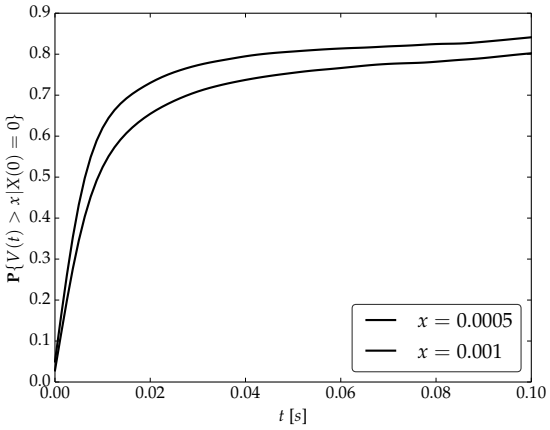
Rys. 2.1.1. Zachowanie kolejki w systemie typu $M/G/1/K$, gdzie (a), (c) i (e) dotyczą systemu, w którym obciążenie serwera wynosi $\rho = 1$, natomiast (b), (d) i (f) odnoszą się do systemu ze współczynnikiem obciążenia $\rho = 0.8$.



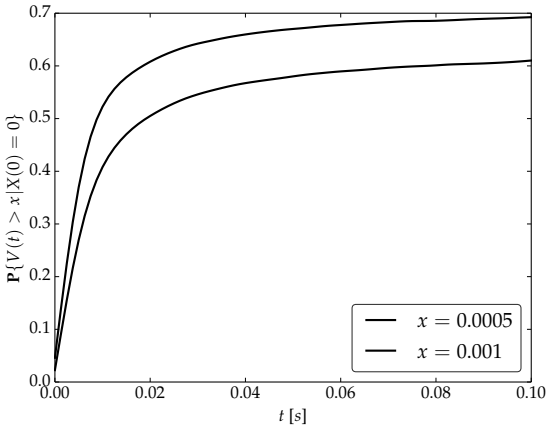
(a) Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 1$.



(b) Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.8$.



(c) Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania wiekszego niż 0.5 i 1 ms w chwili t dla $\rho = 1$.



(d) Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania wiekszego niż 0.5 i 1 ms w chwili t dla $\rho = 0.8$.

Rys. 2.1.2. Zachowanie się średniej liczby pakietów w chwili t (a), (b) oraz opóźnienia kolejkowania (c), (d) w systemach typu $M/G/1/K$, gdzie współczynnik obciążenia wynosi odpowiednio $\rho = 1$ (a), (c) i $\rho = 0.8$ (b), (d).

Rozdział 3

System kolejkowy z N-dyscypliną wybudzania serwera

Rozdział przedstawia tranzytywną analizę jednokanałowych systemów kolejkowych ze skończonym buforem, poissonowskim strumieniem wejściowym pakietów i N-dyscypliną wybudzania stanowiska obsługi. Opisane wyniki dotyczą długości kolejki [145, 146], opóźnienia kolejkowania [147] oraz procesu liczącego obsłużone zgłoszenia [148].

Jak już wspomniano wcześniej, bezprzewodowe sieci sensorowe (WSN, ang. *wireless sensor networks*) coraz częściej znajdują zastosowanie w wielu sferach życia codziennego, m.in. są wykorzystywane do monitorowania zanieczyszczenia powietrza, zanieczyszczenia wody, zagrożenia pożarowego, czy ruchu drogowego. Podstawowym elementem WSN jest węzeł wyposażony w urządzenie pomiarowe, nadajnik/odbiornik radiowy, mikroprocesor oraz źródło zasilania. Ze względu na szeroki zakres zastosowań sieci sensorowych, zdarza się, że węzły sieci są rozmieszczone w trudno dostępnych miejscach, w wyniku czego kwestia oszczędności poboru energii przez węzły jest kluczowa w rozwoju tego typu sieci. W [8, 9] zaproponowano wykorzystanie systemu kolejkowego typu $M/G/1$ z N-dyscypliną wybudzania serwera do modelowania mechanizmu oszczędzania energii w węzłach sieci sensorowych. Podobne mechanizmy modelowane poprzez systemy kolejkowe z różnego rodzaju przestojami pracy serwera zostały omówione w [10–12], niemniej jednak rezultaty tych prac dotyczyły wyłącznie stanu ustalonego omawianych systemów. Analiza tranzytywna tego typu modeli jest niezbędna do ich obserwacji bezpośrednio po rozpoczęciu pracy, ale także w wielu innych sytuacjach, kiedy to system traci stabilność i przechodzi do stanu nieustalonego np. w sytuacji spiętrzenia pakietów, rzadkiej transmisji zgłoszeń, co jest typowe w WSN, zmianie parametrów systemu takich jak rozmiar bufora, czy też w przypadku przerw w pracy systemu.

W modelach kolejkowych z N-dyscypliną wybudzania, stanowisko obsługi zgło-

szeń rozpoczyna pracę w momencie, gdy w systemie zostaje zakumulowanych N zgłoszeń i pracuje do chwili, gdy wszystkie zgłoszenia zostaną obsłużone. Następnie, serwer przechodzi w stan oczekiwania i zostaje aktywowany ponownie w momencie akumulacji N zgłoszeń. Zatem, pobór energii przez stanowisko obsługi w okresach ładowania bufora jest ograniczony. Próg N można ustalić w zależności od przeznaczenia sieci sensorowej, np. w przypadku monitorowania zagrożenia pożarowego jego wartość może być niższa niż w przypadku sieci monitorującej ilość wolnych miejsc na parkingu.

3.1. Kolejkowanie procesów Poissona

3.1.1. Opis modelu

Rozważmy jednokanałowy system kolejowy $M/G/1/K$ z poissonowskim strumieniem wejściowym o intensywności λ, skończonym buforem o długości $K-1$ i jednym miejscem w punkcie obsługi pakietów. Zakładamy, że czas obsługi zgłoszeń ma dowolny rozkład określony dystrybuantą F, natomiast transmisja zgłoszeń przebiega według dyscypliny FIFO. System rozpoczyna pracę z pustym buforem, natomiast obsługa zgłoszeń zostaje zainicjowana natychmiast, gdy liczba zgłoszeń w kolejce osiągnie próg N, gdzie $1 \leq N \leq K$. Po obsłużeniu wszystkich zgłoszeń, system ponownie przechodzi w stan oczekiwania na N pakietów w buforze kolejki. Zatem, system może być obserwowany w następujących po sobie okresach akumulacji N pakietów (*ładowania* bufora) $L_1, L_2, ...$, po których następują kolejne okresy obsługi zgłoszeń (*okresy zajętości* z ang. *busy period*) przez serwer $B_1, B_2, ...$ trwające do momentu opróżnienia bufora systemu. Ze względu na własność braku pamięci rozkładu wykładniczego czasów pomiędzy napływami kolejnych pakietów, momenty inicjalizacji oraz zakończenia następujących po sobie okresów obsługi zgłoszeń $B_1, B_2, \ldots$ są momentami Markowa. Stąd korzystając z podejścia opartego o metodologię włożonych łańcuchów Markowa (sekcja A.2.4), (L_k) i (B_k) dla $k = 1, 2, ...$ mogą być scharakteryzowane przez ciągi niezależnych zmiennych losowych o tych samych dystrybuantach odpowiednio dla każdego z ciągów.

3.1.2. Czas trwania okresów ładowania bufora

Czas trwania każdego okresu ładowania bufora ma rozkład Erlanga rzędu N z parametrem λ (sekcja A.2.2), stąd otrzymujemy

$$\widetilde{g}^L(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\mathbf{P}\{L_k < t\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{\lambda^N}{(N-1)!}t^{N-1}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^N, \quad (3.1.1)$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$.

3.1.3. Czas trwania okresów obsługi zgłoszeń

Oznaczmy przez $\widetilde{g}_n^B$ transformatę Laplace'a-Stieltjesa (sekcja A.5) dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa czasu trwania okresu obsługi zgłoszeń, który zostaje zainicjowany przy $1 \leq n \leq K$ pakietach w buforze kolejki, tzn.

$$\widetilde{g}_n^B(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\mathbf{P}\{B_k < t\}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{3.1.2}$$

Na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcje A.1.3, A.1.4.7) otrzymujemy następujący układ równań

$$\widetilde{g}_1^B(s) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\widetilde{g}_i^B(s) + \widetilde{g}_{K-1}^B(s) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \theta_1(s), \tag{3.1.3}$$

$$\widetilde{g}_n^B(s) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i(s)\widetilde{g}_{n+i-1}^B(s) + \widetilde{g}_{K-1}^B(s) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i(s) + \theta_n(s), \quad 2 \leq n \leq K, \tag{3.1.4}$$

gdzie

$$a_n(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,\mathrm{d}F(t), \tag{3.1.5}$$

$$\theta_n(s) \stackrel{def}{=} \begin{cases} f(\lambda + s), & n = 1, \\ 0, & n \geq 2, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

oraz

$$f(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}F(t). \tag{3.1.7}$$

Ciąg funkcyjny (a_n) będzie się pojawiał wielokrotnie w dalszej części pracy, stąd warto zauważyć, że $a_i(s)$ oznacza transformatę Laplace'a-Stieltjesa tranzytywnego rozkładu prawdopodobieństwa wpływu i zgłoszeń pomiędzy dwiema następującymi po sobie realizacjami obsługi zgłoszeń wg rozkładu z dystrybuantą F. Następnie, po dokonaniu w równaniach (3.1.3), (3.1.4) podstawienia $\widetilde{w}_n^B(s) \stackrel{def}{=} \widetilde{g}_{K-n}^B(s)$ dla $0 \leq n \leq K-1$, otrzymujemy

$$\widetilde{w}_{K-1}^B(s) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\widetilde{w}_{K-i}^B(s) + \widetilde{w}_1^B(s) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \theta_1(s), \tag{3.1.8}$$

$$\sum_{k=-1}^{n} a_{k+1}(s)\widetilde{w}_{n-k}^B(s) - \widetilde{w}_n^B(s) = \phi_n(s), \tag{3.1.9}$$

gdzie $0 \leq n \leq K-2$ oraz

$$\phi_n(s) \stackrel{def}{=} a_{n+1}(s)\widetilde{w}_0^B(s) - \widetilde{w}_1^B(s) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(s) - \theta_{K-n}(s). \tag{3.1.10}$$

W pracy [149] dowiedziono, że postać rozwiązania nieskończonego układu równań typu (3.1.9) jest następująca

$$\widetilde{w}_n^B(s) = C(s)R_{n+1}(s) + \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}(s)\phi_i(s), \tag{3.1.11}$$

gdzie $C(s)$ jest niezależne od n, natomiast (R_n) jest potencjałem ciągu (a_n) (sekcja A.9). Układ (3.1.9) jest skończony, stąd do wyznaczenia $C(s)$ można wykorzystać (3.1.8) jako warunek brzegowy. Ponadto, aby uzyskać postać (3.1.11) należy znaleźć formuły dla $\widetilde{w}_0^B(s)$ i $\widetilde{w}_1^B(s)$, które występują w (3.1.10). Na podstawie równania (3.1.11) dla $n = 0$ otrzymujemy

$$C(s) = a_0(s)\widetilde{w}_0^B(s). \tag{3.1.12}$$

Podobnie, podstawiając $n = 0$ w (3.1.9), uzyskujemy

$$\widetilde{w}_1^B(s) = \frac{\phi_0(s) + \widetilde{w}_0^B(s)\big(1 - a_1(s)\big)}{a_0(s)}. \tag{3.1.13}$$

Zatem, na podstawie (3.1.10), (3.1.12), (3.1.13) formułę $\widetilde{w}_n^B(s)$ (3.1.11) dla $n \geq 1$ można zapisać następująco

$$\widetilde{w}_n^B(s) = \gamma_n(s)\widetilde{w}_0^B(s) + \eta_n(s), \quad n \geq 0, \tag{3.1.14}$$

gdzie

$$\gamma_n(s) \stackrel{def}{=} a_0(s)R_{n+1}(s) + \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}(s)\left(a_{i+1}(s) - \frac{1}{f(s)}\sum_{j=i+1}^{\infty} a_j(s)\right) \tag{3.1.15}$$

oraz

$$\eta_n(s) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}(s)\left(\frac{\theta_K(s)}{1 + a_0(s)} - \theta_{K-i}(s)\right). \tag{3.1.16}$$

Podstawiając (3.1.13) i (3.1.14) w (3.1.8) otrzymujemy $\widetilde{w}_0^B(s)$ w postaci

$$\widetilde{w}_0^B(s) = \frac{\Pi_1(s)}{\Pi_2(s)}, \tag{3.1.17}$$

gdzie

$$\Pi_1(s) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\eta_{K-i}(s) + \eta_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \theta_1(s) - \eta_{K-1}(s), \tag{3.1.18}$$

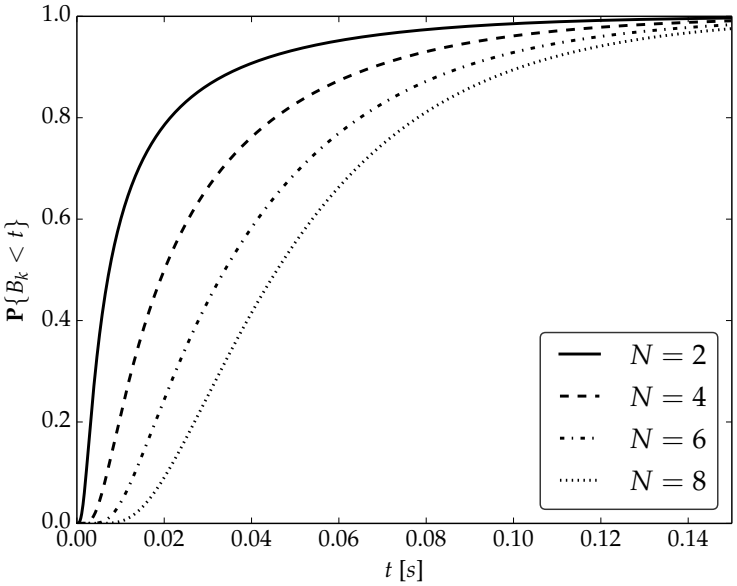
$$\Pi_2(s) \stackrel{def}{=} \gamma_{K-1}(s) - \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\gamma_{K-i}(s) - \frac{1}{f(s)}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s). \tag{3.1.19}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że w rozważanym systemie wszystkie okresy pracy serwera rozpoczynają się, gdy w buforze kolejki zostaje zakumulowanych N zgłoszeń oraz $\widetilde{w}_n^B(s) = \widetilde{g}_{K-n}^B(s)$ dla $0 \leq n \leq K-1$ otrzymujemy transformatę Laplace'a-Stieltjesa dystrybuanty czasu trwania okresów obsługi zgłoszeń w postaci

$$\widetilde{g}^B(s) \stackrel{def}{=} \widetilde{g}_N^B(s) = \frac{\gamma_{K-N}(s)\Pi_1(s)}{\Pi_2(s)} + \eta_{K-N}(s), \tag{3.1.20}$$

gdzie $n \geq 0$.

Przykład Rozważmy węzeł sieci o pojemności $K = 10$, do którego wpływają pakiety o rozmiarze 100 B z intensywnością 300 kb/s według procesu Poissona, tzn. do systemu wpływa średnio $\lambda = 375$ pakietów na sekundę. Obsługa pakietów przebiega z intensywnością 400 kb/s zgodnie z rozkładem Erlanga (sekcja A.1.5.3) z parametrami $k = 2$ oraz $\bar{\mu} = 1000$. Stąd, współczynnik obciążenia systemu wynosi $\rho = 0.75$. Na rysunku 3.1.1 przedstawiono zachowanie prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{B_k < t\}$ w zależności od czasu, gdzie $t \in [0, 0.15]$ dla $N = 2, 4, 6, 8$. Z rysunku wynika, że zwiększenie wartości parametru N zmniejsza prawdopodobieństwo zakończenia okresu pracy serwera. Niemniej jednak, dla wyższych wartości N rozkład $\mathbf{P}\{B_k < t\}$ stabilizuje się nieznacznie później, niż ma to miejsce w przypadku N z niskimi wartościami. Ponadto, dla rozpatrywanych wartości N otrzymujemy $\mathbf{P}\{B_k < t\} = 1$ w podobnych momentach czasu t. Stąd, niezależnie od wartości progu wybudzania N, prawdopodobieństwo, że czas trwania pojedynczego okresu B_k przekroczy 0.14 s jest niemal zerowe



Rys. 3.1.1. Wartości prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{B_k < t\}$ w systemie kolejkowym typu $M/G/1/K$ z progową dyscypliną wybudzania serwera odpowiednio dla $N = 2, 4, 6$ i 8.

3.1.4. Długość kolejki

Sekcja przedstawia analizę długości kolejki w systemach typu $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania stanowiska obsługi [145]. Podobnie jak w przypadku czasu obsługi zgłoszeń, zaprezentowana charakterystyka jest w postaci transformaty Laplace'a (sekcja A.4), uzyskanej na podstawie metodologii włożonych łańcuchów Markowa (sekcja A.2.4), twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych (sekcja A.1.4.7), teorii odnowy oraz algebry liniowej. W ramach uzupełnienia można dodać, że zależny od czasu rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla modeli z nieskończonym buforem i N-dyscypliną wybudzania oraz innymi ograniczeniami narzuconymi na pracę serwera można znaleźć w [150, 151].

Liczba pakietów będących w systemie w chwili t będzie oznaczana poprzez $X(t)$, natomiast wynikiem poniższych rozważań będzie postać następującej transformaty

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{X(t)=m\}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re(s)}>0. \tag{3.1.21}$$

Długość kolejki w okresach ładowania bufora

Rozważmy zachowanie długości kolejki w pierwszym okresie ładowania bufora L_1, który rozpoczyna się w chwili $t=0$ oraz kończy, gdy w buforze zakumulowanych zostaje N pakietów. Ponieważ strumień wejściowy jest określony przez proces Poissona, otrzymujemy

$$\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_1\big)\} = \mathrm{I}\{0\le m\le N-1\}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}, \tag{3.1.22}$$

gdzie $t\ge 0$, natomiast $\mathrm{I}\{\mathbb{A}\}$ jest funkcją charakterystyczną (indykatorem) zdarzenia losowego $\mathbb{A}$. Po wprowadzeniu następującej notacji

$$\widetilde{q}^L(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_1\big)\}\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.23}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s)>0$, na podstawie (3.1.22) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widetilde{q}^L(s,m) &= \mathrm{I}\{0\le m\le N-1\}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{I}\{0\le m\le N-1\}\frac{\lambda^m}{(\lambda+s)^{m+1}}.\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Długość kolejki w okresach obsługi zgłoszeń

Załóżmy tymczasowo, że transmisja pakietów następuje gdy ich ilość w buforze osiągnie dowolną wartość $1\le n\le K$. Niech $Q_n^B(t,m)$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa długości kolejki w chwili $t\in B_1$ warunkowanym przez liczbę n pakietów w buforze systemu w momencie rozpoczęcia okresu B_1

$$Q_n^B(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_1\big)|\,X(0)=n\}, \tag{3.1.25}$$

gdzie $t > 0$, $1 \leq m \leq K$ oraz B_1 jest pierwszym okresem obsługi zgłoszeń. Powyżej w (3.1.25) zakładamy dla uproszczenia rozważań, że okres B_1 rozpoczyna się w chwili $t = 0$. Korzystając z faktu, że kolejne momenty zakończenia obsługi zgłoszeń są momentami Markowa [152], na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcje A.1.3, A.1.4.7) względem momentu zakończenia pierwszej transmisji zgłoszenia po $t = 0$ otrzymujemy następujący układ równań całkowych Volterry

$$\begin{aligned} Q_1^B(t,m) = &\sum_{i=1}^{K-2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} Q_i^B(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \sum_{i=K-1}^{\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} Q_{K-1}^B(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \overline{F}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\mathrm{I}\{1 \leq m \leq K-1\} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right), \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

oraz dla $2 \leq n \leq K$

$$\begin{aligned} Q_n^B(t,m) = &\sum_{i=0}^{K-n-1} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} Q_{n+i-1}^B(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \sum_{i=K-n}^{\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} Q_{K-1}^B(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \overline{F}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\mathrm{I}\{n \leq m \leq K-1\} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right), \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

gdzie $\overline{F}(t) \stackrel{def}{=} 1 - F(t)$. Pierwsze składniki prawych stron równań (3.1.26), (3.1.27) dotyczą sytuacji, kiedy to przed zakończeniem pierwszej obsługi zgłoszenia w chwili $y < t$ w buforze kolejki jest co najmniej jedno miejsce wolne, drugie składniki odnoszą się do przypadku, gdy do chwili y wszystkie miejsca w buforze są zajęte. Natomiast ostatnie składniki opisują sytuację, w której pierwsza obsługa zgłoszenia kończy się po czasie t.

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\widetilde{q}_n^B(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} Q_n^B(t,m)\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.28}$$

$$\begin{aligned} \zeta_n(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t} \overline{F}(t) \Bigg(&\mathrm{I}\{n \leq m \leq K-1\} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \\ &+ \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \Bigg)\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$. Stąd, równania (3.1.26), (3.1.27) można zapisać w postaci

$$\widetilde{q}_1^B(s,m) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\widetilde{q}_i^B(s,m) + \widetilde{q}_{K-1}^B(s,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \zeta_1(s,m), \tag{3.1.30}$$

oraz

$$\widetilde{q}_n^B(s,m) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i(s)\widetilde{q}_{n+i-1}^B(s,m) + \widetilde{q}_{K-1}^B(s,m) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i(s) + \zeta_n(s,m), \tag{3.1.31}$$

dla $2 \le n \le K$ oraz ciągu (a_n) zdefiniowanego w (3.1.5). Po dokonaniu w równaniach (3.1.30), (3.1.31) podstawienia $\widetilde{d}_n^B(s,m) \stackrel{def}{=} \widetilde{q}_{K-n}^B(s,m)$ dla $0 \le n \le K-1$ otrzymujemy

$$\widetilde{d}_{K-1}^B(s,m) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\widetilde{d}_{K-i}^B(s,m) + \widetilde{d}_1^B(s,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \zeta_1(s,m), \tag{3.1.32}$$

$$\sum_{k=-1}^{n} a_{k+1}(s)\widetilde{d}_{n-k}^B(s,m) - \widetilde{d}_n^B(s,m) = \psi_n(s,m), \tag{3.1.33}$$

gdzie $0 \le n \le K-2$ oraz

$$\psi_n(s,m) \stackrel{def}{=} a_{n+1}(s)\widetilde{d}_0^B(s,m) - \widetilde{d}_1^B(s,m) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(s) - \zeta_{K-n}(s,m). \tag{3.1.34}$$

Postępując analogicznie jak (3.1.11)–(3.1.19), na podstawie metody potencjału (sekcja A.9) otrzymujemy rozwiązanie (3.1.33) w postaci

$$\widetilde{d}_n^B(s,m) = \gamma_n(s)\widetilde{d}_0^B(s,m) + \kappa_n(s,m), \quad n \ge 0, \tag{3.1.35}$$

gdzie

$$\kappa_n(s,m) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}(s)\left(\frac{\zeta_K(s,m)}{f(s)} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j(s) - \zeta_{K-i}(s,m)\right), \tag{3.1.36}$$

natomiast ciąg (γ_n) został określony w (3.1.15). Ponadto

$$\widetilde{d}_1^B(s,m) = \frac{\widetilde{d}_0^B(s,m) - \zeta_K(s,m)}{f(s)}, \tag{3.1.37}$$

oraz

$$\widetilde{d}_0^B(s,m) = \frac{\Lambda_1(s,m)}{\Lambda_2(s)}, \tag{3.1.38}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Lambda_1(s,m) \stackrel{def}{=} & \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\kappa_{K-i}(s,m) - \frac{\zeta_K(s,m)}{f(s)} \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) \\ & + \zeta_1(s,m) - \kappa_{K-1}(s,m),\end{aligned} \tag{3.1.39}$$

i $\Lambda_2(s) \stackrel{def}{=} \Pi_2(s)$ dla $\Pi_2(s)$ zdefiniowanego w (3.1.19).

Korzystając z faktu, że $\widetilde{d}_n^B(s,m) = \widetilde{q}_{K-n}^B(s,m)$ dla $0 \le n \le K-1$, transformata Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w okresach obsługi zgłoszeń w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania ma postać

$$\widetilde{q}^B(s,m) \stackrel{def}{=} \widetilde{q}_N^B(s,m) = \frac{\gamma_{K-N}(s)\Lambda_1(s,m)}{\Lambda_2(s)} + \kappa_{K-N}(s,m), \quad n \ge 0, \tag{3.1.40}$$

Podobna metodologia została wykorzystana w pracy [153] do wyznaczenia zależnego od czasu rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki dla systemu typu $M/G/1/K$.

Długość kolejki w systemach typu $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania

Rezultatem powyższych rozważań jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.1 *W systemie typu $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania postać transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki jest następująca*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{X(t)=m\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{q}^L(s,m) + \widetilde{g}^L(s)\widetilde{q}^B(s,m)}{1-\widetilde{g}^B(s)\widetilde{g}^L(s)}, \tag{3.1.41}$$

gdzie Re(s) > 0, *natomiast* $\widetilde{q}^L(s,m)$, $\widetilde{g}^L(s)$, $\widetilde{q}^B(s,m)$ *i* $\widetilde{g}^B(s)$ *zostały wyznaczone odpowiednio w (3.1.24), (3.1.1), (3.1.40) i (3.1.20).*

Dowód Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcja A.1.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X(t)=m\} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(&\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_i\big)\}\\ &+\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_i\big)\}\Big).\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

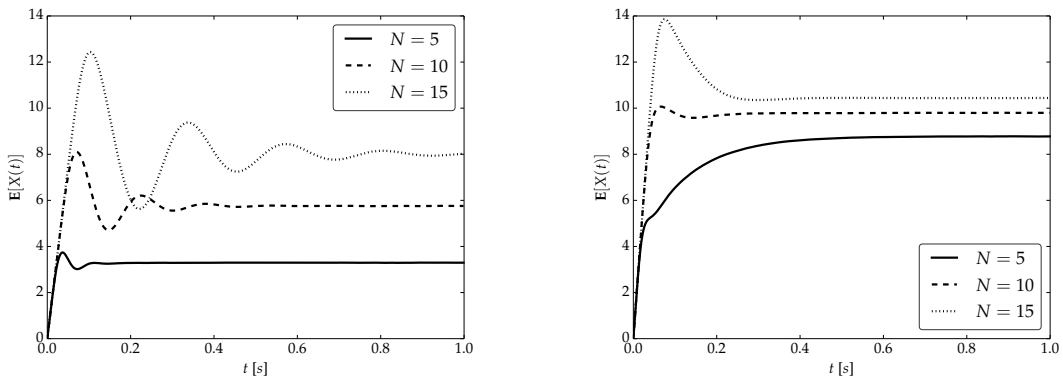
Zmienne losowe odpowiadające okresom L_k i B_k dla $k \ge 1$ są niezależne oraz mają odpowiednio identyczne rozkłady prawdopodobieństwa, stąd

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_i\big)\}\\ &= \int_0^t \mathbf{P}\{\big(X(t-y)=m\big)\cap\big(t-y\in L_1\big)\}\,\mathrm{d}\big(S^L * S^B\big)^{(i-1)*}(y),\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_i\big)\}\\ &= \int_0^t \mathbf{P}\{\big(X(t-y)=m\big)\cap\big(t-y\in B_1\big)\}\,\mathrm{d}\Big(\big(S^L\big)^{i*} * \big(S^B\big)^{(i-1)*}\Big)(y),\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

gdzie $S^L(t)$ i $S^B(t)$ są odpowiednio dystrybuantami $\mathbf{P}\{L_k < t\}$ i $\mathbf{P}\{B_k < t\}$. Biorąc transformaty Laplace'a (3.1.43) i (3.1.44) wyrażenie (3.1.42) sprowadza się do (3.1.41).

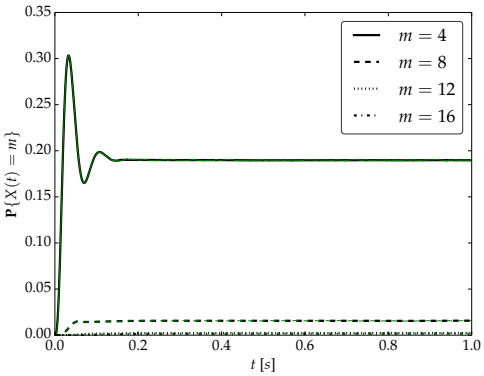
Przykład Załóżmy, że pakiety o średniej wielkości 250 B wpływają do węzła sieci z mechanizmem progowego wybudzania serwera oraz buforem kolejki o rozmiarze 15, tzn. $K = 16$. Zachowanie strumienia wejściowego jest modelowane za pomocą procesu Poissona. Ponadto, rozpatrzymy dwie intensywności napływu pakietów odpowiednio 300 kb/s i 500 kb/s, co daje $\lambda_1 = 150$ i $\lambda_2 = 250$ pakietów na sekundę oraz średnie czasy pomiędzy kolejnymi wpływami 6.(6) i 4 ms. Obsługa zgłoszeń przebiega według rozkładu Pareto (sekcja A.1.5.6) z parametrem kształtu $k = 2.5$ oraz parametrem skali $\bar{\mu} = 416,667$, co daje intensywność obsługi na poziomie 500 kb/s. Zatem, w zależności od intensywności napływu zgłoszeń otrzymujemy obciążenie serwera na poziomie $\rho = 0.6$ lub $\rho = 1$. Ponadto, zachowanie długości kolejki zostanie przedstawione dla trzech progów inicjacji pracy serwera: 5, 10 i 15 pakietów. Średnia liczba pakietów w systemie w przedziale czasu $[0, 1]$ została przedstawiona na rysunku 3.1.2. Następnie, na rysunku 3.1.3 zaprezentowano zachowanie długości kolejki w zależności od obciążenia systemu ρ oraz różnych wartości progowych N. Przedstawione wyniki analityczne (kolor czarny) zostały zweryfikowane za pomocą symulacji zdarzeń dyskretnych 1.8.2 (kolor zielony). Można zauważyć, że im większa wartość N, tym więcej czasu system potrzebuje na stabilizację oraz zwiększa się prawdopodobieństwo przepełnienia bufora. Niemniej jednak, nawet przy wysokich wartościach N, dla systemów z niskim współczynnikiem ρ prawdopodobieństwo przepełnia jest relatywnie niskie. W tabeli 3.1.1 przedstawiono rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym, które odpowiadają rezultatom zilustrowanym na rysunku 3.1.3. Rysunek 3.1.4 zawiera przestrzenną wizualizację zachowania rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki wraz z upływem czasu.



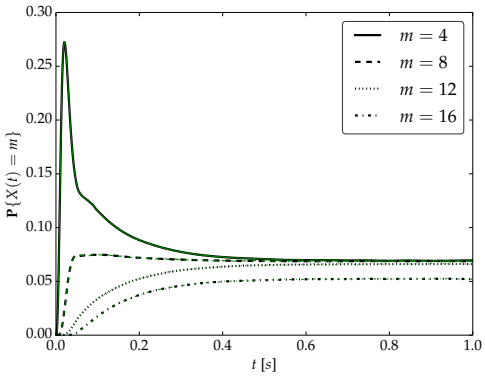
(a) Średnia liczba pakietów w systemie dla $\rho = 0.6$.

(b) Średnia liczba pakietów w systemie dla $\rho = 1$.

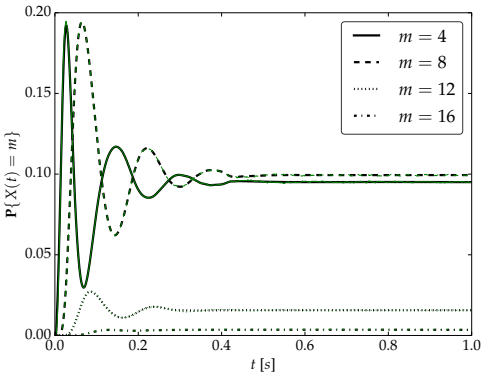
Rys. 3.1.2. Średnia liczbę pakietów w systemie z N-dyscypliną wybudzania serwera dla $\rho = 0.6$ (a) oraz $\rho = 1$ (b).



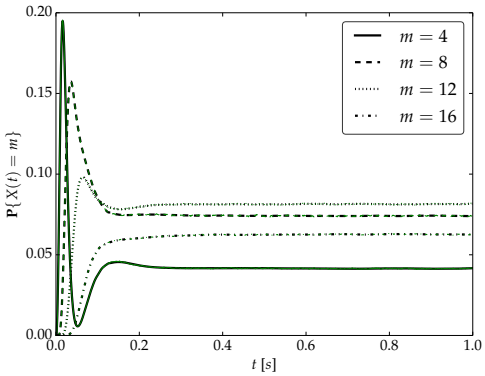
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.6$ i $N = 5$.



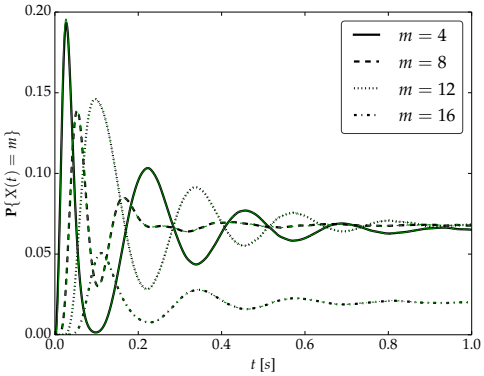
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 1$ i $N = 5$.



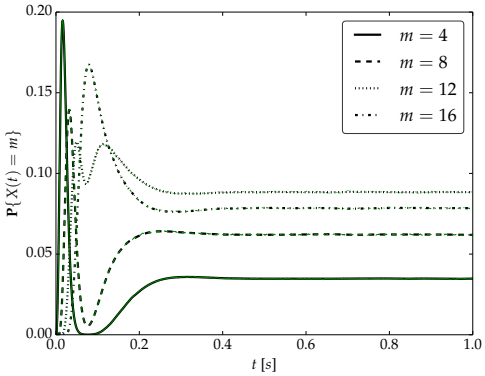
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.6$ i $N = 10$.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 1$ i $N = 10$.

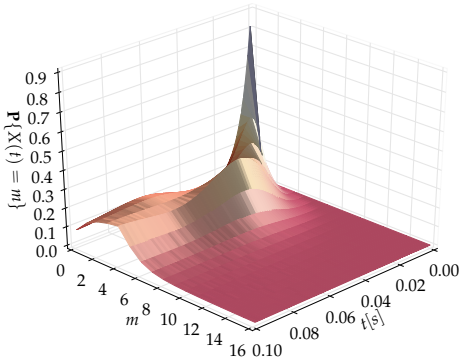


(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.6$ i $N = 15$.

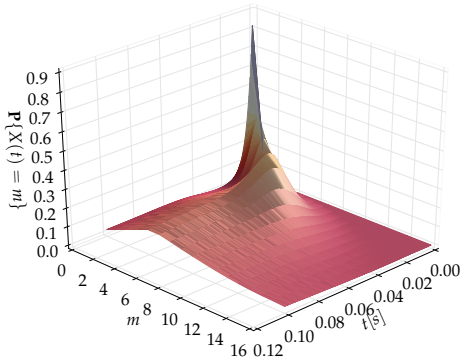


(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 1$ i $N = 15$.

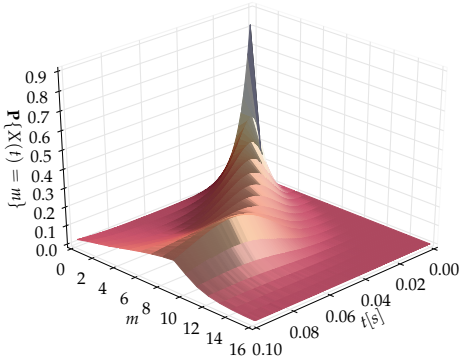
Rys. 3.1.3. Zachowanie długości kolejki w systemie z N-dyscypliną wybudzania serwera, gdzie odpowiednio zilustrowano przypadki dla $\rho = 0.6$, $\rho = 1$ oraz $N = 2, 4, 6$ i 8. Kolor czarny odpowiada wynikom analitycznym, natomiast kolor zielony odpowiada rezultatom uzyskanym za pomocą symulacji zdarzeń dyskretnych.



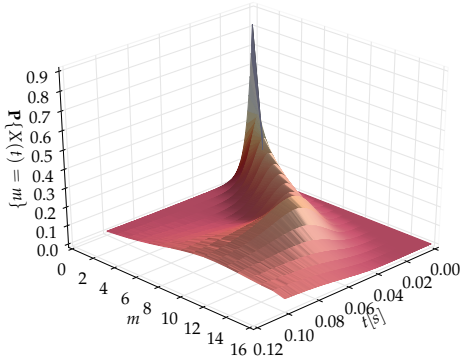
(a) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.6$ i $N = 5$.



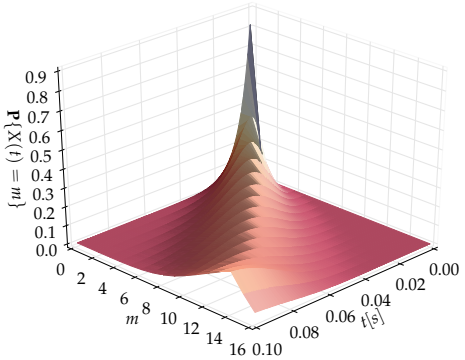
(b) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 1$ i $N = 5$.



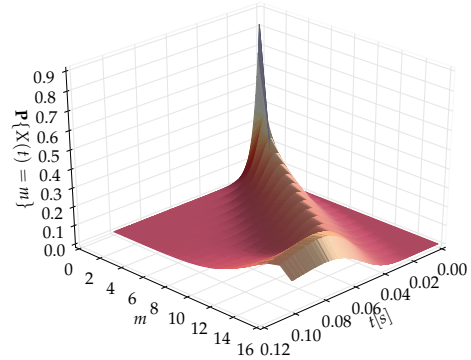
(c) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.6$ i $N = 10$.



(d) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 1$ i $N = 10$.



(e) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.6$ i $N = 15$.



(f) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 1$ i $N = 15$.

Rys. 3.1.4. Trójwymiarowa wizualizację rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w zależności od czasu, gdzie odpowiednio zilustrowano przypadki dla $\rho = 0.6$, $\rho = 1$ oraz $N = 2, 4, 6$ i 8.

$\mathbf{P}\{X(\infty) = m\}$

	$\rho = 0.6$			$\rho = 1$		
m	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$
0	0.0799	0.0403	0.0274	0.0105	0.0062	0.0054
1	0.1390	0.0692	0.0472	0.0254	0.0154	0.0126
2	0.1680	0.0844	0.0572	0.0404	0.0240	0.0203
3	0.1824	0.0914	0.0623	0.0550	0.0328	0.0279
4	0.1897	0.0950	0.0651	0.0695	0.0416	0.0347
5	0.1134	0.0970	0.0664	0.0725	0.0501	0.0417
6	0.0569	0.0986	0.0672	0.0715	0.0579	0.0484
7	0.0292	0.0991	0.0673	0.0704	0.0660	0.0549
8	0.0157	0.0994	0.0684	0.0687	0.0740	0.0619
9	0.0090	0.0997	0.0676	0.0679	0.0820	0.0689
10	0.0054	0.0599	0.0685	0.0670	0.0839	0.0749
11	0.0034	0.0304	0.0687	0.0667	0.0829	0.0817
12	0.0023	0.0156	0.0677	0.0661	0.0816	0.0884
13	0.0015	0.0085	0.0686	0.0657	0.0800	0.0949
14	0.0011	0.0049	0.0692	0.0655	0.0795	0.1020
15	0.0008	0.0031	0.0408	0.0651	0.0791	0.1026
16	0.0018	0.0035	0.0201	0.0522	0.0626	0.0785

Tab. 3.1.1. Rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie $M/G/1/K$ z progową dyscypliną wybudzania serwera w stanie ustalonym dla $\rho = 0.6$, $\rho = 1$ oraz $N = 2, 4, 6$ i 8

3.1.5. Opóźnienie kolejkowania

Sekcja dotyczy opóźnienia kolejkowania w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania serwera [147]. Podobnie jak w przypadku długości kolejki, zaprezentowana charakterystyka jest podana w postaci transformaty Laplace'a. Ponadto, wyniki na temat tranzytywnej analizy opóźnienia kolejkowania w systemach typu $M/G/1/K$ można znaleźć w [133, 154, 155], gdzie w szczególności w pracy [154] opisano opóźnienie kolejkowania dla złożonych procesów Poissona, natomiast w pracy [155] przedstawiono charakterystykę czasu oczekiwania pakietów w buforze kolejki dla systemów z pojedynczym okresem regeneracji serwera.

Przez $V(t)$ będziemy oznaczać czas oczekiwania w buforze kolejki pakietu, który wpłynął do systemu w chwili t. Wynikiem rozważań niniejszej sekcji będzie zwarta

postać transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{V(t) > x\}$, tzn.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{V(t) > x\}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re(s)} > 0. \tag{3.1.45}$$

Opóźnienie kolejkowania w okresach ładowania bufora

Rozważmy wirtualny czas oczekiwania $V(t)$ w pierwszym okresie ładowania bufora L_1. Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcje A.1.3, A.1.4.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in L_1)\} = \sum_{i=0}^{N-2} \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\Bigg(\int_0^x \mathbf{er}_{\lambda,N-i-1}(y)\overline{F}^{i*}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ + \overline{\mathbf{Er}}_{\lambda,N-i-1}(x)\Bigg) + \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{N-1}}{(N-1)!}\overline{F}^{(N-1)*}(x),\end{aligned} \tag{3.1.46}$$

gdzie $\mathbf{er}_{\lambda,j}$ i $\mathbf{Er}_{\lambda,j}$ oznaczają odpowiednio j - rzędu funkcję gęstości i dystrybuantę rozkładu Erlanga z parametrem λ, $\overline{F}$ jest ogonem rozkładu F, tzn. $\overline{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$, natomiast $F^{(j)*}$ jest j-krotnym splotem Laplace'a-Stieltjesa (sekcja A.5.8) dystrybuanty F. Wprowadźmy oznaczenie transformaty Laplace'a (sekcja A.4) rozkładu (3.1.46) w postaci

$$\widetilde{v}^L(s,x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in L_1)\}\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.47}$$

gdzie $\mathrm{Re(s)} > 0$. Podstawiając (3.1.46) w (3.1.47) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widetilde{v}^L(s,x) &= \sum_{i=0}^{N-2}\left(\int_0^x \mathbf{er}_{\lambda,N-i-1}(y)\overline{F}^{i*}(x-y)\,\mathrm{d}y + \overline{\mathbf{Er}}_{\lambda,N-i-1}(x)\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\,\mathrm{d}t \\ &+ \overline{F}^{(N-1)*}(x)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^{N-1}}{(N-1)!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=0}^{N-2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{\lambda^{N-i-1}y^{N-i-2}}{(N-i-2)!}\overline{F}^{i*}(x-y)\,\mathrm{d}y + \sum_{j=0}^{N-i-2}\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}\right) \\ &\times \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\,\mathrm{d}t + \overline{F}^{(N-1)*}(x)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^{N-1}}{(N-1)!}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.1.48}$$

Opóźnienie kolejkowania w okresach obsługi zgłoszeń

Załóżmy, że okres obsługi zgłoszeń może się rozpocząć z dowolną liczbą pakietów $1 \le n \le K$ w systemie. Rozkład prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania większego od x w okresie B_1, gdy w systemie w chwili $t = 0$ jest n pakietów będziemy oznaczać przez

$$V_n^B(t,x) = \mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in B_1)|X(0) = n\}, \tag{3.1.49}$$

gdzie $x, t > 0$. Chwile zakończenia obsługi zgłoszeń są momentami Makowa [152], stąd na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcje A.1.3, A.1.4.7) otrzymujemy następujący układ równań całkowych

$$\begin{aligned} V_1^B(t,x) = &\sum_{i=1}^{K-2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} V_i^B(t-y,x)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \sum_{i=K-1}^{\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} V_{K-1}^B(t-y,x)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{K-2} \int_t^{t+x} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \overline{F}^{i*}(x-y+t)\,\mathrm{d}F(y), \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

$$\begin{aligned} V_n^B(t,x) = &\sum_{i=0}^{K-n-1} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} V_{n+i-1}^B(t-y,x)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \sum_{i=K-n}^{\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} V_{K-1}^B(t-y,x)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{K-n-1} \int_t^{t+x} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \overline{F}^{(n+i-1)*}(x-y+t)\,\mathrm{d}F(y). \end{aligned} \tag{3.1.51}$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń

$$\widetilde{v}_n^B(s,x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} V_n^B(t,x)\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.52}$$

$$\tau_n(s,x) = \sum_{i=0}^{K-n-1} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \int_t^{t+x} \overline{F}^{(n+i-1)*}(x-y+t)\,\mathrm{d}F(y)\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.53}$$

gdzie Re(s) > 0, układ równań (3.1.50), (3.1.51) można zapisać w postaci

$$\widetilde{v}_1^B(s,x) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\widetilde{v}_i^B(s,x) + \widetilde{v}_{K-1}^B(s,x) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \tau_1(s,x), \tag{3.1.54}$$

$$\widetilde{v}_n^B(s,x) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i(s)\widetilde{v}_{n+i-1}^B(s,x) + \widetilde{v}_{K-1}^B(s,x) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i(s) + \tau_n(s,x), \tag{3.1.55}$$

gdzie $2 \le n \le K$, natomiast ciąg (a_n) został zdefiniowany w (3.1.5). Dokonując podstawienia $\widetilde{r}_n^B(s,x) = \widetilde{v}_{K-n}^B(s,x)$ w równaniach (3.1.54), (3.1.55), gdzie $0 \le n \le K-1$, otrzymamy

$$\widetilde{r}_{K-1}^B(s,x) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\widetilde{r}_{K-i}^B(s,x) + \widetilde{r}_1^B(s,x) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \tau_1(s,x), \tag{3.1.56}$$

oraz

$$\sum_{k=-1}^{n} a_{k+1}(s)\widetilde{r}_{n-k}^B(s,x) - \widetilde{r}_n^B(s,x) = \xi_n(s,x), \tag{3.1.57}$$

dla $0 \leq n \leq K-2$ i

$$\xi_n(s,x) = a_{n+1}(s)\widetilde{r}_0^B(s,x) - \widetilde{r}_1^B(s,x)\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(s) - \tau_{K-n}(s,x). \tag{3.1.58}$$

Korzystając z metody potencjału (sekcja A.9) można wyznaczyć rozwiązanie (3.1.57) w sposób analogiczny jak w przypadku czasu trwania okresu nieprzerwanej obsługi zgłoszeń (3.1.11)–(3.1.19). W konsekwencji otrzymujemy

$$\widetilde{r}_n^B(s,x) = \gamma_n(s)\widetilde{r}_0^B(s,x) + \alpha_n(s,x) \quad n \geq 0, \tag{3.1.59}$$

gdzie

$$\alpha_n(s,x) = \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}(s)\left(\frac{\tau_K(s,x)}{f(s)}\sum_{j=i+1}^{\infty} a_j(s) - \tau_{K-i}(s,x)\right), \tag{3.1.60}$$

natomiast ciąg funkcyjny (γ_n) został zdefiniowany w (3.1.15). Podstawiając $n=0$ w (3.1.57) otrzymujemy

$$\widetilde{r}_1^B(s,x) = \frac{\xi_0(s,x) + \widetilde{r}_0^B(s,x)\big(1-a_1(s)\big)}{a_0(s)}. \tag{3.1.61}$$

Postać formuły $\widetilde{r}_0^B(s,x)$ uzyskujemy poprzez podstawienie (3.1.59) do równania (3.1.56), co prowadzi do

$$\widetilde{r}_0^B(s,x) = \frac{\Gamma_1(s,x)}{\Gamma_2(s)}, \tag{3.1.62}$$

gdzie

$$\Gamma_1(s,x) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i(s)\alpha_{K-i}(s,x) - \frac{\tau_K(s,x)}{f(s)}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i(s) + \tau_1(s,x) - \alpha_{K-1}(s,x) \tag{3.1.63}$$

oraz $\Gamma_2(s) \stackrel{def}{=} \Pi_2(s)$ dla $\Pi_2(s)$ określonego w (3.1.19).

Na podstawie powyższego, postać transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{(V(t)>x)\cap(t\in B_1)|X(0)=n\}$ w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania stanowiska obsługi jest następująca

$$\widetilde{v}^B(s,x) \stackrel{def}{=} \widetilde{v}_N^B(s,x) = \frac{\gamma_{K-N}(s)\Gamma_1(s,x)}{\Gamma_2(s)} + \alpha_{K-N}(s,x), \quad n \geq 0. \tag{3.1.64}$$

Opóźnienie kolejkowania w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania

W wyniku powyższych rozważań otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1.2 *W systemie kolejkowym typu $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania serwera postać transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa wirtualnego czasu oczekiwania jest następująca*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{V(t) > x\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{v}^L(s,x) + \widetilde{g}^L(s)\widetilde{v}^B(s,x)}{1 - \widetilde{g}^B(s)\widetilde{g}^L(s)}, \tag{3.1.65}$$

gdzie $\mathrm{Re(s)} > 0$, *natomiast* $\widetilde{v}^L(s,x), \widetilde{g}^L(s), \widetilde{v}^B(s,x)$ *i* $\widetilde{g}^B(s)$ *zostały odpowiednio zdefiniowane w (3.1.48), (3.1.1), (3.1.64) i (3.1.20).*

Dowód Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcja A.1.3) otrzymujemy

$$\mathbf{P}\{V(t) > x\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in L_i)\} + \mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in B_i)\}\right). \tag{3.1.66}$$

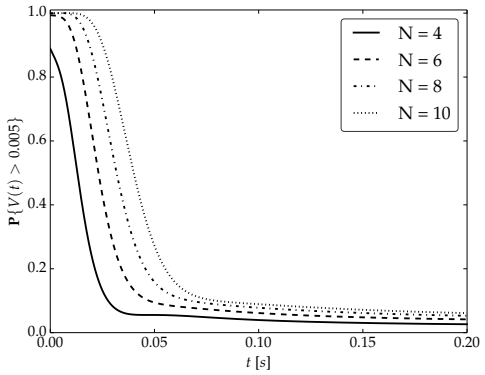
Dla $k \geq 1$ zachodzą następujące równości

$$\mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in L_i)\} = \int_0^t \mathbf{P}\{(V(t-y) > x) \cap (t - y \in L_1)\}\,\mathrm{d}(S^L * S^B)^{(i-1)*}(y) \tag{3.1.67}$$

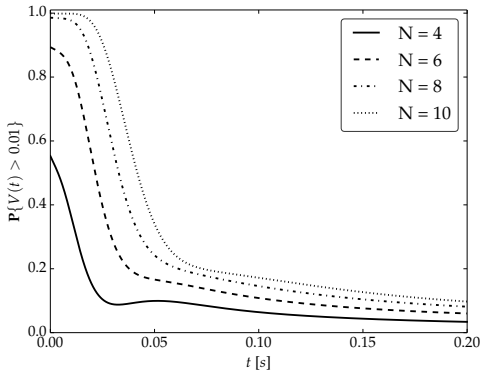
$$\mathbf{P}\{(V(t) > x) \cap (t \in B_i)\} = \int_0^t \mathbf{P}\{(V(t-y) > x) \cap (t - y \in B_1)\}\,\mathrm{d}\big((S^L)^{i*} * (S^B)^{(i-1)*}\big)(y) \tag{3.1.68}$$

gdzie $S^L(t)$ i $S^B(t)$ oznaczają odpowiednio dystrybuanty rozkładów $\mathbf{P}\{L_k < t\}$ i $\mathbf{P}\{B_k < t\}$. Podstawiając transformaty Laplace'a formuł (3.1.67), (3.1.68) w (3.1.66) otrzymujemy (3.1.65).

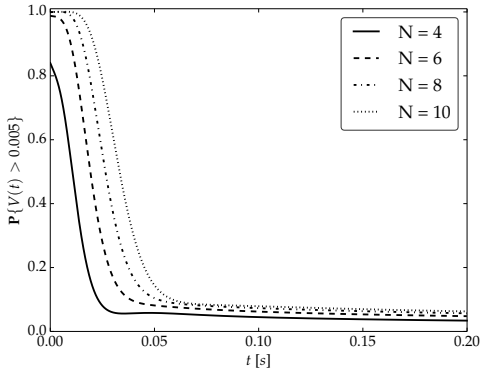
Przykład Strumień pakietów o rozmiarze 200 B wpływa do węzła sieci bezprzewodowej o pojemności $K = 12$ z mechanizmem progowego wybudzania serwera, a następnie zostaje transmitowany z intensywnością 480 kb/s. Obsługa pakietów przebiega według rozkładu wykładniczego (sekcja A.1.5.2) z parametrem $\mu = 300$, tzn. kolejne pakiety trafiają do systemu w średnich odstępach czasu 3.(3) ms. Rozpatrzmy dwie intensywności napływu pakietów 400 i 480 kb/s, co odpowiada średnim czasom pomiędzy kolejnymi napływami 4 i 3.(3) ms oraz współczynnikom obciążenia stanowiska obsługi $\rho = 0.8(3)$ i $\rho = 1$. Zachowanie węzła sieci rozpatrujemy dla $N = 4, 6, 8, 10$, co przedstawia rysunek 3.1.5, na którym zilustrowano zmianę w czasie prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania przekraczającego odpowiednio 5 i 10 ms dla $\rho = 0.8(3)$ oraz $\rho = 1$. Ponadto, wyniki dla stanu ustalonego zaprezentowano w tabeli 3.1.5.



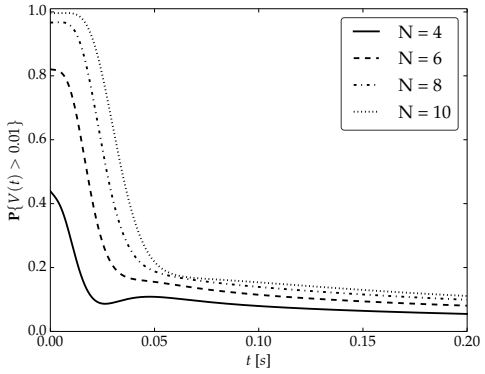
(a) Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania przekraczającego 5 ms dla $\rho = 0.8(3)$.



(b) Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania przekraczającego 10 ms dla $\rho = 0.8(3)$.



(c) Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania przekraczającego 5 ms dla $\rho = 1$.



(d) Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania przekraczającego 10 ms dla $\rho = 1$.

Rys. 3.1.5. Prawdopodobieństwo wirtualnego czasu oczekiwania przekraczającego 5 ms (a), (c) i 10 ms (b), (d) w systemie kolejkowym z progową dyscypliną wybudzania oraz odpowiednio z współczynnikiem obciążenia serwera $\rho = 0.8(3)$ (a), (b) i $\rho = 1$ (c), (d).

$\mathbf{P}\{V(\infty) > x\}$

	$\rho = 0.8(3)$		$\rho = 1$	
N	$x = 0.005$	$x = 0.01$	$x = 0.005$	$x = 0.01$
4	0.0258	0.0254	0.0272	0.0352
6	0.0412	0.0485	0.0396	0.0547
8	0.0518	0.0649	0.0473	0.0677
10	0.0599	0.0748	0.0528	0.0750

Tab. 3.1.2. Opóźnienie kolejkowania systemu typu $M/G/1/K$ z mechanizmem progowego wybudzania serwera w stanie ustalonym dla $\rho = 0.8(3)$ oraz $\rho = 1$.

3.1.6. Proces liczący obsłużone zgłoszenia

W sekcji przedstawiono zależną od czasu charakterystykę procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania [148] w postaci funkcji tworzącej transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa obsługi m zgłoszeń do chwili t. Ponadto, więcej rozważań na temat tranzytywnej analizy procesu liczącego obsłużone zgłoszenia można znaleźć m.in. w [156, 157]. W [158] wyznaczono niniejszą charakterystykę dla systemu z nieskończonym buforem kolejki, strumieniem zgłoszeń w postaci złożonego procesu Poissona oraz pojedynczym okresem regeneracji serwera. Natomiast w [144] wyznaczono proces liczący obsłużone zgłoszenia dla systemu ze skończonym buforem i grupowym napływem zgłoszeń.

Niech $H(t)$ będzie procesem liczącym (sekcja A.2.1) obsłużone zgłoszenia, tzn. $H(t)$ będzie oznaczać liczbę obsłużonych pakietów do chwili t. Celem poniższych rozważań jest wyznaczenie funkcji tworzącej transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{H(t) = m\}$ w postaci

$$\widetilde{h}(s,z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{H(t) = m\}\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.69}$$

gdzie $|z| < 1$ i $\mathrm{Re(s)} > 0$.

Charakterystyka procesu liczącego obsłużone zgłoszenia jest istotna w modelowaniu sieci kolejkowych, gdzie strumień wychodzący z węzła staje się strumieniem wejściowym zgłoszeń dla kolejnego węzła. Ponadto, niniejsza charakterystyka może być wykorzystana do wyznaczenia współczynnika utraty pakietów w węźle sieci na wskutek przepełnienia bufora systemu.

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w okresach ładowania bufora

Na początku, rozważmy zachowanie procesu liczącego $H(t)$ podczas pierwszego okresu akumulacji zgłoszeń L_1 w buforze systemu, w wyniku czego otrzymujemy

$$\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap (t \in L_1)\} \stackrel{def}{=} \delta_{m,0} \sum_{i=0}^{K-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, \tag{3.1.70}$$

gdzie $\delta_{i,j}$ jest deltą Kroneckera. Funkcja tworząca transformaty Laplace'a rozkładu z równania (3.1.70)

$$\widetilde{h}^L(s,z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap (t \in L_1)\}\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.71}$$

gdzie $|z| < 1$ i $\mathrm{Re(s)} > 0$ ma postać

$$\widetilde{h}^L(s,z) = \sum_{i=1}^{K-1} \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dt = \frac{1}{s}\left(1 - \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^K\right). \tag{3.1.72}$$

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w okresach pracy serwera

Rozważmy teraz proces zliczający $H(t)$ w pierwszym okresie obsługi zgłoszeń B_1 oraz załóżmy tymczasowo, że system może rozpocząć okres zajętości z dowolną liczbą pakietów $1 \leq n \leq K$ w buforze kolejki. Ponadto, przyjmijmy następującą notację

$$H_n^B(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big) \cap \big(t \in B_1\big) |\, X(0)=n\}, \tag{3.1.73}$$

gdzie $t > 0$, $0 \leq m \leq K$ oraz $X(t)$ oznacza liczbę pakietów będących w systemie w chwili t. Chwile zakończenia obsługi kolejnych zgłoszeń są momentami Markowa [152], stąd na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcje A.1.3, A.1.4.7) z uwzględnieniem pierwszego momentu zakończenia obsługi zgłoszeń y po $t=0$, otrzymujemy następujący układ równań całkowych Volterry

$$\begin{aligned} H_1^B(t,m) =& \mathrm{I}\{m \geq 1\}\Bigg(\sum_{i=1}^{K-2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} H_i^B(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \sum_{i=K-1}^{\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} H_{K-1}^B(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y)\Bigg) + \overline{F}(t)\delta_{m,0} \end{aligned} \tag{3.1.74}$$

oraz dla $2 \leq n \leq K$

$$\begin{aligned} H_n^B(t,m) =& \mathrm{I}\{m \geq 1\}\Bigg(\sum_{i=0}^{K-n-1} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} H_{n+i-1}^B(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y) \\ &+ \sum_{i=K-n}^{\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} H_{K-1}^B(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y)\Bigg) + \overline{F}(t)\delta_{m,0}. \end{aligned} \tag{3.1.75}$$

Komentując powyższe równania (3.1.74), (3.1.75), zauważmy, że jeśli pierwszy pakiet opuści system w czasie $y < t$ oraz do chwili y wpłynie do systemu $0 \leq i \leq K-n-1$ pakietów, gdzie n jest liczbą pakietów będących w systemie w momencie rozpoczęcia okresu obsługi zgłoszeń, wówczas system kontynuuje obsługę zgłoszeń w chwili y z $n+i-1$ pakietami w systemie. Drugie składniki powyższych sum opisują sytuację, w której system zostaje przepełniony do chwili y, w wyniku czego w chwili y w systemie znajduje się $K-1$ pakietów. Natomiast $m=0$ zachodzi w sytuacji, gdy pierwsza obsługa zgłoszeń następuje po chwili t.

Po wprowadzeniu następującej notacji

$$\widetilde{h}_n^B(s,z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} H_n^B(t,m)\,\mathrm{d}t, \tag{3.1.76}$$

$$a_n^H(s,z) \stackrel{def}{=} z a_n(s) = z \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\,\mathrm{d}F(t), \tag{3.1.77}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, $|z| < 1$, równania (3.1.74), (3.1.75) można zapisać w postaci

$$\widetilde{h}_1^B(s,z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(s,z)\widetilde{h}_i^B(s,z) + \widetilde{h}_{K-1}^B(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(s,z) + \frac{1-f(s)}{s}, \tag{3.1.78}$$

$$\widetilde{h}_n^B(s,z) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i^H(s,z)\widetilde{h}_{n+i-1}^B(s,z) + \widetilde{h}_{K-1}^B(s,z) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i^H(s,z) + \frac{1-f(s)}{s}, \tag{3.1.79}$$

gdzie $2 \le n \le K$. W celu uzyskania rozwiązania układu równań (3.1.78), (3.1.79) wprowadzamy oznaczenie

$$\widetilde{b}_n^B(s,z) \stackrel{def}{=} \widetilde{h}_{K-n}^B(s,z), \quad 0 \le n \le K-1, \tag{3.1.80}$$

wówczas równanie (3.1.79) można zapisać następująco

$$\sum_{k=-1}^{n} a_{k+1}^H(s,z)\widetilde{b}_{n-k}^B(s,z) - \widetilde{b}_n^B(s,z) = \varrho_n(s,z), \tag{3.1.81}$$

gdzie $0 \le n \le K-2$ oraz

$$\varrho_n(s,z) = a_{n+1}^H(s,z)\widetilde{b}_0(s,z) - \widetilde{b}_1(s,z) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^H(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}. \tag{3.1.82}$$

Podobnie, równanie (3.1.78) zapisujemy w postaci

$$\widetilde{b}_{K-1}^B(s,z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(s,z)\widetilde{b}_{K-i}^B(s,z) + \widetilde{b}_1^B(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(s,z) + \frac{1-f(s)}{s}. \tag{3.1.83}$$

Analogicznie jak w poprzednich sekcjach, rozwiązanie (3.1.81) uzyskujemy zgodnie z procedurą wykorzystaną w (3.1.11)–(3.1.19), w wyniku czego otrzymujemy

$$\widetilde{b}_n^B(s,z) = \gamma_n^H(s,z)\widetilde{b}_0^B(s,z) + \beta_n(s,z), \tag{3.1.84}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\gamma_n^H(s,z) =& a_0^H(s,z)R_{n+1}^H(s,z) \\ &+ \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^H(s,z)\Big[a_{i+1}^H(s,z) - \big(zf(s)\big)^{-1} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^H(s,z)\Big],\end{aligned} \tag{3.1.85}$$

$$\begin{aligned}\beta_n(s,z) =& \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^H(s,z)\Big[\frac{1-f(s)}{zsf(s)} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^H(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big] \\ =& \frac{1-f(s)}{s} \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^H(s,z)\Big[\big(zf(s)\big)^{-1} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^H(s,z) - 1\Big],\end{aligned}$$

natomiast (R_n^H) jest potencjałem ciągu (a_n^H) (sekcja A.9). Dla $n = 0$ równanie (3.1.81) przybiera postać

$$\widetilde{b}_1^B(s,z) = \frac{1}{a_0^H(s,z)}\big(\varrho_0(s,z) + \widetilde{b}_0^B(s,z)\big(1 - \widetilde{b}_1^B(s,z)\big)\big), \tag{3.1.86}$$

skąd otrzymujemy

$$\widetilde{b}_1^B(s,z) = \frac{1}{zf(s)}\left(\widetilde{b}_0^B(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\right). \tag{3.1.87}$$

Podstawienie (3.1.84), (3.1.87) w (3.1.83) umożliwia wyznaczenie $\widetilde{b}_0^B(s,z)$ w postaci

$$\widetilde{b}_0^B(s,z) = \frac{\Delta_1(s,z)}{\Delta_2(s,z)}, \tag{3.1.88}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Delta_1(s,z) = &\sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(s,z)\beta_{K-i}(s,z)\\ &- \beta_{K-1}(s,z) - \frac{1-f(s)}{zsf(s)}\Big(\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(s,z) - zf(s)\Big)\end{aligned} \tag{3.1.89}$$

i

$$\Delta_2(s,z) = \gamma_{K-1}^H(s,z) - \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(s,z)\gamma_{K-i}^H(s,z) - \frac{1}{zf(s)}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(s,z). \tag{3.1.90}$$

Zestawiając równania (3.1.80), (3.1.84)–(3.1.90), można zapisać funkcję tworzącą transformaty Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa liczby obsłużonych zgłoszeń w okresie pracy serwera inicjowanym przy N zakumulowanych pakietach w buforze kolejki w postaci

$$\widetilde{h}^B(s,z) \stackrel{def}{=} \widetilde{h}_N^B(s,z) = \frac{\gamma_{K-N}^H(s,z)\Delta_1(s,z)}{\Delta_2(s,z)} + \beta_{K-n}(s,z). \tag{3.1.91}$$

Ocena wydajności okresów obsługi zgłoszeń

Niech $\epsilon(B_1)$ będzie liczbą pakietów obsłużonych podczas trwania okresu B_1 w klasycznym modelu kolejkowym $M/G/1/K$ bez dyscypliny wybudzania. Zatem, zakładamy, że jedynym okresem pracy systemu jest B_1.

Ponadto, wprowadźmy oznaczenie

$$\widetilde{e}_n(z) \stackrel{def}{=} \mathbf{E}\{z^{\epsilon(B_1)} \,|\, X(0) = n\}, \quad 1 \le n \le K,\ |z| < 1. \tag{3.1.92}$$

Wówczas na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym przy założeniu, że pierwsza obsługa zgłoszenia kończy się w chwili y po $t = 0$, można zapisać następujący układ równań

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_1(z) =& z\sum_{i=1}^{K-2} \widetilde{e}_i(z)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^i}{i!}\,\mathrm{d}F(y)\\ &+ z\widetilde{e}_{K-1}(z)\sum_{i=K-1}^{\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^i}{i!}\,\mathrm{d}F(y) + zf(\lambda),\end{aligned} \tag{3.1.93}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_n(z) =& z\sum_{i=0}^{K-n-1} \widetilde{e}_{n+i-1}(z)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^i}{i!}\,\mathrm{d}F(y)\\ &+ z\widetilde{e}_{K-1}(z)\sum_{i=K-n}^{\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^i}{i!}\,\mathrm{d}F(y),\end{aligned} \tag{3.1.94}$$

gdzie $2 \leq n \leq K$. Wykorzystując (3.1.77), układ równań (3.1.93), (3.1.94) można zapisać w postaci

$$\widetilde{e}_1(z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(0,z)\widetilde{e}_i(z) + \widetilde{e}_{K-1}(z) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(0,z) + zf(\lambda) \tag{3.1.95}$$

i

$$\widetilde{e}_n(z) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i^H(0,z)\widetilde{e}_i(z) + \widetilde{e}_{K-1}(z) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i^H(0,z), \;\; 2 \leq n \leq K. \tag{3.1.96}$$

Następnie, niech

$$\widetilde{c}_n(z) \stackrel{def}{=} \widetilde{e}_{K-n}(z), \quad 0 \leq n \leq K-1, \tag{3.1.97}$$

wówczas równania (3.1.95), (3.1.96) zostają przekształcone do

$$\sum_{i=-1}^{n} a_{i+1}^H(0,z)\widetilde{c}_{n-i}(z) - \widetilde{c}_n(z) = \iota_n(z), \quad 0 \leq n \leq K-2, \tag{3.1.98}$$

gdzie

$$\iota_n(z) = a_{n+1}^H(0,z)\widetilde{c}_0(z) - \widetilde{c}_1(z) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^H(0,z), \tag{3.1.99}$$

oraz

$$\widetilde{c}_{K-1}(z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(0,z)\widetilde{c}_{K-i}(z) + \widetilde{c}_1(z) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(0,z). \tag{3.1.100}$$

Korzystając z tej samej metodologii, co w przypadku układu równań (3.1.81) i (3.1.83) otrzymujemy

$$\widetilde{c}_1(z) = \frac{\widetilde{c}_0(z)}{z} \tag{3.1.101}$$

i

$$\widetilde{c}_n(z) = \gamma_n^H(0,z)\widetilde{c}_0(z), \quad n \geq 0. \tag{3.1.102}$$

Ostatecznie, wyznaczamy $\widetilde{c}_0(z)$ w postaci

$$\widetilde{c}_0(z) = \frac{zf(\lambda)}{\gamma_{K-1}^H(0,z) - \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(0,z)\gamma_{K-i}^H(0,z) - z^{-1}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(0,z)}. \tag{3.1.103}$$

Na podstawie (3.1.97) formułę $\widetilde{e}_n(z)$ można zapisać

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_n(z) =& \widetilde{c}_{K-n}(z) \\ =& \frac{zf(\lambda)\gamma_{K-n}^H(0,z)}{\gamma_{K-1}^H(0,z) - \sum_{i=1}^{K-2} a_i^H(0,z)\gamma_{K-i}^H(0,z) - z^{-1}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^H(0,z)}.\end{aligned} \tag{3.1.104}$$

Jeśli oznaczymy przez $\widetilde{e}(z)$ funkcję tworzącą rozkładu prawdopodobieństwa liczby obsłużonych pakietów w okresie pracy serwera w systemie kolejkowym $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania serwera, wówczas

$$\widetilde{e}(z) \stackrel{def}{=} \widetilde{e}_N(z). \tag{3.1.105}$$

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania

Podwójną transformatę rozkładu prawdopodobieństwa $P\{H(t) = m\}$ w postaci funkcjonału $\widetilde{h}(s,z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{H(t) = m\}\,\mathrm{d}t$ opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.3 *Funkcja tworząca transformaty Laplac'a $\widetilde{h}(s,z)$ rozkładu prawdopodobieństwa liczby obsłużonych pakietów m do chwili t w systemie kolejkowym typu $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania stanowiska obsługi może być zapisana w następującej postaci*

$$\widetilde{h}(s,z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{H(t) = m\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{h}^L(s,z) + \widetilde{g}^L(s)\widetilde{h}^B(s,z)}{1 - \widetilde{g}^L(s)\widetilde{g}^B(s)\widetilde{e}(z)}, \tag{3.1.106}$$

gdzie $\mathrm{Re(s)} > 0$, $|z| < 1$, *natomiast wyrażenia* $\widetilde{h}^L(s,z)$, $\widetilde{g}^L(s)$, $\widetilde{h}^B(s,z)$, $\widetilde{g}^B(s)$ *i* $\widetilde{e}(z)$ *zostały określone odpowiednio w (3.1.72), (3.1.1), (3.1.91), (3.1.20) i (3.1.105).*

Dowód Niech $S^L(t)$ i $S^B(t)$ będą dystrybuantami rozkładów prawdopodobieństwa odpowiednio czasów trawa okresów ładowania bufora L_k oraz okresów obsługi zgłoszeń B_k, $k \geq 1$. Ponadto, niech $e_i = \mathbf{P}\{\epsilon(B_1) = i \,|\, X(0) = N\}$, $i \geq 1$, oznacza rozkład prawdopodobieństwa liczby pakietów obsłużonych w okresie B_1. Zauważmy, że

$$\mathbf{P}\{H(t)=m\} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big) \cap \big(t \in L_i\big)\} + \mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big) \cap \big(t \in B_i\big)\}\Big). \tag{3.1.107}$$

Ponieważ (L_i) i (B_i) są ciągami niezależnych zmiennych losowych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in L_i\big)\} \\ &= \mathrm{I}\{m \geq i-1\} e_m^{(i-1)*} \int_0^t \mathbf{P}\{\big(H(t-y) = 0\big) \cap \big(t - y \in L_1\big)\} \\ &\times \mathrm{d}\big(S^L * S^B\big)^{(i-1)*}(y) \end{aligned} \tag{3.1.108}$$

i

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in B_i\big)\} \\ &= \mathrm{I}\{m \geq i-1\} \sum_{k=i-1}^{m} e_k^{(i-1)*} \int_0^t \mathbf{P}\{\big(H(t-y) = m-k\big) \cap \big(t - y \in B_1\big)\} \\ &\times \mathrm{d}\Big(\big(S^L\big)^{i*} * \big(S^B\big)^{(i-1)*}\Big)(y), \end{aligned} \tag{3.1.109}$$

gdzie notacja $\big(S^L\big)^{j*}$, $\big(S^B\big)^{j*}$ oznacza j - krotny splot według Stieltjesa odpowiednich dystrybuant (sekcja A.5.8). Symbol e_k^{j*} oznacza k - ty element j - krotnego splotu ciągu (e_i) (sekcja A.5.12).

Na podstawie reprezentacji (3.1.108), (3.1.109) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big)\cap\big(t\in L_i\big)\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{h}^L(s,z)}{1-\widetilde{g}^L(s)\widetilde{g}^B(s)\widetilde{e}(z)} \tag{3.1.110}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big)\cap\big(t\in B_i\big)\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{g}^L(s)\widetilde{h}^B(s,z)}{1-\widetilde{g}^L(s)\widetilde{g}^B(s)\widetilde{e}(z)}. \tag{3.1.111}$$

Podstawienie (3.1.110) i (3.1.111) w (3.1.107) prowadzi do (3.1.106).

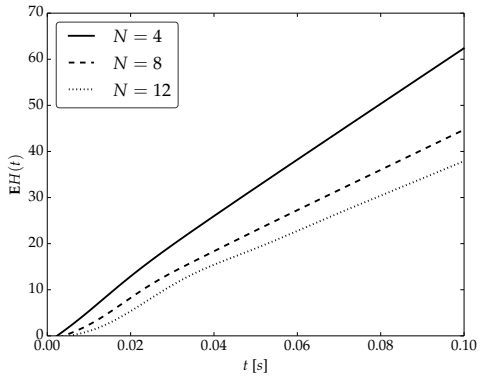
Uwaga Na podstawie własności funkcji tworzących określonej w (A.7.6), transformata Laplace'a wartości oczekiwanej liczby obsłużonych pakietów do chwili t może być wyznaczona w następujący sposób

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{E}H(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{H(t)=m\}\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{z=1}. \tag{3.1.112}$$

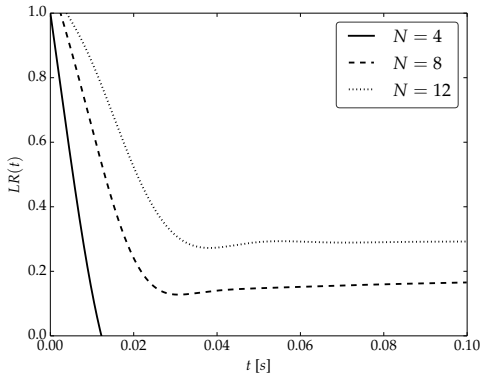
Uwaga Na podstawie $\mathbf{E}H(t)$ określonej w (3.1.112) oraz zależnej od czasu wartości średniej intensywności wpływu pakietów do sytemu λt można estymować współczynnik utraty pakietów na wskutek przepełnienia bufora systemu jako funkcję zależną od czasu w postaci

$$LR(t) \approx 1 - \frac{\mathbf{E}H(t)}{\lambda t}. \tag{3.1.113}$$

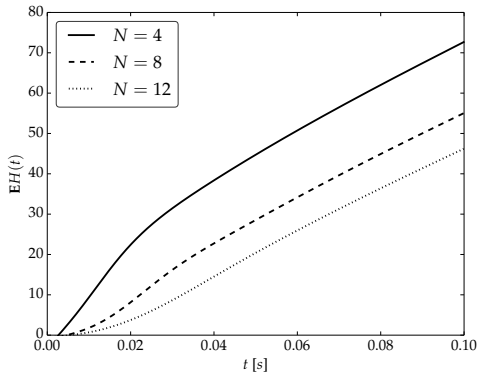
Przykład Załóżmy, że węzeł sieci o pojemności $K = 15$ z mechanizmem progowego wybudzania stanowiska obsługi może obsługiwać wpływające do systemu pakiety o rozmiarze 1500 B z prędkością 15, 20 lub 30 Mb/s według rozkład Erlanga z parametrem kształtu $k = 3$ oraz odpowiednio dla każdej z prędkości parametrem skali $\bar{\mu} = 3750$, $\bar{\mu} = 5000$ lub $\bar{\mu} = 7500$. Ponadto, strumień wejściowy zachowuje się zgodnie z procesem Poissona z parametrem $\lambda = 1250$, co daje intensywność napływu zgłoszeń 15 Mb/s. Zatem, obciążenie węzła może wynosić odpowiednio $\rho = 1$, $\rho = 0.75$ lub $\rho = 0.5$. Na postawie (3.1.112) i (3.1.113) wyznaczono charakterystyki określające średnią liczbę obsłużonych przez system pakietów oraz współczynnik utraty pakietów w chwili t, co przedstawia rysunek 3.1.6 odpowiednio dla różnych wartości ρ oraz $N = 4, 8$ i 12. Przeprowadzona analiza może być pomocna w modelowaniu sieci, gdzie dla danego węzła charakterystyka procesu liczącego obsłużone zgłoszenia może posłużyć jako strumień wejściowy dla kolejnego węzła sieci. Ponadto, na postawie informacji uzyskanych na podstawie współczynnika utraty pakietów, możliwa jest optymalizacja ich obsługi.



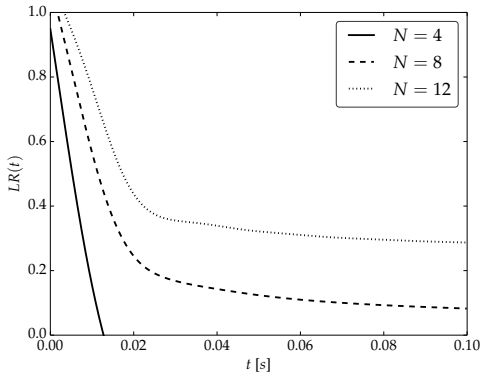
(a) Średnia liczba transmitowanych pakietów do chwili t dla $\rho = 1$.



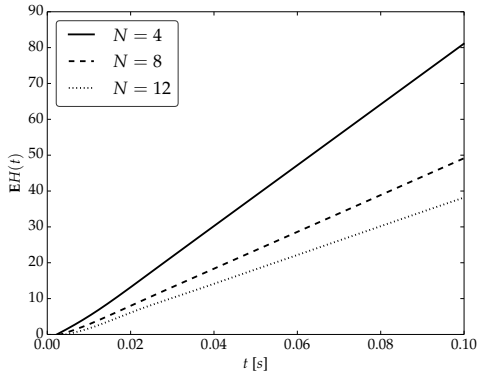
(b) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla $\rho = 1$.



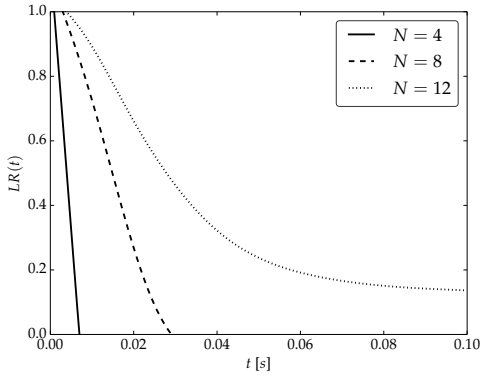
(c) Średnia liczba transmitowanych pakietów do chwili t dla $\rho = 0.75$.



(d) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla $\rho = 0.75$.



(e) Średnia liczba transmitowanych pakietów do chwili t dla $\rho = 0.5$.



(f) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla $\rho = 0.5$.

Rys. 3.1.6. Tranzytywne charakterystyki średniej liczby obsłużonych przez system pakietów oraz współczynnika utraty pakietów odpowiednio dla $\rho = 1$ (a), (b), $\rho = 0.75$ (c), (d) oraz $\rho = 0.5$ (e), (f). Zachowanie systemu zostało rozpatrzone dla $N = 4, 8$ i 12.

3.2. Kolejkowanie złożonych procesów Poissona

3.2.1. Opis modelu

Podobnie jak w sekcji 3.1, poniższa analiza dotyczy jednokanałowych systemów kolejkowych ze skończonym buforem o rozmiarze $K-1$ i jednym miejscem w stacji obsługi. Strumień wejściowy w tym przypadku jest modelowany za pomocą złożonego procesu Poissona (sekcja A.2.3), co można odnieść do systemów kolejkowych, w których zadania wpływają do systemu partiami o losowym rozmiarze. W konsekwencji, modele kolejkowania złożonych procesów Poissona można wykorzystać do opisu ruchu sieciowego, gdzie zdarzenia procesu mogą reprezentować nie pakiety, lecz pojedyncze bity (bajty) przesyłanych informacji. Ponadto, za pomocą złożonych procesów Poissona można również modelować spiętrzenia pakietów w ruchu sieciowym. Zatem w niniejszej sytuacji możliwe jest modelowanie nie tylko czasu pomiędzy kolejnymi wpływami pakietów do systemu, ale także rozmiaru tych pakietów lub grup pakietów. Przez (p_i), $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ będziemy oznaczać dyskretny rozkład prawdopodobieństwa rozmiarów pakietów lub grup pakietów wpływających do systemu z intensywnością λ według procesu Poissona. Zatem p_i będzie oznaczać prawdopodobieństwo pojawienia się pakietu o rozmiarze i. Zakładamy ponownie, że obsługa zgłoszeń przebiega zgodnie z rozkładem określonym dystrybuantą F według dyscypliny FIFO. Okres obsługi zgłoszeń zostaje zainicjowany w momencie akumulacji w systemie N-pakietów (tzn. w momencie wejścia partii, do której należy N-ty z kolei pakiet), a następnie trwa do chwili kiedy wszystkie pakiety w systemie zostaną obsłużone, po czym ponownie rozpoczyna się okres akumulacji zgłoszeń w buforze kolejki. Zatem praca systemu może być podzielona na następujące na przemian po sobie okresy ładowania bufora L_k i okresy obsługi zgłoszeń B_k.

3.2.2. Czas trwania okresów ładowania bufora

Z faktu, że czas każdego okresu ładowania bufora ma rozkład Erlanga N-tego rzędu z parametrem λ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}^{L^c}(s) &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} d\mathbf{P}\{L_k < t\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i-1}^{N-1} p_j^{(i-1)*} \sum_{r=N-j}^{\infty} p_r \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1}\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\lambda}{\lambda+s}\Big)^i \sum_{j=i-1}^{N-1} p_j^{(i-1)*} \sum_{r=N-j}^{\infty} p_r,
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

gdzie Re(s) > 0, natomiast p_i^{j*} oznacza i-ty element j-krotnego splotu rozkładu (p_k) (sekcja A.5.12), tzn.

$$p_0^{0*} = 1, \;\; p_i^{j*} = \sum_{r=0}^{i} p_r^{(j-1)*} p_{i-r}, \; j \geq 1. \tag{3.2.2}$$

3.2.3. Czas trwania okresów obsługi zgłoszeń

Niech $\widetilde{g}_n^{B^c}$ oznacza transformatę Laplace'a-Stieltjesa (sekcja A.5) rozkładu prawdopodobieństwa czasu trwania okresów obsługi zgłoszeń inicjowanych przy $1 \leq n \leq K$ pakietach w systemie, tzn.

$$\widetilde{g}_n^{B^c}(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}\mathbf{P}\{B_k < t\}, \quad \mathrm{Re(s)} > 0. \tag{3.2.3}$$

Podobnie jak w przypadku (3.1.3), (3.1.4), na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym można zapisać następujący układ równań

$$\widetilde{g}_1^{B^c}(s) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s) \widetilde{g}_i^{B^c}(s) + \widetilde{g}_{K-1}^{B^c}(s) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s) + \theta_1(s), \tag{3.2.4}$$

$$\widetilde{g}_n^{B^c}(s) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i^c(s) \widetilde{g}_{n+i-1}^{B^c}(s) + \widetilde{g}_{K-1}^{B^c}(s) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i^c(s) + \theta_n(s), \quad 2 \leq n \leq K. \tag{3.2.5}$$

gdzie θ_n zdefiniowano w (3.1.6), natomiast

$$a_n^c(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t} \sum_{j=0}^{n} p_n^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \, \mathrm{d}F(t). \tag{3.2.6}$$

Wprowadzając w (3.2.4), (3.2.5) podstawienie $\widetilde{w}_n^{B^c}(s) \stackrel{def}{=} \widetilde{g}_{K-n}^{B^c}(s)$ dla $0 \leq n \leq K-1$, otrzymujemy

$$\widetilde{w}_{K-1}^{B^c}(s) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s) \widetilde{w}_{K-i}^{B^c}(s) + \widetilde{w}_1^{B^c}(s) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s) + \theta_1(s), \tag{3.2.7}$$

$$\sum_{k=-1}^{n} a_{k+1}^c(s) \widetilde{w}_{n-k}^{B^c}(s) - \widetilde{w}_n^{B^c}(s) = \phi_n^c(s), \tag{3.2.8}$$

gdzie $0 \leq n \leq K-2$ oraz

$$\phi_n^c(s) \stackrel{def}{=} a_{n+1}^c(s) \widetilde{w}_0^{B^c}(s) - \widetilde{w}_1^{B^c}(s) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^c(s) - \theta_{K-n}(s). \tag{3.2.9}$$

Poprzez analogię do (3.1.11)–(3.1.19) otrzymujemy

$$\widetilde{w}_n^{B^c}(s) = \gamma_n^c(s) \widetilde{w}_0^{B^c}(s) + \eta_n^c(s), \quad n \geq 0, \tag{3.2.10}$$

gdzie

$$\gamma_n^c(s) \stackrel{def}{=} a_0^c(s)R_{n+1}^c(s) + \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^c(s)\left(a_{i+1}^c(s) - \frac{1}{f(s)}\sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^c(s)\right) \tag{3.2.11}$$

$$\eta_n^c(s) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^c(s)\left(\frac{\theta_K(s)}{1+a_0^c(s)} - \theta_{K-i}(s)\right). \tag{3.2.12}$$

W równaniu (3.2.11) ciąg funkcyjny (R_k^c) jest potencjałem ciągu (a_k^c). Ponadto

$$\widetilde{w}_1^{B^c}(s) = \frac{1}{a_0^c(s)}\Big(\phi_0^c(s) + \widetilde{w}_0^{B^c}(s)\big(1 - a_1^c(s)\big)\Big) \tag{3.2.13}$$

oraz

$$\widetilde{w}_0^{B^c}(s) = \frac{\Pi_1^c(s)}{\Pi_2^c(s)}, \tag{3.2.14}$$

dla

$$\Pi_1^c(s) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s)\eta_{K-i}^c(s) + \eta_1^c(s)\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s) + \theta_1(s) - \eta_{K-1}^c(s), \tag{3.2.15}$$

$$\Pi_2^c(s) \stackrel{def}{=} \gamma_{K-1}^c(s) - \sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s)\gamma_{K-i}^c(s) - \frac{1}{f(s)}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s). \tag{3.2.16}$$

Stąd, otrzymujemy

$$\widetilde{g}^{B^c}(s) \stackrel{def}{=} \widetilde{w}_{K-N}^{B^c}(s) = \frac{\gamma_{K-N}^c(s)\Pi_1^c(s)}{\Pi_2^c(s)} + \eta_{K-N}^c(s), \quad n \geq 0 \tag{3.2.17}$$

3.2.4. Długość kolejki

Sekcja przedstawia analizę długości kolejki systemu $M^X/G/1/K$ z N-progowym wybudzaniem serwera w stanie nieustalonym [146]. Zaprezentowane wyniki dotyczą kolejkowania złożonych procesów Poissona, tzn. sytuacji, kiedy pakiety napływają do systemu partiami, co stanowi uzupełnienie rozważań z sekcji 3.1.4.

Wynikiem rozważań niniejszej sekcji jest wzór dla transformaty

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{X(t) = m\}\,\mathrm{d}t, \tag{3.2.18}$$

gdzie strumień wejściowy opisuje złożony proces Poissona, Re(s) > 0, natomiast $X(t)$ oznacza liczbę pakietów będących w systemie w chwili t.

Długość kolejki w okresach ładowania bufora

Na początek rozważmy rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki w pierwszym okresie akumulacji pakietów L_1. Biorąc pod uwagę, że napływ zgłoszeń następuje według złożonego procesu Poissona otrzymujemy

$$\mathbf{P}\{\big(X(t) = m\big) \cap \big(t \in L_1\big)\} = \mathrm{I}\{0 \leq m \leq N-1\}\sum_{i=0}^{m} p_m^{i*}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, \tag{3.2.19}$$

gdzie $t \geq 0$. Wprowadzając następującą notację

$$\widetilde{q}^{L^c}(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_1\big)\}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3.2.20}$$

na podstawie (3.2.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widetilde{q}^{L^c}(s,m) &= \mathrm{I}\{0\leq m\leq N-1\}\sum_{i=0}^{m} p_m^{i*}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{I}\{0\leq m\leq N-1\}\sum_{i=0}^{m} p_m^{i*}\frac{\lambda^i}{(\lambda+s)^{i+1}}.\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Długość kolejki w okresach obsługi zgłoszeń

Załóżmy, że okres obsługi zgłoszeń jest inicjowany, gdy w buforze kolejki jest $1\leq n\leq K$ pakietów. Niech $Q_n^{B^c}(t,m)$ będzie oznaczać zależny od czasu rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki warunkowany obecnością n pakietów w systemie w chwili $t=0$, tzn.

$$Q_n^{B^c}(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_1\big)|\,X(0)=n\}, \tag{3.2.22}$$

gdzie $t>0$ i $1\leq m\leq K$. W (3.2.22) zakładamy, że B_1 rozpoczyna się w chwili $t=0$. Podobnie jak w poprzednich sekcjach, ponieważ kolejne momenty zakończenia obsługi zgłoszeń są momentami Markowa [152], na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcja A.1.3, A.1.4.7) w odniesieniu do chwili zakończenia obsługi pierwszego zgłoszenia po $t=0$ otrzymujemy następujący układ równań całkowych

$$\begin{aligned}Q_1^{B^c}(t,m) &= \sum_{i=1}^{K-2}\sum_{j=0}^{i}\int_0^t p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}Q_i^{B^c}(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y)\\ &+\sum_{i=K-1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\int_0^t p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}Q_{K-1}^{B^c}(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y)\\ &+\overline{F}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\Bigg(\mathrm{I}\{1\leq m\leq K-1\}\sum_{i=0}^{m-1}p_{m-1}^{i*}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\\ &+\mathrm{I}\{m=K\}\sum_{i=K-1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}p_i^{j*}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\Bigg),\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

oraz dla $2 \le n \le K$

$$\begin{aligned} Q_n^{B^c}(t,m) = & \sum_{i=0}^{K-n-1} \sum_{j=0}^{i} \int_0^t p_i^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} Q_{n+i-1}^{B^c}(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y) \\ & + \sum_{i=K-n}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} \int_0^t p_i^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} Q_{K-1}^{B^c}(t-y,m)\,\mathrm{d}F(y) \\ & + \overline{F}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t} \Bigg(\mathrm{I}\{n \le m \le K-1\} \sum_{i=0}^{m-n} p_{m-n}^{i*} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\ & + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \Bigg), \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

gdzie $\overline{F}(t) \stackrel{def}{=} 1 - F(t)$. Układ równań (3.2.23), (3.2.24) jest analogią do układu równań (3.1.26), (3.1.27) z sekcji 3.1.4.

Po wprowadzeniu następującej notacji

$$\widetilde{q}_n^{B^c}(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} Q_n^{B^c}(t,m)\,\mathrm{d}t, \tag{3.2.25}$$

$$\begin{aligned} \zeta_n^c(s,m) \stackrel{def}{=} & \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t} \overline{F}(t) \Bigg(\mathrm{I}\{n \le m \le K-1\} \sum_{i=0}^{m-n} p_{m-n}^{i*} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\ & + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \Bigg)\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, układ równań (3.2.23), (3.2.24) można zapisać w postaci

$$\widetilde{q}_1^{B^c}(s,m) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s) \widetilde{q}_i^{B^c}(s,m) + \widetilde{q}_{K-1}^{B^c}(s,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s) + \zeta_1^c(s,m), \tag{3.2.27}$$

oraz dla $2 \le n \le K$

$$\widetilde{q}_n^{B^c}(s,m) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i^c(s) \widetilde{q}_{n+i-1}^{B^c}(s,m) + \widetilde{q}_{K-1}^{B^c}(s,m) \sum_{i=K-n}^{\infty} a_i^c(s) + \zeta_n^c(s,m). \tag{3.2.28}$$

Ciąg (a_n^c) został zdefiniowany w (3.2.6). Podstawiając $\widetilde{d}_n^{B^c}(s,m) \stackrel{def}{=} \widetilde{q}_{K-n}^{B^c}(s,m)$ w (3.2.27), (3.2.28) dla $0 \le n \le K-1$ otrzymujemy

$$\widetilde{d}_{K-1}^{B^c}(s,m) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s) \widetilde{d}_{K-i}^{B^c}(s,m) + \widetilde{d}_1^{B^c}(s,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s) + \zeta_1^c(s,m), \tag{3.2.29}$$

$$\sum_{k=-1}^{n} a_{k+1}^c(s) \widetilde{d}_{n-k}^{B^c}(s,m) - \widetilde{d}_n^{B^c}(s,m) = \psi_n^c(s,m), \tag{3.2.30}$$

gdzie $0 \le n \le K-2$ oraz

$$\psi_n^c(s,m) \stackrel{def}{=} a_{n+1}^c(s) \widetilde{d}_0^{B^c}(s,m) - \widetilde{d}_1^{B^c}(s,m) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^c(s) - \zeta_{K-n}^c(s,m). \tag{3.2.31}$$

Rozwiązanie układu (3.2.30) [149] ma postać

$$\widetilde{d}_n^{B^c}(s,m) = C(s,m)R_{n+1}^c(s) + \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^c(s)\psi_i^c(s,m), \tag{3.2.32}$$

gdzie $C(s,m)$ nie zależy od n, natomiast (R_n^c) jest potencjałem ciągu (a_n^c) (sekcja A.9). Podstawiając $n=0$ w (3.2.32) otrzymujemy

$$C(s,m) = a_0^c(s)\widetilde{d}_0^{B^c}(s,m). \tag{3.2.33}$$

Następnie, po podstawieniu $n=0$ w (3.2.30), uzyskujemy

$$\widetilde{d}_1^{B^c}(s,m) = \frac{1}{a_0^c(s)}\Big(\psi_0^c(s,m) + \widetilde{d}_0^{B^c}(s,m)\big(1-a_1^c(s)\big)\Big), \tag{3.2.34}$$

stąd

$$\widetilde{d}_1^{B^c}(s,m) = \frac{\widetilde{d}_0^{B^c}(s,m) - \zeta_K^c(s,m)}{f(s)}. \tag{3.2.35}$$

Podstawiając (3.2.31), (3.2.33) i (3.2.35) w (3.2.32), wyrażenie $\widetilde{d}_n^{B^c}(s,m)$ można zapisać w postaci

$$\widetilde{d}_n^{B^c}(s,m) = \gamma_n^c(s)\widetilde{d}_0^{B^c}(s,m) + \kappa_n^c(s,m), \quad n \geq 0, \tag{3.2.36}$$

gdzie (γ_n^c) zdefiniowano w (3.2.11), natomiast

$$\kappa_n^c(s,m) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^c(s)\left(\frac{\zeta_K^c(s,m)}{f(s)}\sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^c(s) - \theta_{K-i}^c(s,m)\right). \tag{3.2.37}$$

Wykorzystując (3.2.35), (3.2.36) oraz (3.2.29), otrzymujemy formułę $\widetilde{d}_0^{B^c}(s,m)$ w postaci

$$\widetilde{d}_0^{B^c}(s,m) = \frac{\Lambda_1^c(s,m)}{\Lambda_2^c(s)}, \tag{3.2.38}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Lambda_1^c(s,m) \stackrel{def}{=} &\sum_{i=1}^{K-2} a_i^c(s)\kappa_{K-i}^c(s,m) \\ &- \frac{\zeta_K^c(s,m)}{f(s)}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^c(s) + \zeta_1^c(s,m) - \kappa_{K-1}^c(s,m)\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

oraz $\Lambda_2^c(s) \stackrel{def}{=} \Pi_2^c(s)$ dla Π_2^c określonego w (3.2.16). Stąd

$$\widetilde{q}^{B^c}(s,m) \stackrel{def}{=} \widetilde{q}_N^{B^c}(s,m) = \frac{\gamma_{K-N}^c(s)\Lambda_1^c(s,m)}{\Lambda_2^c(s)} + \kappa_{K-N}^c(s,m), \quad n \geq 0. \tag{3.2.40}$$

Długość kolejki w systemach $M^X/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania

Wynikiem powyższych rozważań jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2.1 *Transformata Laplace'a rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie $M^X/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania serwera ma następującą postać*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{X(t)=m\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{q}^{L^c}(s,m)+\widetilde{g}^{L^c}(s)\widetilde{q}^{B^c}(s,m)}{1-\widetilde{g}^{B^c}(s)\widetilde{g}^{L^c}(s)}, \tag{3.2.41}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s)>0$, *natomiast* $\widetilde{q}^{L^c}(s,m)$, $\widetilde{g}^{L^c}(s)$, $\widetilde{q}^{B^c}(s,m)$ *i* $\widetilde{g}^{B^c}(s)$ *zostały odpowiednio podane w (3.2.21), (3.2.1), (3.2.40) i (3.2.17).*

Dowód Na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcja A.1.3, A.1.4.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X(t)=m\} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(&\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_i\big)\}\\ &+\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_i\big)\}\Big).\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Załóżmy, że $S^L(t)$ i $S^B(t)$ są odpowiednio dystrybuantami rozkładów prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{L_k<t\}$ i $\mathbf{P}\{B_k<t\}$. Biorąc pod uwagę, że L_k i B_k, $k\geq 1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, odpowiednio o tych samych rozkładach prawdopodobieństwa, uzyskujemy

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in L_i\big)\}\\ &=\int_0^t \mathbf{P}\{\big(X(t-y)=m\big)\cap\big(t-y\in L_1\big)\}\,\mathrm{d}\big(S^L*S^B\big)^{(i-1)*}(y),\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

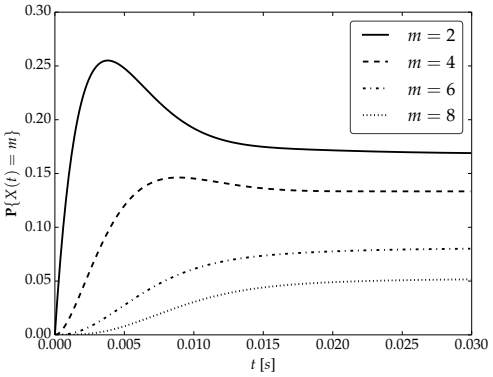
$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\big(X(t)=m\big)\cap\big(t\in B_i\big)\}\\ &=\int_0^t \mathbf{P}\{\big(X(t-y)=m\big)\cap\big(t-y\in B_1\big)\}\times\mathrm{d}\big(\big(S^L\big)^{i*}*\big(S^B\big)^{(i-1)*}\big)(y).\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Następnie podstawiając transformaty Laplace'a (3.2.43), (3.2.44) w (3.2.42) otrzymujemy (3.2.41).

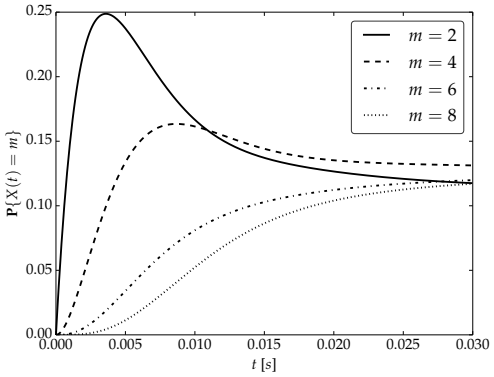
Przykład Rozważmy trzy złożone procesy Poissona o następujących rozkładach prawdopodobieństwa rozmiarów grup pakietów napływających do węzła sieci bezprzewodowej:

- $P_1: p_1=p_2=\frac{1}{2}, p_k=0, k>2,$
- $P_2: p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}, p_k=0, k>3,$
- $P_3: p_1=p_2=p_3=p_4=\frac{1}{4}, p_k=0, k>4.$

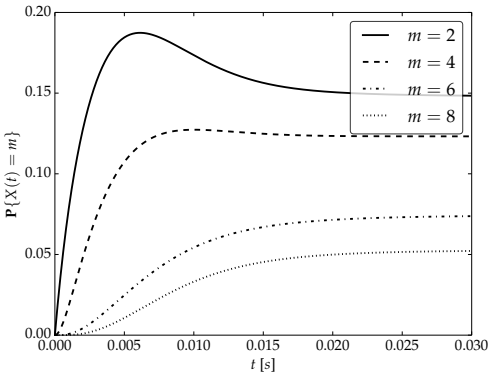
Załóżmy, że do węzła sieci o pojemności $K = 8$ z progową dyscypliną wybudzania serwera napływają pakiety o rozmiarze 150 B według złożonego procesu Poissona odpowiednio z rozkładami rozmiarów grup pakietów P_1, P_2 i P_3 oraz intensywnościami $\lambda_1 = 400$, $\lambda_2 = 300$, $\lambda_3 = 240$. Zatem, w każdym z przypadków do systemu wpływa średnio 600 pakietów na sekundę. Następnie rozpatrzmy dwie intensywności obsługi zgłoszeń 960 kb/s i 720 kb/s według rozkładu wykładniczego, w wyniku czego obciążenie systemu wynosi odpowiednio $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$. Tranzytywne rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki dla $N = 4$ i 6 przedstawiają rysunki 3.2.1 i 3.2.2, na których zilustrowano zachowanie systemu dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$. Wartości prawdopodobieństwa dla stanu ustalonego zostały podane w tabeli 3.2.1. Na podstawie otrzymanych wyników można zaobserwować, że pomimo tej samej średniej intensywność napływu zgłoszeń dla rozpatrywanych przypadków strumieni wejściowych, postać rozkładu prawdopodobieństwa rozmiaru grup wpływających do systemu ma wpływ na długość kolejki zarówno w stanie ustalonym jak i tranzytywnym.



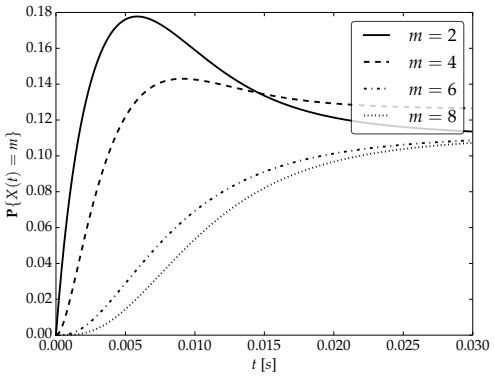
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 0.75$ i $N = 4$.



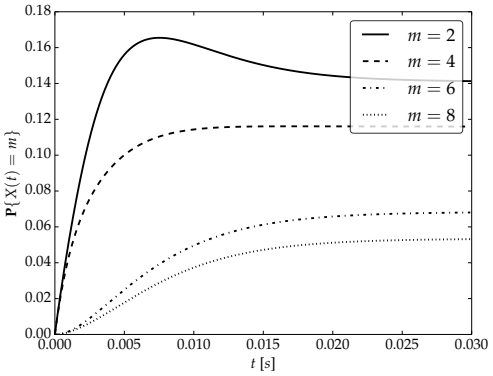
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 1$ i $N = 4$.



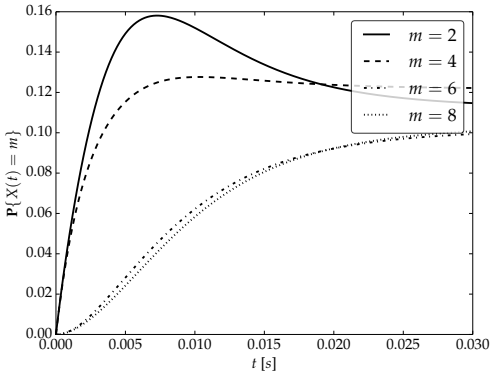
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 0.75$ i $N = 4$.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 1$ i $N = 4$.

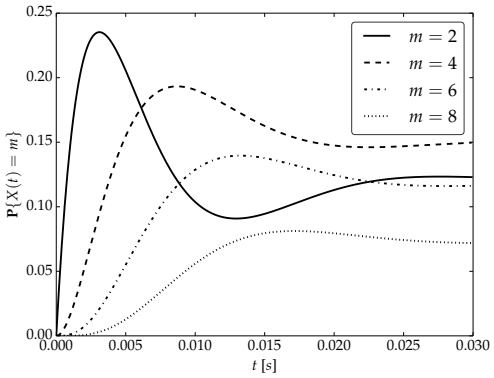


(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_3, $\rho = 0.75$ i $N = 4$.

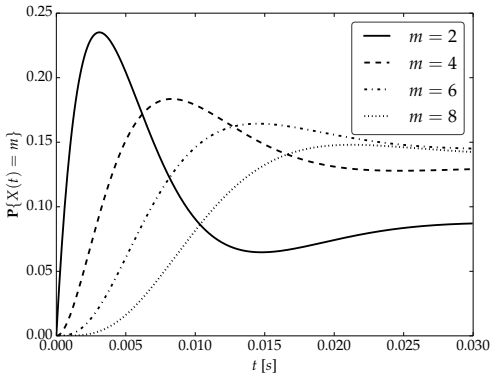


(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_3, $\rho = 1$ i $N = 4$.

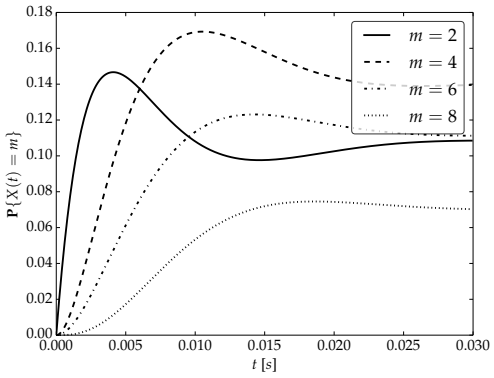
Rys. 3.2.1. Prawdopodobieństwa pobytu w systemie m pakietów w chwili t dla $N = 4$, $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$ oraz dla przypadków gdzie strumień wejściowy jest opisany za pomocą złożonego procesu Poissona odpowiednio z rozkładami P_1 (a), (b), P_2 (c), (d) i P_3 (e), (f).



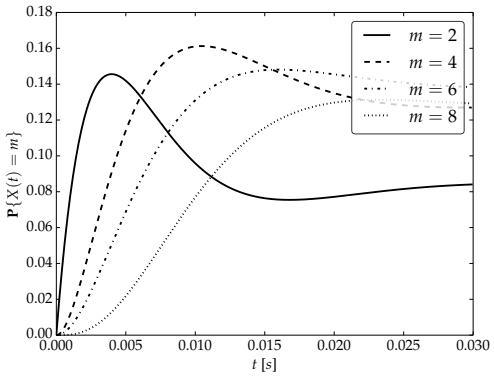
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 0.75$ i $N = 6$.



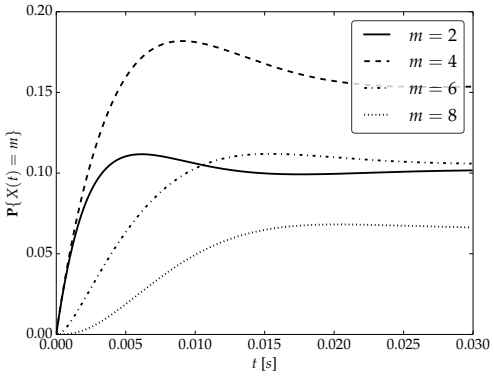
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 1$ i $N = 6$.



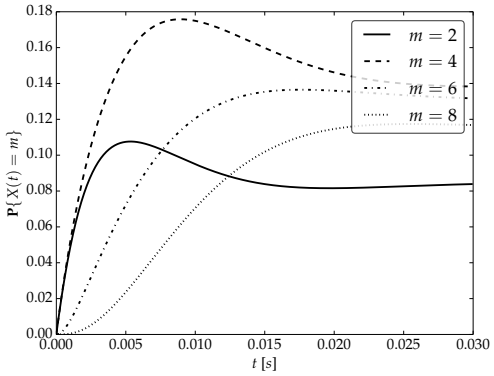
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 0.75$ i $N = 6$.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 1$ i $N = 6$.



(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_3, $\rho = 0.75$ i $N = 6$.



(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_3, $\rho = 1$ i $N = 6$.

Rys. 3.2.2. Prawdopodobieństwa pobytu w systemie m pakietów w chwili t dla $N = 6$, $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$ oraz dla przypadków gdzie strumień wejściowy jest opisany za pomocą złożonego procesu Poissona odpowiednio z rozkładami P_1 (a), (b), P_2 (c), (d) i P_3 (e), (f).

$\mathbf{P}\{X(\infty) = m\}$

	$\rho = 0.75$			$\rho = 1$		
m	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
			$N = 2$			
1	0.2118	0.1996	0.1903	0.1261	0.1358	0.1421
2	0.1588	0.1453	0.1349	0.1201	0.1222	0.1224
3	0.1059	0.0809	0.0638	0.1041	0.0883	0.0751
4	0.0926	0.0799	0.0651	0.1094	0.0984	0.0842
5	0.0728	0.0683	0.0619	0.1077	0.0990	0.0894
6	0.0596	0.0557	0.0529	0.1082	0.0970	0.0882
7	0.0480	0.0480	0.0443	0.1080	0.0979	0.0863
8	0.0389	0.0405	0.0393	0.1081	0.0978	0.0872
			$N = 4$			
1	0.1122	0.1092	0.1102	0.0712	0.0773	0.0833
2	0.1684	0.1480	0.1407	0.1137	0.1108	0.1118
3	0.1824	0.1934	0.1753	0.1377	0.1517	0.1454
4	0.1333	0.1232	0.1158	0.1297	0.1257	0.1211
5	0.0947	0.0816	0.0728	0.1196	0.1066	0.0964
6	0.0807	0.0742	0.0683	0.1230	0.1113	0.1011
7	0.0640	0.0636	0.0615	0.1219	0.1121	0.1030
8	0.0522	0.0526	0.0534	0.1222	0.1109	0.1028
			$N = 6$			
1	0.0804	0.0796	0.0796	0.0543	0.0590	0.0628
2	0.1206	0.1078	0.1017	0.0867	0.0845	0.0842
3	0.1306	0.1409	0.1267	0.1050	0.1157	0.1095
4	0.1507	0.1410	0.1544	0.1309	0.1282	0.1384
5	0.1608	0.1575	0.1483	0.1528	0.1520	0.1461
6	0.1181	0.0786	0.1058	0.1455	0.1380	0.1302
7	0.0860	0.0786	0.0712	0.1378	0.1239	0.1108
8	0.0860	0.0702	0.0658	0.1403	0.1274	0.1147

Tab. 3.2.1. Rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym dla różnych przypadków strumienia wejściowego w postaci złożonego procesu Poissona odpowiednio z rozkładami P_1, P_2 i P_3. Wyniki dotyczą przypadków gdy $\rho = 0.75$, $\rho = 1$ oraz $N = 2, 4, 6$.

3.2.5. Proces liczący obsłużone zgłoszenia

W niniejszej sekcji przedstawiono tranzytywną charakterystykę procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w systemie typu $M^X/G/1/K$ z mechanizmem N-progowego wybudzaniem serwera [159]. Wyniki dotyczą kolejkowania złożonych procesów Poissona i stanowią rozwinięcie rozważań z sekcji 3.1.6.

Wynikiem poniższych rozważań będzie zwarta postać funkcji tworzącej transformaty Laplace'a liczby pakietów obsłużonych do chwili t, tzn.

$$\widetilde{h}^c(s,z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} e^{-st}\mathbf{P}\{H(t)=m\}dt, \tag{3.2.45}$$

gdzie $|z|<1$ i Re(s) >0.

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w okresach ładowania bufora

Zacznijmy od analizy zachowania procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w pierwszym okresie ładowania bufora L_1, który rozpoczyna się w chwili $t=0$. Otrzymujemy

$$\mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big)\cap(t\in L_1)\} = \delta_{m,0}\sum_{i=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{i} p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \tag{3.2.46}$$

gdzie p_i^{j*} jest i-tym elementem j-krotnego splotu rozkładu (p_k), $k\geq 1$ (sekcja A.5.12). Wprowadźmy następującą notację

$$\widetilde{h}^{L^c}(s,z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big)\cap(t\in L_1)\}\,\mathrm{d}t, \tag{3.2.47}$$

gdzie $|z|<1$ i Re(s) >0. Podstawiając (3.2.46) w (3.2.47) otrzymujemy

$$\widetilde{h}^{L^c}(s,z) = \sum_{i=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{i} p_i^{j*}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{i} p_i^{j*}\frac{\lambda^j}{(\lambda+s)^{j+1}}. \tag{3.2.48}$$

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w okresach pracy serwera

Załóżmy na pewien czas, że inicjacja okresów obsługi zgłoszeń może nastąpić, gdy w systemie znajduje się $1\leq n\leq K$ pakietów. Niech $H_n^{B^c}(t,m)$ będzie zdefiniowane w postaci

$$H_n^{B^c}(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(H(t)=m\big)\cap\big(t\in B_1\big)|\,X(0)=n\}, \tag{3.2.49}$$

gdzie $t>0$, $0\leq m\leq K$ oraz $X(t)$ oznacza liczbę pakietów w systemie w chwili t. Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (sekcja A.1.3, A.1.4.7)

dla ciągłych zmiennych losowych otrzymujemy w odniesieniu do momentu zakończenia pierwszej obsługi zgłoszeń po czasie t układ równań całkowych w postaci

$$H_1^{B^c}(t,x) = \mathrm{I}\{m \geq 1\}\left(\sum_{i=1}^{K-2}\int_0^t \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}H_i^{B^c}(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=K-1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\int_0^t p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}H_{K-1}^{B^c}(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y)\right)+\overline{F}(t)\delta_{m,0} \tag{3.2.50}$$

oraz dla $2 \leq n \leq K$

$$H_n^{B^c}(t,m) = \mathrm{I}\{m \geq 1\}\left(\sum_{i=0}^{K-n-1}\sum_{j=0}^{i}\int_0^t p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}H_{n+i-1}^{B^c}(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=K-n}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\int_0^t p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}H_{K-1}^{B^c}(t-y,m-1)\,\mathrm{d}F(y)\right)+\overline{F}(t)\delta_{m,0}. \tag{3.2.51}$$

Interpretacja równań (3.2.50) i (3.2.51) jest analogiczna jak w przypadku (3.1.74) i (3.1.75).

Wykorzystując poniższą notację

$$\widetilde{h}_n^{B^c}(s,z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}H_n^{B^c}(t,m)\,\mathrm{d}t \tag{3.2.52}$$

i

$$a_i^{Hc}(s,z) \stackrel{def}{=} z\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\sum_{j=0}^{i}p_i^{j*}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\,\mathrm{d}F(t), \tag{3.2.53}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, $|z| < 1$, układ równań (3.2.50)–(3.2.51) można zapisać następująco

$$\widetilde{h}_1^{B^c}(s,z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^{Hc}(s,z)\widetilde{h}_i^{B^c}(s,z) + \widetilde{h}_{K-1}^{B^c}(s,z)\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^{Hc}(s,z) + \frac{1-f(s)}{s}, \tag{3.2.54}$$

$$\widetilde{h}_n^{B^c}(s,z) = \sum_{i=0}^{K-n-1} a_i^{Hc}(s,z)\widetilde{h}_{n+i-1}^{B^c}(s,z) + \widetilde{h}_{K-1}^{B^c}(s,z)\sum_{i=K-n}^{\infty} a_i^{Hc}(s,z) + \frac{1-f(s)}{s}, \tag{3.2.55}$$

gdzie $2 \leq n \leq K$. Następnie, w układzie równań (3.2.54), (3.2.55) wykonujemy podstawienie $\widetilde{b}_n^{B^c}(s,z) \stackrel{def}{=} \widetilde{h}_{K-n}^{B^c}(s,z)$, dla $0 \leq n \leq K-1$, stąd równanie (3.2.55) zapisujemy w postaci

$$\sum_{i=-1}^{n} a_{i+1}^{Hc}(s,z)\widetilde{b}_{n-i}^{B^c}(s,z) - \widetilde{b}_n^{B^c}(s,z) = \varrho_n^c(s,z), \tag{3.2.56}$$

gdzie $0 \leq n \leq K-2$, natomiast

$$\varrho_n^c(s,z) = a_{n+1}^{Hc}(s,z)\widetilde{b}_0^{B^c}(s,z) - \widetilde{b}_1^{B^c}(s,z)\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^{Hc}(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}. \tag{3.2.57}$$

Podobnie, równanie (3.2.54) zapisujemy w postaci

$$\widetilde{b}_{K-1}^{B^c}(s,z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_i^{Hc}(s,z)\widetilde{b}_{K-i}^{B^c}(s,z) + \widetilde{b}_1^{B^c}(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^{Hc}(s,z) + \frac{1-f(s)}{s}. \quad (3.2.58)$$

Analogicznie jak w poprzednich sekcjach, postępując podobnie jak w przypadku (3.1.11)–(3.1.19), rozwiązanie (3.2.56) uzyskujemy w postaci

$$\widetilde{b}_n^{B^c}(s,z) = \gamma_n^{Hc}(s,z)\widetilde{b}_0^{B^c}(s,z) + \beta_n^c(s,z), \quad (3.2.59)$$

dla $n \geq 0$ oraz

$$\gamma_n^{Hc}(s,z) = a_0^{Hc}(s,z)R_{n+1}^{Hc}(s,z) + \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^{Hc}(s,z)\Big(a_{i+1}^{Hc}(s,z) - \big(zf(s)\big)^{-1} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^{Hc}(s,z)\Big), \quad (3.2.60)$$

$$\begin{aligned}\beta_n^c(s,z) &= \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^{Hc}(s,z)\Big(\frac{1-f(s)}{zsf(s)} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^{Hc}(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big) \\ &= \frac{1-f(s)}{s} \sum_{i=0}^{n} R_{n-i}^{Hc}(s,z)\Big(\big(zf(s)\big)^{-1} \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j^{Hc}(s,z) - 1\Big),\end{aligned} \quad (3.2.61)$$

gdzie (R_n^{Hc}) jest potencjałem ciągu (a_n^{Hc}). Dla $n = 0$ równanie (3.2.56) redukuje się do postaci

$$\widetilde{b}_1^{B^c}(s,z) = \frac{1}{a_0^{Hc}(s,z)}\big(\varrho_0^c(s,z) + \widetilde{b}_0^{B^c}(s,z)\big(1 - a_1^{Hc}(s,z)\big)\big), \quad (3.2.62)$$

stąd

$$\widetilde{b}_1^{B^c}(s,z) = \frac{1}{zf(s)}\Big(\widetilde{b}_0^{B^c}(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big). \quad (3.2.63)$$

Podstawiając (3.2.59), (3.2.63) w (3.2.58), otrzymujemy

$$\widetilde{b}_0^{B^c}(s,z) = \frac{\Delta_1^c(s,z)}{\Delta_2^c(s,z)}, \quad (3.2.64)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Delta_1^c(s,z) = &\sum_{i=1}^{K-2} a_i^{Hc}(s,z)\beta_{K-i}^c(s,z) - \beta_{K-1}^c(s,z) \\ &- \frac{1-f(s)}{zsf(s)}\Big(\sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^{Hc}(s,z) - zf(s)\Big)\end{aligned}$$

i

$$\Delta_2^c(s,z) = \gamma_{K-1}^{Hc}(s,z) - \sum_{i=1}^{K-2} a_i^{Hc}(s,z)\gamma_{K-i}^{Hc}(s,z) - \frac{1}{zf(s)} \sum_{i=K-1}^{\infty} a_i^{Hc}(s,z). \quad (3.2.65)$$

Zestawiając wyniki powyższych rozważań (3.2.59)–(3.2.65), funkcję tworzącą transformaty Laplaca'a liczby obsłużonych zgłoszeń w okresach pracy serwera inicjowanych N zgłoszeniami w systemie można zapisać następująco.

$$\widetilde{h}_n^{B^c}(s,z) = \gamma_{K-n}^{Hc}(s,z)\frac{\Delta_1^c(s,z)}{\Delta_2^c(s,z)} + \beta_{K-n}^c(s,z). \tag{3.2.66}$$

Ponadto

$$\widetilde{h}^{B^c}(s,z) \stackrel{def}{=} \widetilde{h}_N^{B^c}(s,z). \tag{3.2.67}$$

Ocena wydajności okresów obsługi zgłoszeń

Następnie wyznaczymy postać funkcji tworzącej rozkładu prawdopodobieństwa liczby obsłużonych pakietów w pojedynczym okresie nieprzerwanej pracy serwera. Niech $\epsilon^c(B_1)$ będzie procesem liczącym obsłużone pakiety w okresie B_1 oraz niech

$$\widetilde{e}_n^c(z) = \mathbf{E}\{z^{\epsilon^c(B_1)} \,|\, X(0) = n\}, \quad 1 \le n \le K,\ |z| < 1. \tag{3.2.68}$$

Analogicznie jak w przypadku (3.2.50), (3.2.51), na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_1^c(z) = z\sum_{i=1}^{K-2}\widetilde{e}_i^c(z)\int_0^\infty\sum_{j=0}^{i}p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\,\mathrm{d}F(y)\\ + z\widetilde{e}_{K-1}^c(z)\sum_{i=K-1}^{\infty}\int_0^\infty\sum_{j=0}^{i}p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\,\mathrm{d}F(y) + zf(\lambda)\end{aligned} \tag{3.2.69}$$

i

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_n^c(z) = z\sum_{i=0}^{K-n-1}\widetilde{e}_{n+i-1}^c(z)\int_0^\infty\sum_{j=0}^{i}p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\,\mathrm{d}F(y)\\ + z\widetilde{e}_{K-1}^c(z)\sum_{i=K-n}^{\infty}\int_0^\infty\sum_{j=0}^{i}p_i^{j*}\mathrm{e}^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^j}{j!}\,\mathrm{d}F(y),\end{aligned} \tag{3.2.70}$$

gdzie $2 \le n \le K$. Korzystając z (3.2.53), układ równań (3.2.69)–(3.2.70) można zapisać w postaci

$$\widetilde{e}_1^c(z) = \sum_{i=1}^{K-2}a_i^{Hc}(0,z)\widetilde{e}_i^c(z) + \widetilde{e}_{K-1}^c(z)\sum_{i=K-1}^{\infty}a_i^{Hc}(0,z) + zf(\lambda), \tag{3.2.71}$$

$$\widetilde{e}_n^c(z) = \sum_{i=0}^{K-n-1}a_i^{Hc}(0,z)\widetilde{e}_i^c(z) + \widetilde{e}_{K-1}^c(z)\sum_{i=K-n}^{\infty}a_i^{Hc}(0,z),\ \ 2 \le n \le K. \tag{3.2.72}$$

Podstawienie

$$\widetilde{c}_n^c(z) = \widetilde{e}_{K-n}^c(z), \quad 0 \le n \le K-1, \tag{3.2.73}$$

w (3.2.71), (3.2.72) daje nam

$$\sum_{i=-1}^{n} a_{i+1}^{Hc}(0,z)\widetilde{c}_{n-i}^{c}(z) - \widetilde{c}_{n}^{c}(z) = \iota_{n}^{c}(z), \quad 0 \le n \le K-2, \tag{3.2.74}$$

gdzie

$$\iota_{n}^{c}(z) = a_{n+1}^{Hc}(0,z)\widetilde{c}_{0}^{c}(z) - \widetilde{c}_{1}^{c}(z)\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i}^{Hc}(0,z), \tag{3.2.75}$$

i

$$\widetilde{c}_{K-1}^{c}(z) = \sum_{i=1}^{K-2} a_{i}^{Hc}(0,z)\widetilde{c}_{K-i}^{c}(z) + \widetilde{c}_{1}^{c}(z)\sum_{i=K-1}^{\infty} a_{i}^{Hc}(0,z) + zf(\lambda). \tag{3.2.76}$$

Wykorzystując te samo postępowanie jak w przypadku (3.2.56)–(3.2.58) otrzymujemy

$$\widetilde{c}_{1}^{c}(z) = \frac{\widetilde{c}_{0}^{c}(z)}{z}, \tag{3.2.77}$$

$$\widetilde{c}_{n}^{c}(z) = \gamma_{n}^{Hc}(0,z)\widetilde{c}_{0}^{c}(z), \quad n \ge 0. \tag{3.2.78}$$

oraz

$$\widetilde{c}_{0}^{c}(z) = \frac{zf(\lambda)}{\gamma_{K-1}^{Hc}(0,z) - \sum_{i=1}^{K-2} a_{i}^{Hc}(0,z)\gamma_{K-i}^{Hc}(0,z) - z^{-1}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_{i}^{Hc}(0,z)}. \tag{3.2.79}$$

Zatem na podstawie powyższego $\widetilde{e}_{n}^{c}(z)$ można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_{n}^{c}(z) &= \widetilde{c}_{K-n}^{c}(z) \\ &= \frac{zf(\lambda)\gamma_{K-n}^{Hc}(0,z)}{\gamma_{K-1}^{Hc}(0,z) - \sum_{i=1}^{K-2} a_{i}^{Hc}(0,z)\gamma_{K-i}^{Hc}(0,z) - z^{-1}\sum_{i=K-1}^{\infty} a_{i}^{Hc}(0,z)}.\end{aligned} \tag{3.2.80}$$

Z faktu, że rozważania dotyczą modeli kolejkowych z N-dyscypliną wybudzania, będziemy stosować następujące oznaczenie

$$\widetilde{e}^{c}(z) \stackrel{def}{=} \widetilde{e}_{N}^{c}(z). \tag{3.2.81}$$

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w systemach $M/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania

Podwójną transformatę rozkładu prawdopodobieństwa $\mathbf{P}\{H(t) = m\}$ charakteryzuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.2 *Funkcja tworząca transformaty Laplace'a $\widetilde{h}^{c}(s,z)$ tranzytywnego rozkładu prawdopodobieństwa procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w systemie kolejkowym typu $M^{X}/G/1/K$ z N-dyscypliną wybudzania serwera można zapisać w następujący sposób*

$$\widetilde{h}^{c}(s,z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{m}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{H(t) = m\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{h}^{L^c}(s,z) + \widetilde{g}^{L^c}(s)\widetilde{h}^{B^c}(s,z)}{1 - \widetilde{g}^{L^c}(s)\widetilde{g}^{B^c}(s)\widetilde{e}^{c}(z)}, \tag{3.2.82}$$

gdzie $\mathrm{Re(s)} > 0$, $|z| < 1$ *oraz formuły* $\widetilde{h}^{L^c}(s,z)$, $\widetilde{g}^{L^c}(s)$, $\widetilde{h}^{B^c}(s,z)$, $\widetilde{g}^{B^c}(s)$ *i* $\widetilde{e}^{c}(z)$ *zostały odpowiednio podane w (3.2.48), (3.2.1), (3.2.67), (3.2.17) i (3.2.81).*

Dowód Niech $S^L(t)$ i $S^B(t)$ będą odpowiednio dystrybuantami rozkładów prawdopodobieństwa czasu trwania okresów ładowania bufora L_i oraz czasu trwania okresów obsługi zgłoszeń B_i. Ponadto, niech $\epsilon_i^c = \mathbf{P}\{\epsilon^c(B_1) = i \,|\, X(0) = N\}$, $i \geq 1$. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika następująca równość

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{H(t) = m\} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(&\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in L_i\big)\} \\ &+ \mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in B_i\big)\}\Big).\end{aligned} \tag{3.2.83}$$

Z faktu, że (L_i) i (B_i) są identyfikowane z niezależnymi zmiennymi losowymi odpowiednio o identycznych rozkładach prawdopodobieństwa otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in L_i\big)\} \\ &= \mathrm{I}\{m \geq i-1\} q_m^{(i-1)*} \int_0^t \mathbf{P}\{\big(H(t-y) = 0\big) \cap \big(t - y \in L_1\big)\} \\ &\times \mathrm{d}\big(S^L * S^B\big)^{(i-1)*}(y)\end{aligned} \tag{3.2.84}$$

i

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in B_i\big)\} \\ &= \mathrm{I}\{m \geq i-1\} \sum_{k=i-1}^{m} q_k^{(i-1)*} \int_0^t \mathbf{P}\{\big(H(t-y) = m-k\big) \cap \big(t - y \in B_1\big)\} \\ &\times \mathrm{d}\Big(\big(S^L\big)^{i*} * \big(S^B\big)^{(i-1)*}\Big)(y).\end{aligned} \tag{3.2.85}$$

Powyższe reprezentacje (3.2.84), (3.2.85) prowadzą do

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in L_i\big)\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{h}^{L^c}(s,z)}{1 - \widetilde{g}^{L^c}(s)\widetilde{g}^{B^c}(s)\widetilde{e}^c(z)} \tag{3.2.86}$$

i

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap \big(t \in B_i\big)\}\,\mathrm{d}t = \frac{\widetilde{g}^{L^c}(s)\widetilde{h}^{B^c}(s,z)}{1 - \widetilde{g}^{L^c}(s)\widetilde{g}^{B^c}(s)\widetilde{e}^c(z)}. \tag{3.2.87}$$

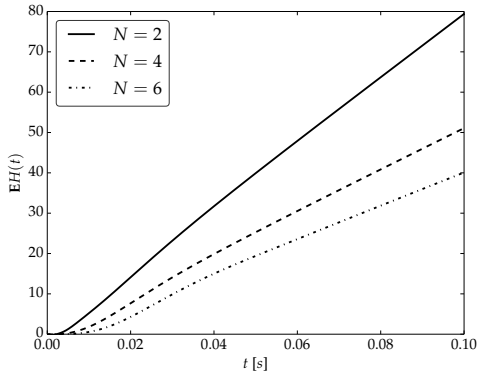
Następnie, na podstawie (3.2.83), (3.2.86), (3.2.87), otrzymujemy (3.2.82).

Przykład Rozważmy dwa złożone procesy Poissona o następujących rozkładach prawdopodobieństwa rozmiarów grup pakietów napływających do węzła sieci:

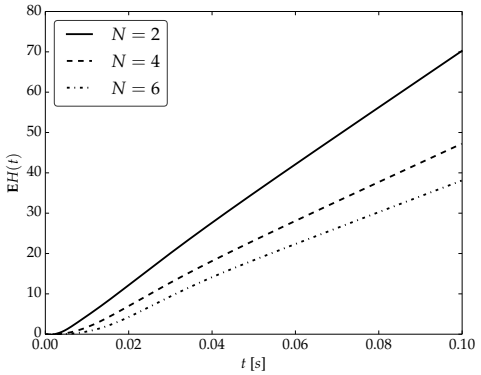
- $P_1 : p_1 = 0.4, p_2 = 0.6, p_k = 0, k > 2,$
- $P_2 : p_1 = 0.3, p_2 = 0.4, p3 = 0.3, p_k = 0, k > 3,$

gdzie p_i jest prawdopodobieństwem wpływu do systemu grupy i pakietów. Do węzła o pojemności $K = 8$ z N-progową dyscypliną wybudzania serwera napływają

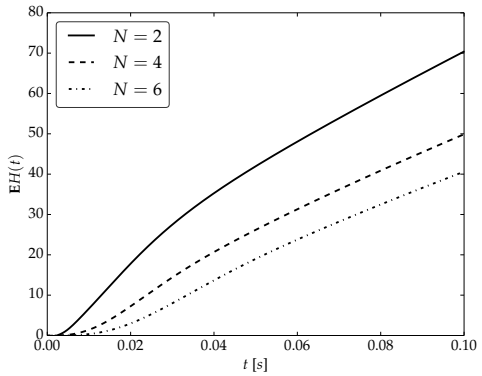
pakiety o rozmiarze 100 B według złożonego procesu Poissona odpowiednio z rozkładami wielkości grup pakietów P_1, P_2 oraz intensywnościami $\lambda_1 = 250$ i $\lambda_2 = 200$. Z powyższego wynika, że do systemu napływa średnio 400 pakietów na sekundę dla obu przypadków złożonych procesów Poissona. Rozważmy dwie intensywności obsługi zgłoszeń 500 kb/s i 320 kb/s według rozkładu wykładniczego, co daje obciążenie systemu odpowiednio na poziomie $\rho = 0.64$ lub $\rho = 1$. Średnią liczbę obsłużonych pakietów w zależności od obciążenia systemu, rozkładów wielkości napływających grup pakietów P_1, P_2 oraz wartości $N = 2, 4$ i 6 zaprezentowano na rysunku 3.2.3. Analogicznie, na rysunku 3.2.4 zilustrowano zmianę w czasie współczynnika utraty pakietów. Podobnie jak w przypadku długości kolejki w systemie ze strumieniem wejściowym w postaci złożonego procesu Poissona, rozkład prawdopodobieństwa wielkości grup napływających do systemu ma wpływ na zachowanie procesu liczącego obsłużone zgłoszenia.



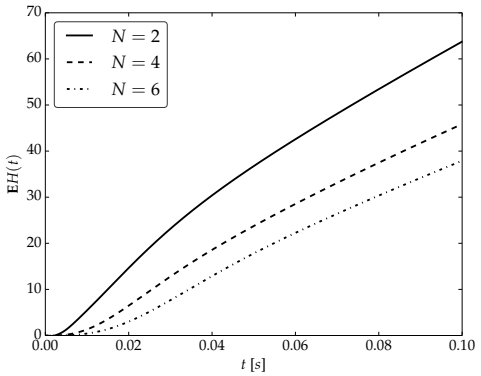
(a) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla P_1 i $\rho = 0.64$.



(b) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla P_2 i $\rho = 0.64$.

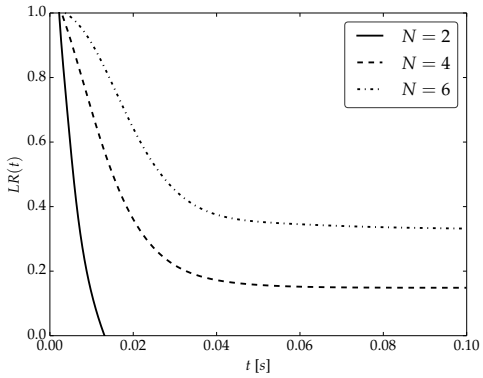


(c) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla P_1 i $\rho = 1$.

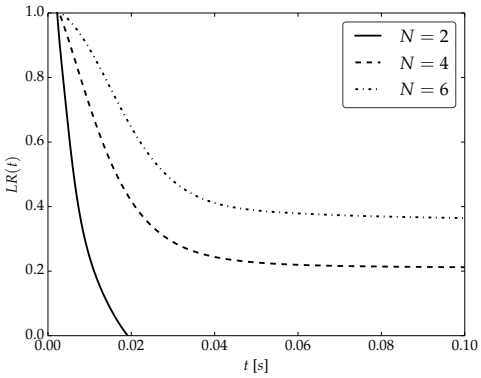


(d) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla P_2 i $\rho = 1$.

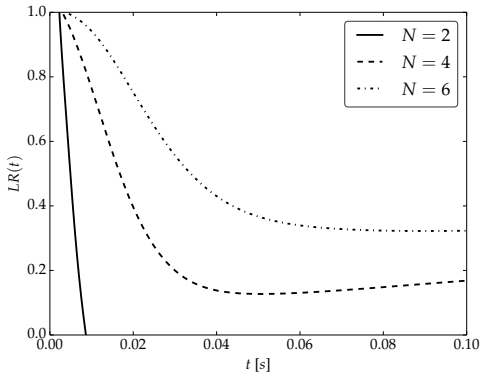
Rys. 3.2.3. Średnia liczba obsłużonych przez stanowisko obsługi pakietów do chwili t dla $\rho = 0.75$ (a), (b), $\rho = 1$ (c), (d) oraz rozkładów P_1 (a), (c) i P_2 (b), (d).



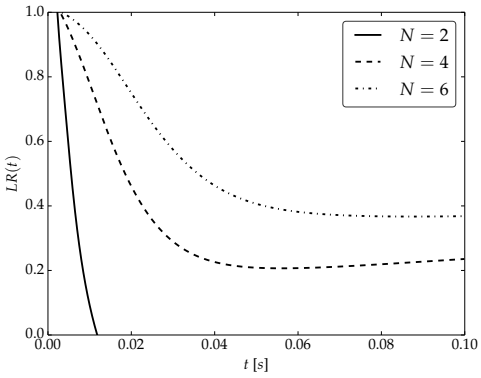
(a) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla P_1 i $\rho = 0.64$.



(b) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla P_2 i $\rho = 0.64$.



(c) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla P_1 i $\rho = 1$.



(d) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla P_2 i $\rho = 1$.

Rys. 3.2.4. Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla współczynników obciążenia serwera $\rho = 0.75$ (a), (b), $\rho = 1$ (c), (d) oraz rozkładów P_1 (a), (c) i P_2 (b), (d).

Rozdział 4

System kolejkowy z probabilistycznym mechanizmem wybudzania serwera

Rozdział dotyczy tranzytywnej analizy jednokanałowych systemów kolejkowych ze skończonym buforem, poissonowskim strumieniem wejściowym pakietów i z probabilistycznym mechanizmem wybudzania stanowiska obsługi. Przedstawione wyniki rozważań odnoszą się do długości kolejki [160, 161], opóźnienia kolejkowania [162] oraz procesu liczącego obsłużone zgłoszenia [163].

Modele kolejkowe ze skończonym buforem wykorzystywane są z powodzeniem do modelowania systemów, w których w sposób naturalny dochodzi do tworzenia się poczekalni, gdzie akumulowane są zadania, klienci, czy też pakiety, czemu towarzyszy m. in. ich opóźnienie obsługi, czy przepełnienie poczekalni. W szczególności, z tego typu modelami mamy do czynienia w przypadku ruchu pakietów w sieciach komputerowych. Jednym z wyzwań komunikacji bezprzewodowej np. Wi-Fi IEEE 802.11, WSN jest problem oszczędności energii. W praktyce stosowany jest mechanizm tymczasowego wyłączania stanowiska obsługi, np. w sytuacji, gdy bufor systemu jest pusty lub intensywność napływu pakietów jest ograniczona. Po okresie przestoju w pracy, stanowisko obsługi w węźle sieci często potrzebuje losowego czasu na uzyskania pełnej gotowości do pracy. Tego typu mechanizm wybudzania można zaobserwować np. w systemach produkcyjnych, czy standardzie transmisji GSM. W poprzednim rozdziale opisano modele kolejkowe z mechanizmem progowego wybudzania stanowiska obsługi, gdzie praca serwera zostaje zainicjowana, gdy w buforze kolejki nagromadzona jest określona z góry liczba pakietów. Niniejszy rozdział zawiera charakterystyki modeli kolejkowych ze skończonym buforem i mechanizmem probabilistycznego wybudzania serwera, gdzie serwer po okresie bezczynności potrzebuje losowego czasu, aby uzyskać pełną gotowość do pracy. W kontekście rozważanego mechanizmu, w [164–166] przedstawiono analizę zachowania pakietów w systemach z probabilistycznym wybudzaniem serwera w stanie ustalonym. Rezultaty dotyczące

analizy zużycia energii przez węzły sieci sensorowych za pomocą modeli kolejkowych z probabilistycznym wybudzaniem serwera można znaleźć w [119, 167], gdzie druga pozycja odnosi się do modelu usypiania/wybudzania serwera zgodnie z protokołem IEEE 802.15.4. Ponadto, w pozycji [168] można znaleźć wyniki badań na temat wykorzystania rozważanego modelu w kontekście sieci komórkowych, natomiast w [120] opisano zużycie energii przez centra danych z serwerami wyposażonymi w mechanizmy kontroli ich pracy.

4.1. Kolejkowanie procesów Poissona

4.1.1. Opis modelu

Rozważmy model kolejki $M/G/1/K$ z jedną stacją obsługi zgłoszeń i skończonym buforem o rozmiarze $K-1$, do którego pakiety napływają według procesu Poissona z parametrem λ, a następnie są obsługiwane według rozkładu prawdopodobieństwa określonego dystrybuantą F zgodnie z dyscypliną FIFO. Zakładamy, że w chwili $t=0$ w buforze może być zakumulowana pewna liczba pakietów. Każdy okres pracy serwera jest inicjowany w momencie, gdy do pustego systemu wpłynie pierwszy pakiet. Ponadto, obsługa pierwszego pakietu, w każdym okresie pracy serwera jest poprzedzona losowym czasem rozruchu serwera według rozkładu o dystrybuancie G, co wynika z założenia, że serwer po okresie oczekiwania potrzebuje pewnego czasu (*setup time*), aby uzyskać pełną gotowość operacyjną.

W sytuacji, kiedy w systemie nie znajduje się żaden pakiet w chwili $t=0$, system znajduje się stanie bezczynności, a jego praca zostaje zainicjowana wraz z napływem pierwszego pakietu do systemu, czemu towarzyszy równoczesne rozpoczęcie rozruchu stanowiska obsługi. Zauważmy, że mogą wystąpić w tym kontekście trzy wzajemnie wykluczające się zdarzenia losowe:

1. pierwszy pakiet wpływa do systemu przed chwilą t oraz okres rozruchu serwera kończy się przed t, co będziemy oznaczać w dalszej części tekstu przez $A_1(t)$;

2. pierwszy pakiet wpływa do systemu przed chwilą t, natomiast okres rozruchu serwera kończy się po t, co będziemy oznaczać przez $A_2(t)$;

3. pierwszy pakiet wpływa do systemu po chwili t, co będzie oznaczane przez $A_3(t)$.

4.1.2. Długość kolejki

Sekcja przedstawia analizę długości kolejki w systemach typu $M/G/1/K$ z probabilistycznym mechanizmem wybudzania stanowiska obsługi w stanie nieustalonym [145].

Zaprezentowana charakterystyka podana jest w postaci transformaty Laplace'a, uzyskanej na podstawie metodologii włożonych łańcuchów Markowa (sekcja A.2.4), twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych (sekcja A.1.4), metody potencjału błądzenia losowego (sekcja A.9), teorii odnowy oraz algebry liniowej. Rozważania na temat tranzytywnej analizy modeli kolejkowych z nieskończonym buforem oraz różnymi ograniczeniami w dostępie do stacji obsługi, m.in. probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera można znaleźć [150, 151]. W pracy [118] opisano zależną od czasu charakterystykę długości kolejki w kontekście linii produkcyjnej, gdzie okresy pracy stanowiska obsługi poprzedzone są losowym czasem niezbędnym do uzyskania przez maszynę pełnej gotowości do pracy, natomiast okresy bezczynności poprzedzone są losowym czasem niezbędnym do zatrzymania maszyny.

Oznaczmy rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki w chwili t przy warunku, że $X(0) = n$ w następujący sposób

$$Q_n(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{X(t) = m \,|\, X(0) = n\}, \quad t > 0,\ 0 \le m, n \le K. \tag{4.1.1}$$

Celem niniejszego rozdziału jest wyznaczenie jawnej postaci transformaty Laplace'a rozkładu $Q_n(t,m)$, tzn.

$$\widehat{q}_n(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} Q_n(t,m)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{4.1.2}$$

Korzystając z podejścia opartego o włożone łańcuchy Markowa oraz twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych można sformułować układ równań całkowych typu Volterry dla (4.1.1).

Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$Q_0^{(i)}(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(X(t) = m\big) \cap A_i(t) \,|\, X(0) = 0\}, \tag{4.1.3}$$

gdzie $t > 0$, $0 \le m \le K$ oraz $i = 1, 2, 3$. Stąd, przykładowo $Q_0^{(1)}(t,m)$ reprezentuje prawdopodobieństwo obecności dokładnie m pakietów w systemie w chwili t, gdy pierwszy okres rozruchu systemu zakończył się przed chwilą t, przy założeniu, że system był pusty w chwili $t = 0$. Na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym zostają otrzymane następujące równości

$$Q_0(t,m) = \mathbf{P}\{X(t) = m \,|\, X(0) = 0\} = \sum_{i=1}^{3} Q_0^{(i)}(t,m). \tag{4.1.4}$$

oraz

$$\widehat{q}_0(s,z) = \sum_{i=1}^{3} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} Q_0^{(i)}(t,m)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1.5}$$

Biorąc pod uwagę $A_1(t)$, otrzymujemy reprezentację $Q_0^{(1)}$ w postaci

$$\begin{aligned} Q_0^{(1)}(t,m) = \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \int_{u=0}^{t-y} \Bigg(& \sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} Q_{i+1}(t-y-u,m) \\ & + Q_K(t-y-u,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \Bigg)\,\mathrm{d}G(u). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

W powyższym równaniu (4.1.6), pierwszy składnik całkowanej sumy odnosi się do sytuacji, kiedy w buforze systemu jest co najmniej jedno miejsce wolne w chwili zakończenia okresu rozruchu systemu. Natomiast drugi składnik całkowanej sumy dotyczy przypadku, gdy bufor systemu jest pełny w tym momencie. Podobnie dla $A_2(t)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q_0^{(2)}(t,m) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\overline{G}(t-y)\Bigg(&\mathrm{I}\{1 \le m \le K-1\}\mathrm{e}^{-\lambda(t-y)}\frac{\big(\lambda(t-y)\big)^{m-1}}{(m-1)!} \\ &+ \mathrm{I}\{m = K\}\sum_{i=K-1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(t-y)}\frac{\big(\lambda(t-y)\big)^{i}}{i!}\Bigg)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

gdzie $\overline{G}(\cdot) = 1 - G(\cdot)$. W równaniu (4.1.7), pierwszy składnik sumy podcałkowej dotyczy przypadku, gdzie liczba pakietów w systemie w chwili t jest mniejsza bądź równa $K-1$. Natomiast, drugi składnik tej sumy odpowiada sytuacji, w której liczba pakietów w systemie wynosi K, co odpowiada zdarzeniu pojawienia się w systemie $K-1$ pakietów w czasie $(t-y)$. Fizycznie w systemie może być buforowanych tylko $K-1$ pakietów, natomiast każda nadwyżka zgłoszeń zostaje utracona. W przypadku zmiennej losowej $A_3(t)$ otrzymujemy

$$Q_0^{(3)}(t,m) = \mathrm{I}\{m = 0\}\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{4.1.8}$$

Na podstawie równań (4.1.6)–(4.1.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q_0(t,m) = \sum_{i=1}^{3} Q_0^{(i)}(t,m) = \int_{y=0}^{t}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\int_{u=0}^{t-y}\Bigg(&\sum_{i=0}^{K-2}\mathrm{e}^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^i}{i!} \\ &\times Q_{i+1}(t-y-u,m) + Q_K(t-y-u,m)\sum_{i=K-1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^i}{i!}\Bigg)\,\mathrm{d}G(u) \\ &+ \int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\overline{G}(t-y)\Bigg(\mathrm{I}\{1 \le m \le K-1\}\mathrm{e}^{-\lambda(t-y)}\frac{\big(\lambda(t-y)\big)^{m-1}}{(m-1)!} \\ &+ \mathrm{I}\{m = K\}\sum_{i=K-1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(t-y)}\frac{\big(\lambda(t-y)\big)^{i}}{i!}\Bigg)\,\mathrm{d}y + \mathrm{I}\{m = 0\}\mathrm{e}^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Rozważmy przypadek, w którym system rozpoczyna pracę z $1 \le n \le K$ pakietami. Okresy obsługi zgłoszeń są momentami Markowa [152], stąd stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych (sekcja A.1.4.7) przy założeniu, że serwer rozpoczyna pracę po czasie $t = 0$, otrzymujemy

następujący układ równań

$$
\begin{aligned}
Q_n(t,m) = \int_0^t \Bigg(& \sum_{i=0}^{K-n-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} Q_{n+i-1}(t-y,m) \\
& + Q_{K-1}(t-y,m) \sum_{i=K-n}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}F(y) \\
& + \overline{F}(t) \Bigg(\mathrm{I}\{n \le m \le K-1\} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \Bigg),
\end{aligned}
\tag{4.1.10}
$$

gdzie $1 \le n \le K$. Podsumowując powyższe równanie (4.1.10), pierwszy składnik całkowanej sumy odpowiada sytuacji, w której bufor systemu ma wolne miejsca w chwili zakończenia pierwszej obsługi zgłoszeń $0 < y < t$, podczas gdy kolejny składnik sumy dotyczy przypadku, gdy bufor zostaje przepełniony przed chwilą t. Składnik, który jest dodawany do całki odpowiada zakończeniu transmisji pierwszego pakietu po czasie t.

Poprzez analogię do (4.1.6) zauważmy, że następujące równanie jest prawdziwe

$$
\begin{aligned}
& \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \int_{u=0}^{t-y} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} Q_j(t-y-u,m)\,\mathrm{d}G(u) \\
& = \int_{y=0}^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \int_{t=y}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \int_{u=0}^{t-y} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} Q_j(t-y-u,m)\,\mathrm{d}G(u) \\
& = \int_{y=0}^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+s)y}\,\mathrm{d}y \int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)u} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!}\,\mathrm{d}G(u) \int_{y+u}^{\infty} \mathrm{e}^{-s(t-y-u)} \\
& \times Q_j(t-y-u,m)\,\mathrm{d}t = \hat{a}_i(s)\widehat{q}_j(s,m),
\end{aligned}
\tag{4.1.11}
$$

gdzie

$$
\hat{a}_i(s) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda}{\lambda+s} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^i}{i!}\,\mathrm{d}G(y), \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{4.1.12}
$$

Podobnie, w analogiczny sposób jak (4.1.7) definiujemy

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_i(s) & \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}y \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \overline{G}(t-y) \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \frac{\big(\lambda(t-y)\big)^i}{i!}\,\mathrm{d}y \\
& = \frac{\lambda}{\lambda+s} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \overline{G}(u)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$. Biorąc pod uwagę (4.1.11)–(4.1.13), równanie (4.1.9) można zapisać w postaci

$$
\widehat{q}_0(s,m) = \sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s)\widehat{q}_{i+1}(s,m) + \widehat{q}_K(s,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\beta}(s,m), \tag{4.1.14}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}(s,m) & \stackrel{def}{=} \mathrm{I}\{1 \le m \le K-1\} \overline{a}_{m-1}(s) \\
& \quad + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-1}^{\infty} \overline{a}_i(s) + \mathrm{I}\{m = 0\} \frac{1}{\lambda+s}.
\end{aligned}
\tag{4.1.15}
$$

Ponadto, zdefiniujmy

$$\hat{\alpha}_n(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, \mathrm{d}F(t) \tag{4.1.16}$$

oraz

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_n(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t} \overline{F}(t) \Big(& \mathrm{I}\{n \le m \le K-1\} \frac{(\lambda t)^{m-n}}{(m-n)!} \\ & + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \Big) \, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$. Stąd, równanie (4.1.10) można zapisać w postaci

$$\widehat{q}_n(s,m) = \sum_{i=0}^{K-n-1} \hat{\alpha}_i(s) \widehat{q}_{n+i-1}(s,m) + \widehat{q}_{K-1}(s,m) \sum_{i=K-n}^{\infty} \hat{\alpha}_i(s) + \hat{\gamma}_n(s,m), \tag{4.1.18}$$

gdzie $1 \le n \le K$.

Następnie, w równaniach (4.1.14), (4.1.18) wykonujemy następujące podstawienie $\widehat{u}_n(s,m) \stackrel{def}{=} \widehat{q}_{K-n}(s,m)$ dla $0 \le n \le K$, w wyniku czego (4.1.18) zostaje przekształcone do postaci

$$\sum_{i=-1}^{n} \hat{\alpha}_{i+1}(s) \widehat{u}_{n-i}(s,m) - \widehat{u}_n(s,m) = \hat{\phi}_n(s,m), \tag{4.1.19}$$

gdzie $0 \le n \le K-1$ oraz $\phi_i(s,m)$ jest zdefiniowane następująco

$$\hat{\phi}_n(s,m) \stackrel{def}{=} \hat{\alpha}_{n+1}(s) \widehat{u}_0(s,m) - \widehat{u}_1(s,m) \sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{\alpha}_i(s) - \hat{\gamma}_{K-n}(s,m). \tag{4.1.20}$$

Podobnie, równanie (4.1.14) zostaje sprowadzone do postaci

$$\widehat{u}_K(s,m) = \sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s) \widehat{u}_{K-i-1}(s,m) + \widehat{u}_0(s,m) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\beta}(s,m). \tag{4.1.21}$$

Na podstawie metody potencjału (sekcja A.9) rozwiązanie układu (4.1.19) ma postać

$$\widehat{u}_n(s,m) = C(s,m) \hat{R}_{n+1}(s) + \sum_{i=0}^{n} \hat{R}_{n-i}(s) \hat{\phi}_i(s,m), \quad 0 \le n \le K, \tag{4.1.22}$$

gdzie $(\hat{R}_n)$ jest potencjałem ciągu $(\hat{\alpha}_n)$. Podstawiając $n = 0$ w powyższym równaniu (4.1.22), otrzymujemy

$$\widehat{u}_0(s,m) = C(s,m) \hat{R}_1(s). \tag{4.1.23}$$

Następnie, podstawiając $n = 1$ oraz (4.1.20), (4.1.23) w (4.1.22), uzyskujemy

$$\begin{aligned} \widehat{u}_1(s,m) &= C(s,m) \hat{R}_2(s) + \hat{R}_1(s) \hat{\phi}_0(s,m) \\ &= C(s,m) \hat{R}_2(s) + \hat{R}_1(s) \Big(\hat{\alpha}_1(s) \hat{R}_1(s) C(s,m) - \widehat{u}_1(s,m) \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\alpha}_i(s) - \hat{\gamma}_K(s,m) \Big). \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Stąd

$$\widehat{u}_1(s,m) = \hat{\theta}(s)\Big(C(s,m)\big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\big) - \hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_k(s,m)\Big), \tag{4.1.25}$$

gdzie

$$\hat{\theta}(s) \stackrel{def}{=} \Big(1 + \hat{R}_1(s)\sum_{i=1}^{\infty}\hat{\alpha}_i(s)\Big)^{-1} = \frac{f(\lambda+s)}{f(s)}, \tag{4.1.26}$$

natomiast f jest transformatą Laplace'a-Stieltjesa dystrybuanty F, tzn.

$$f(s) \stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}F(t), \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{4.1.27}$$

Na podstawie (4.1.23), (4.1.25), wyrażenie $\hat{\phi}_n(s,m)$, $n \geq 0$, zdefiniowane w (4.1.20) może być zapisane jako funkcja zależna od $C(s,m)$. Wyznaczenie postaci $C(s,m)$ zostanie dokonane w następujący sposób. Podstawiając (4.1.22), (4.1.23) i (4.1.25) w (4.1.21) otrzymujemy następującą równość

$$\sum_{i=0}^{K-2}\hat{a}_i(s)\widehat{u}_{K-i-1}(s,m) = \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\widehat{u}_i(s,m), \tag{4.1.28}$$

która prowadzi do

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_K(s,m) &= \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\Big(C(s,m)\hat{R}_{i+1}(s) + \sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\hat{\phi}_j(s,m)\Big) \\
&\quad + C(s,m)\hat{R}_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty}\hat{a}_i(s) + \hat{\beta}(s,m) \\
&= \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\Bigg(C(s,m)\hat{R}_{i+1}(s) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{\alpha}_{j+1}(s)\widehat{u}_0(s,m) - \widehat{u}_1(s,m)\sum_{r=j+1}^{\infty}\hat{\alpha}_r(s) - \hat{\gamma}_{K-j}(s,m)\Big)\Bigg) \\
&\quad + C(s,m)\hat{R}_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty}\hat{a}_i(s) + \hat{\beta}(s,m) \\
&= C(s,m)\Bigg(\sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\Big(\hat{R}_{i+1}(s) + \sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{R}_1(s)\hat{\alpha}_{j+1}(s) \\
&\quad - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\big)\Big)\sum_{r=j+1}^{\infty}\hat{\alpha}_r(s)\Big) + \hat{R}_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty}\hat{a}_i(s)\Bigg) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}\sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_K(s,m)\hat{\theta}(s)\sum_{r=j+1}^{\infty}\hat{\alpha}_r(s) \\
&\quad - \hat{\gamma}_{K-j}(s,m)\Big) + \hat{\beta}(s,m) = \Psi_1(s)C(s,m) + \chi_1(s,m),
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

gdzie

$$\Psi_1(s) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s)\Bigg(\hat{R}_{i+1}(s) + \sum_{j=0}^{i} \hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{R}_1(s)\hat{\alpha}_{j+1}(s) - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\big)\Big) \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}_r(s)\Bigg) + \hat{R}_1(s) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) \tag{4.1.30}$$

i

$$\chi_1(s,m) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1} \sum_{j=0}^{i} \hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_K(s,m)\hat{\theta}(s) \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}_r(s) - \hat{\gamma}_{K-j}(s,m)\Big) + \hat{\beta}(s,m). \tag{4.1.31}$$

Podobnie, podstawiając $n = K$ w (4.1.22) oraz korzystając z (4.1.23), (4.1.25) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_K(s,m) &= C(s,m)\hat{R}_{K+1}(s) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s)C(s,m) \\
&\quad - \hat{\theta}(s)\Bigg(C(s,m)\Big(\hat{R}_2(s)+\hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\Big) - \hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_K(s,m)\Bigg)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j(s) - \hat{\gamma}_{K-i}(s,m)\Bigg) \\
&= C(s,m)\Bigg(\hat{R}_{K+1}(s) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s) - \hat{\theta}(s)\Big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\Big) \\
&\quad \times \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s)\Bigg)\Bigg) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_K(s,m) \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s) - \hat{\gamma}_{K-i}(s,m)\Big) \\
&= \Psi_2(s)C(s,m) + \chi_2(s,m),
\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

gdzie

$$\Psi_2(s) \stackrel{def}{=} \hat{R}_{K+1}(s) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s) - \hat{\theta}(s)\Big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\Big) \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s)\Bigg) \tag{4.1.33}$$

i

$$\chi_2(s,m) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_K(s,m) \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s) - \hat{\gamma}_{K-i}(s,m)\Big). \tag{4.1.34}$$

Równania (4.1.29), (4.1.32) prowadzą do

$$C(s,m) = \frac{\chi_2(s,m) - \chi_1(s,m)}{\Psi_1(s) - \Psi_2(s)}. \tag{4.1.35}$$

Długość kolejki w systemach typu $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania

Na podstawie (4.1.20), (4.1.22), (4.1.23), (4.1.25) oraz (4.1.35) można sformułować następującego twierdzenie:

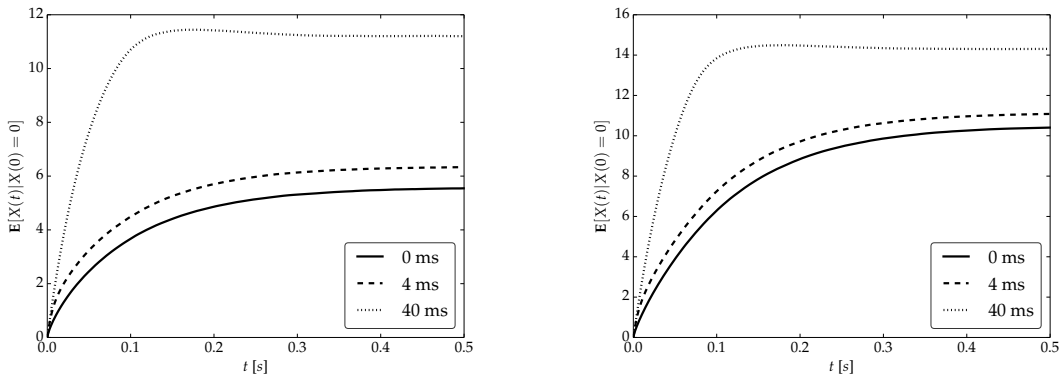
Twierdzenie 4.1.1 *Transformata Laplace'a zależnego od czasu rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania stanowiska obsługi ma postać*

$$\begin{aligned}\widehat{q}_n(s,m) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{X(t)=m\,|\,X(0)=n\}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\chi_2(s,m)-\chi_1(s,m)}{\Psi_1(s)-\Psi_2(s)}\Bigg(\hat{R}_{K-n+1}(s)+\sum_{i=0}^{K-n}\hat{R}_{K-n-i}(s) \\ &\times\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s)-\hat{\theta}(s)\Big(\hat{R}_2(s)+\hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\Big)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j(s)\Bigg)\Bigg) \\ &+\sum_{i=0}^{K-n}\hat{R}_{K-n-i}(s)\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}_1(s)\hat{\gamma}_K(s,m)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\gamma}_j(s,m)-\hat{\gamma}_{K-i}(s,m)\Big),\end{aligned} \tag{4.1.36}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s)>0$ *oraz formuły* $\hat{\alpha}_n(s)$, $\hat{\gamma}_n(s,m)$, $\hat{\theta}(s)$, $\Psi_1(s)$, $\chi_1(s,m)$, $\Psi_2(s)$ *i* $\chi_2(s,m)$ *zostały odpowiednio zdefiniowane w (4.1.16), (4.1.17), (4.1.26), (4.1.30), (4.1.31), (4.1.33), (4.1.34), natomiast* $(\hat{R}_n)$ *jest potencjałem ciągu* $(\hat{\alpha}_i)$.

Przykład Strumień pakietów o rozmiarze 500 B wpływa do pustego węzła sieci bezprzewodowej o pojemności $K=24$, a następnie zostaje transmitowany z średnią prędkością 1.2 Mb/s według rozkładu Weibulla (sekcja A.1.5.7) z parametrami $k=0.5$ i $\bar{\mu}=600$. Zatem średni czas pomiędzy obsługą kolejnych pakietów wynosi 3.(3) ms. Rozkład Weibulla należy do klasy rozkładów z tak zwanym ciężkim ogonem, które ze względu na swoje charakterystyczne właściwości wykorzystywane są w modelowaniu ruchu sieciowego [114, 169]. Ponadto, rozważmy dwie prędkości napływu zgłoszeń do systemu 0.9 Mb/s i 1.15 Mb/s, w wyniku czego czasy pomiędzy kolejnymi napływami pakietów mają rozkład wykładniczy odpowiednio z parametrem $\lambda_1=225$ i $\lambda_2=287.5$. Biorąc pod uwagę intensywność strumienia wejściowego i szybkość transmisji pakietów otrzymujemy odpowiednio współczynniki obciążenia systemu $\rho=0.75$ i $\rho=0.958(3)$. Rozważmy przypadki, w których po wpłynięciu pierwszego pakietu do pustego systemu stanowisko obsługi potrzebuje średnio odpowiednio 0, 4 i 40 ms na osiągnięcie pełnej gotowości operacyjnej. Okres rozruchu jest modelowany za pomocą rozkładu deterministycznego dla czasu 0 ms oraz rozkładu wykładniczego w pozostałych przypadkach. Na rysunku 4.1.1 przedstawiono średnią liczbę pakietów w systemie w chwili t. Ponadto, wyniki powyższych rozwa-

żań zostały zaprezentowane na rysunku 4.1.2 przedstawiającym prawdopodobieństwa pobytu w systemie m pakietów przy założeniu, że system rozpoczął pracę bez zgłoszeń. Ponadto uzyskane analitycznie rezultaty zostały potwierdzone symulacją zdarzeń dyskretnych opisaną w sekcji 1.8.2. Tabela 4.1.1 zawiera rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym, na podstawie których można wywnioskować, że zaprezentowane na rysunku 4.1.2 charakterystyki dla $\rho = 0.75$ zbiegają nieco szybciej do stanu ustalonego niż w przypadku $\rho = 0.958(3)$. Dla lepszej wizualizacji tranzytywnego zachowania długości kolejki, na rysunku 4.1.3 zaprezentowano przestrzenną ilustrację rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki zależną od czasu.

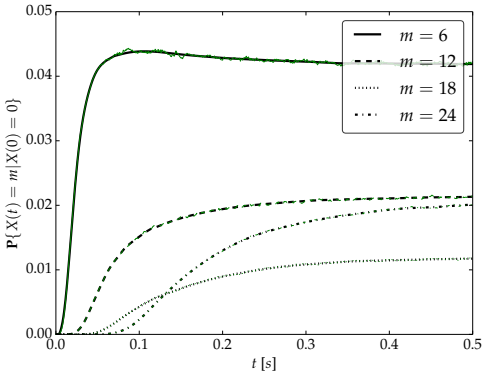


(a) Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$.

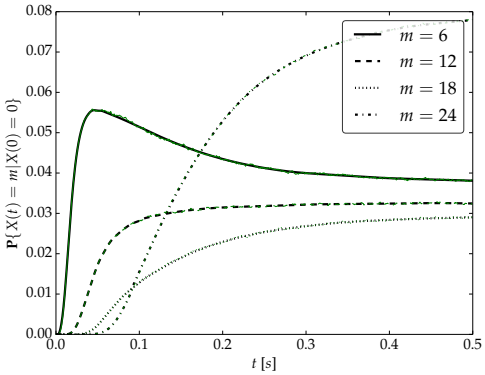
(b) Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$.

Rys. 4.1.1. Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 0.958(3)$, w sytuacji gdy system rozpoczął pracę bez zgłoszeń.

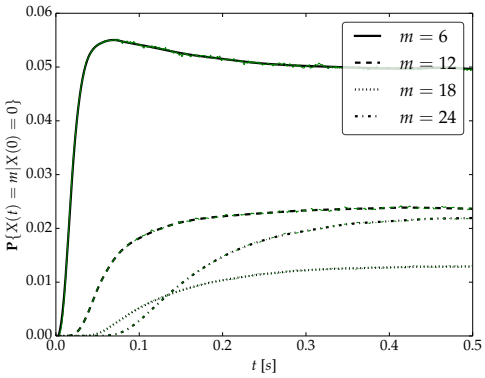
Przykład Rozważmy sytuację analogiczną jak w poprzednim przykładzie przy założeniu, że system rozpoczyna pracę z maksymalną dopuszczalną liczbą pakietów. Zachowanie rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w tym przypadku jest pokazane na rysunku 4.1.4. Można zaobserwować, że po upływie pewnego czasu praca systemu stabilizuje się, po czym uzyskane rozkłady prawdopodobieństwa pokrywają się z rozkładami w stanie ustalonym z poprzedniego przykładu, gdzie system rozpoczynał pracę z bez zgłoszeń. Na rysunku 4.1.5 zaprezentowano średnią liczbę pakietów w systemie w chwili t.



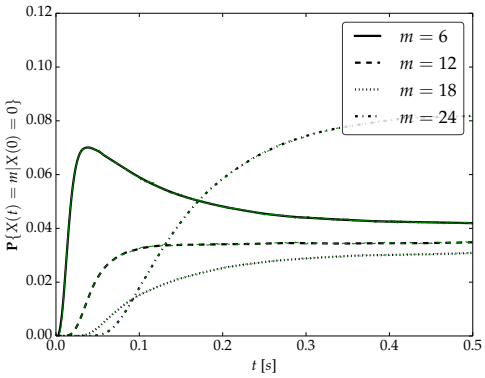
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 0 ms.



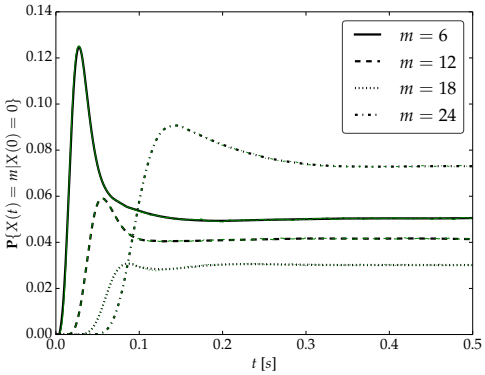
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 0 ms.



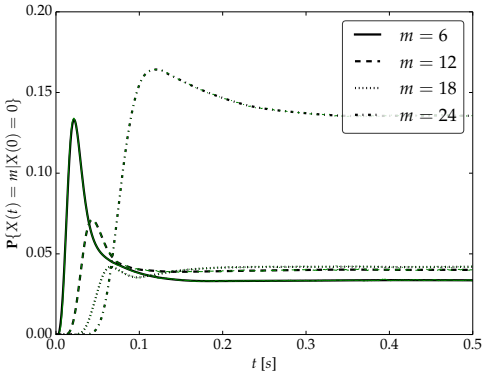
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 4 ms.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 4 ms.

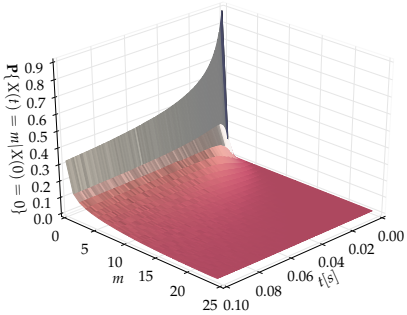


(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 40 ms.

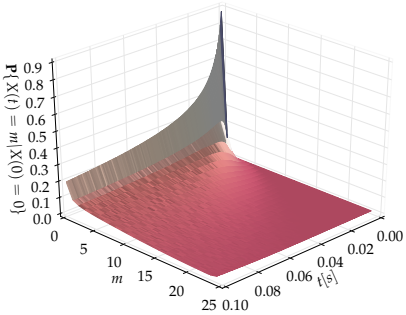


(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 40 ms.

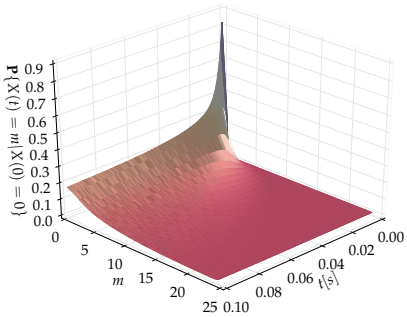
Rys. 4.1.2. Zachowanie kolejki w systemie typu $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera dla $\rho = 0.75$ oraz $\rho = 0.958(3)$. Zaprezentowane rezultaty dotyczą odpowiednio okresów rozruchu serwera wynoszących 0, 4 i 40 ms. Dane analityczne (kolor czarny) zweryfikowano symulacją zdarzeń dyskretnych (kolor zielony).



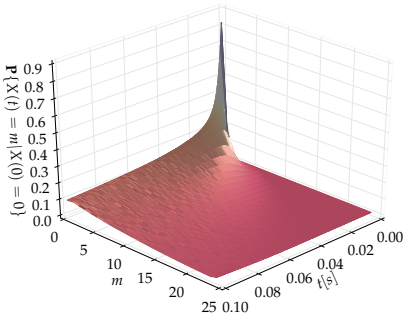
(a) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 0 ms.



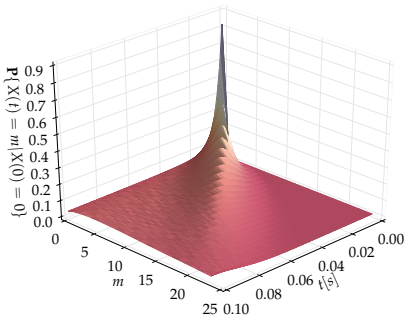
(b) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 0 ms.



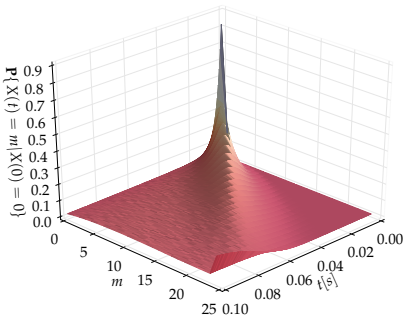
(c) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 4 ms.



(d) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 4 ms.



(e) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 40 ms.



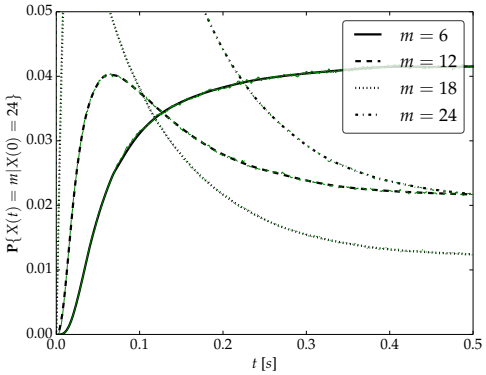
(f) Tranzytywny rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 40 ms.

Rys. 4.1.3. Zmiana w czasie rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 958(3)$ oraz okresów rozruchu stanowiska obsługi wynoszących odpowiednio 0, 4 i 40 ms.

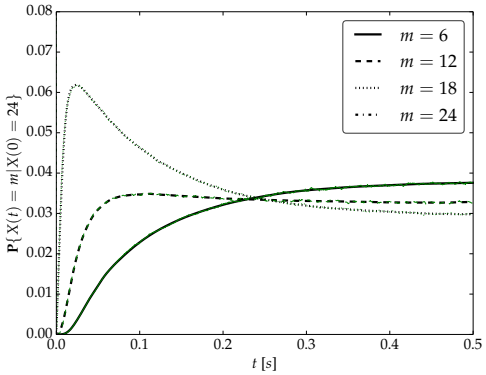
$\mathbf{P}\{X(\infty) = m \,|\, X(0) = 0\}$

	$\rho = 0.75$			$\rho = 0.958(3)$		
m	st 0 ms	st 4 ms	st 40 ms	st 0 ms	st 4 ms	st 40 ms
0	0.2666	0.1411	0.0307	0.1201	0.0569	0.0136
1	0.1139	0.1273	0.0406	0.0608	0.0590	0.0195
2	0.0822	0.1039	0.0457	0.0500	0.0563	0.0235
3	0.0659	0.0834	0.0489	0.0446	0.0513	0.0274
4	0.0554	0.0689	0.0498	0.0421	0.0468	0.0295
5	0.0481	0.0582	0.0507	0.0398	0.0445	0.0318
6	0.0419	0.0497	0.0505	0.0381	0.0419	0.0336
7	0.0364	0.0431	0.0497	0.0368	0.0405	0.0358
8	0.0328	0.0375	0.0485	0.0359	0.0387	0.0367
9	0.0290	0.0339	0.0472	0.0348	0.0372	0.0379
10	0.0265	0.0298	0.0452	0.0339	0.0361	0.0387
11	0.0238	0.0267	0.0432	0.0332	0.0355	0.0393
12	0.0213	0.0237	0.0415	0.0325	0.0348	0.0401
13	0.0192	0.0215	0.0401	0.0319	0.0337	0.0405
14	0.0175	0.0191	0.0378	0.0311	0.0333	0.0410
15	0.0157	0.0174	0.0359	0.0307	0.0328	0.0413
16	0.0142	0.0159	0.0339	0.0302	0.0319	0.0418
17	0.0126	0.0146	0.0320	0.0294	0.0311	0.0419
18	0.0117	0.0129	0.0301	0.0290	0.0313	0.0420
19	0.0106	0.0115	0.0282	0.0287	0.0301	0.0419
20	0.0098	0.0107	0.0266	0.0280	0.0295	0.0411
21	0.0087	0.0098	0.0249	0.0275	0.0291	0.0417
22	0.0079	0.0090	0.0234	0.0269	0.0285	0.0418
23	0.0073	0.0081	0.0222	0.0262	0.0281	0.0418
24	0.0201	0.0220	0.0731	0.0789	0.0828	0.1356

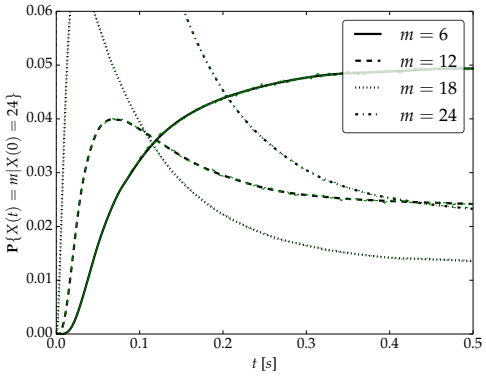
Tab. 4.1.1. Rozkład prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie $M/G/1/K$ z probabilistycznym wybudzaniem serwera w stanie ustalonym, w sytuacji gdy system rozpoczyna pracę bez zgłoszeń.



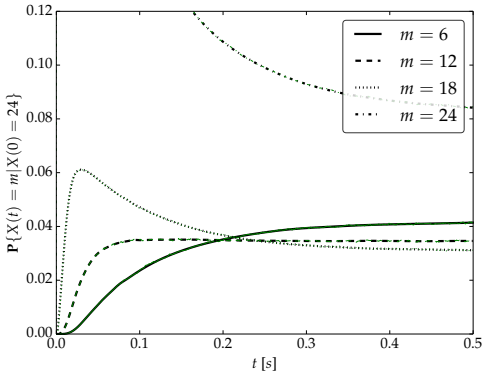
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 0 ms.



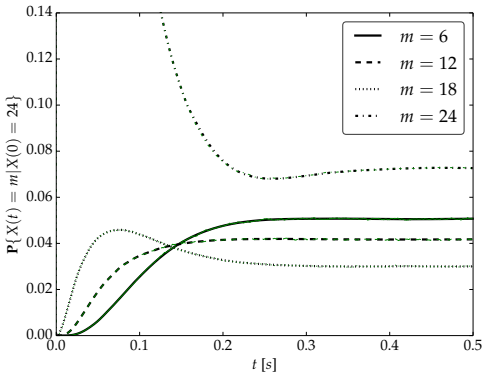
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 0 ms.



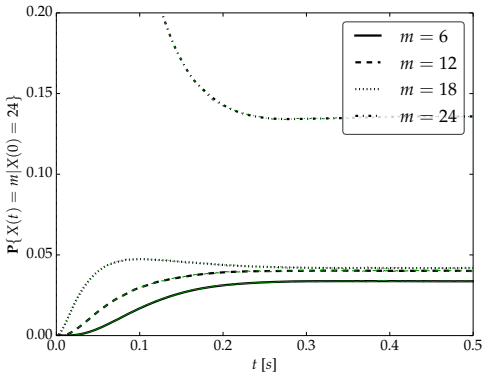
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 4 ms.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 4 ms.

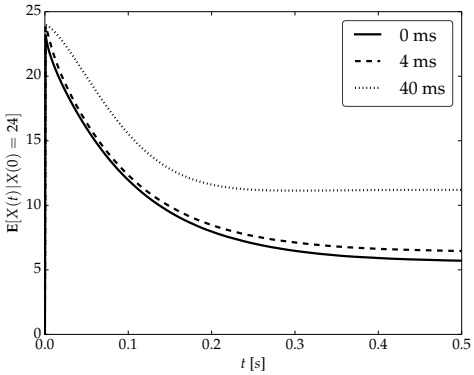


(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 40 ms.

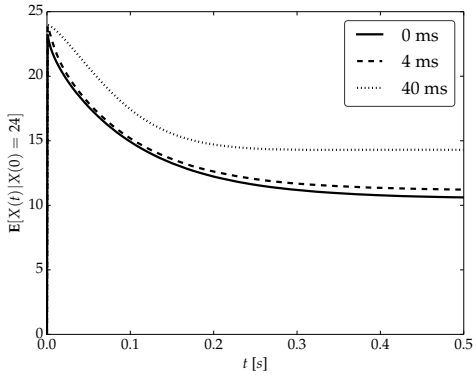


(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$ oraz okresu rozruchu wynoszącego 40 ms.

Rys. 4.1.4. Zachowanie długości kolejki w systemie z probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera, który rozpoczął pracę z maksymalną liczbą pakietów. Wyniki zaprezentowano dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 0.958(3)$ oraz okresów rozruchu serwera wynoszących 0, 4 i 40 ms.



(a) Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.75$.



(b) Średnia liczba pakietów w systemie w chwili t dla $\rho = 0.958(3)$.

Rys. 4.1.5. Średnia liczba pakietów w systemie z probabilistycznym mechanizmem wybudzania w chwili t dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 0.958(3)$, w sytuacji gdy system rozpoczął pracę z maksymalną liczbą pakietów.

4.1.3. Opóźnienie kolejkowania

W sekcji opisano tranzytywną analizę opóźnienia kolejkowania w systemach typu $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania stanowiska obsługi [147]. Zaprezentowana charakterystyka została wyznaczona w sposób podobny jak przedstawiona w poprzedniej sekcji długość kolejki. Ponadto, wyniki na temat tranzytywnej analizy opóźnienia kolejkowania w systemach typu $M/G/1/K$ z opóźnionym wybudzaniem serwera można znaleźć w sekcji 3.1.5.

Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$V_n(t,x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{V(t) > x \,|\, X(0) = n\}, \quad t,x > 0,\ 0 \le n \le K, \tag{4.1.37}$$

Wynikiem poniższych rozważań będzie jawna postać transformaty

$$\widehat{v}_n(s,x) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} V_n(t,x)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{4.1.38}$$

Niech

$$V_0^{(i)}(t,x) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(V(t) > x\big) \cap A_i(t) \,|\, X(0) = 0\}, \tag{4.1.39}$$

gdzie $t,x > 0$, $0 \le m \le K$ dla $i = 1,2,3$, natomiast $A_i(t)$ zostało określone na początku tego rozdziału. Stąd, korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, otrzymujemy

$$V_0(t,x) = \mathbf{P}\{V(t) > x \,|\, X(0) = 0\} = \sum_{i=1}^{3} V_0^{(i)}(t,x). \tag{4.1.40}$$

Analogicznie jak w przypadku (4.1.4)–(4.1.7) wyrażenia $V_0^{(i)}(t,x)$ dla $i = 1,2,3$

zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} V_0^{(1)}(t,x) = \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \int_{u=0}^{t-y} \Bigg(\sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} V_{i+1}(t-y-u,x) \\ + V_K(t-y-u,x) \sum_{i=K-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}G(u), \end{aligned} \tag{4.1.41}$$

$$\begin{aligned} V_0^{(2)}(t,x) = \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \Bigg(\int_{u=t-y}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \frac{\big(\lambda(t-y)\big)^i}{i!} \\ \times \overline{F}^{(i+1)*}(x-y-u+t)\,\mathrm{d}G(u) \Bigg) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

oraz

$$V_0^{(3)}(t,x) = 0. \tag{4.1.43}$$

Zatem korzystając z (4.1.41)–(4.1.43) równanie (4.1.40) można zapisać

$$\begin{aligned} V_0(t,x) = \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_{u=0}^{t-y} \Bigg(\sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} V_{i+1}(t-y-u,x) \\ + V_K(t-y-u,x) \sum_{i=K-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}G(u)\,\mathrm{d}y \\ + \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \Bigg(\int_{u=t-y}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \frac{\big(\lambda(t-y)\big)^i}{i!} \\ \times \overline{F}^{(i+1)*}(x-y-u+t)\,\mathrm{d}G(u) \Bigg) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Weźmy teraz pod uwagę przypadek, kiedy system w chwili rozpoczęcia pracy $t = 0$ nie jest pusty. Ponownie stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych względem pierwszej chwili zakończenia obsługi zgłoszeń po $t = 0$, otrzymujemy następujący układ równań całkowych

$$\begin{aligned} V_n(t,x) = \int_0^t \Bigg(\sum_{i=0}^{K-n-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} V_{n+i-1}(t-y,x) \\ + V_{K-1}(t-y,x) \sum_{i=K-n}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}F(y) \\ + \mathrm{I}\{1 \le n \le K-1\} \int_t^{\infty} \overline{F}^{(n+i-1)*}(x-y+t)\,\mathrm{d}F(y), \end{aligned} \tag{4.1.45}$$

gdzie $1 \le n \le K$.

Korzystając z notacji wprowadzonej w (4.1.38) oraz (4.1.41) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \int_{u=0}^{t-y} \mathrm{e}^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^i}{i!} V_j(t-y-u,x)\,\mathrm{d}G(u)\\
&= \int_{y=0}^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \int_{t=y}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \int_{u=0}^{t-y} \mathrm{e}^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^i}{i!} V_j(t-y-u,x)\,\mathrm{d}G(u)\\
&= \int_{y=0}^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+s)y}\,\mathrm{d}y \int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)u}\mathrm{e}^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^i}{i!}\,\mathrm{d}G(u) \int_{t=y+u}^{\infty} \mathrm{e}^{-s(t-y-u)}\\
&\times V_j(t-y-u,x)\,\mathrm{d}t = \hat{a}_i(s)\widehat{v}_j(s,x),
\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, natomiast $\hat{a}_n$ zdefiniowano w (4.1.12). Podobnie, korzystając z (4.1.44) uzyskujemy

$$\widehat{v}_0(s,x) = \sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s)\widehat{v}_{i+1}(s,x) + \widehat{v}_K(s,x) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\eta}(s,x), \tag{4.1.47}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}(s,x) &\stackrel{def}{=} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} V_0^{(2)}(t,x)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\,\mathrm{d}t \int_{y=0}^{t} \sum_{i=0}^{K-2} \frac{\lambda^{i+1}(t-y)^i}{i!}\,\mathrm{d}y \int_{u=t-y}^{\infty} \overline{F}^{(i+1)*}(x-y-u+t)\,\mathrm{d}G(u).
\end{aligned}$$

Wprowadzając notacje

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa}_n(s,x) &\stackrel{def}{=} \mathrm{I}\{1 \le n \le K-1\} \int_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{K-n-1} \mathrm{e}^{-(s+\lambda)t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\\
&\times \left(\int_t^{\infty} \overline{F}^{(n+i-1)*}(x-y+t)dF(y) \right) \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) > 0,
\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

równanie (4.1.45) można zapisać w postaci

$$\widehat{v}_n(s,x) = \sum_{i=0}^{K-n-1} \hat{\alpha}_i(s)\widehat{v}_{n+i-1}(s,x) + \widehat{v}_{K-1}(s,x) \sum_{i=K-n}^{\infty} \hat{\alpha}_i(s) + \hat{\kappa}_n(s,x), \tag{4.1.49}$$

gdzie $1 \le n \le K$, natomiast formuła $\hat{\alpha}_n$ została określona w (4.1.16). Dokonując w równaniach (4.1.47), (4.1.49) podstawienia $\widehat{z}_n(s,x) \stackrel{def}{=} \widehat{v}_{K-n}(s,x)$ dla $0 \le n \le K$ otrzymujemy,

$$\widehat{z}_K(s,x) = \sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s)\widehat{z}_{K-i-1}(s,x) + \widehat{z}_0(s,x) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\eta}(s,x) \tag{4.1.50}$$

oraz

$$\sum_{i=-1}^{n} \hat{\alpha}_{i+1}(s)\widehat{z}_{n-i}(s,x) - \widehat{z}_n(s,x) = \hat{\psi}_n(s,x), \tag{4.1.51}$$

gdzie $0 \le n \le K-1$, natomiast $\hat{\psi}_n(s,x)$ jest zdefiniowane następująco

$$\hat{\psi}_n(s,x) \stackrel{def}{=} \hat{\alpha}_{n+1}(s)\widehat{z}_0(s,x) - \widehat{z}_1(s,x)\sum_{i=n+1}^{\infty}\hat{\alpha}_i(s) - \hat{\kappa}_{K-n}(s,x). \tag{4.1.52}$$

Postępując analogicznie jak w przypadku (4.1.22)–(4.1.35) rozwiązanie układu (4.1.51) można zapisać w postaci

$$\widehat{z}_n(s,x) = C(s,x)\hat{R}_{n+1}(s) + \sum_{i=0}^{n}\hat{R}_{n-i}(s)\hat{\psi}_i(s,x), \quad n \ge 0, \tag{4.1.53}$$

skąd dla $n=0$ otrzymujemy

$$\widehat{z}_0(s,x) = C(s,x)\hat{R}_1(s). \tag{4.1.54}$$

Dla $n=1$ równanie (4.1.53) sprowadza się do

$$\begin{aligned}\widehat{z}_1(s,x) &= C(s,x)\hat{R}_2(s) + \hat{R}_1(s)\hat{\psi}_0(s,x)\\ &= C(s,x)\hat{R}_2(s) + \hat{R}_1(s)\Big(\hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1(s)C(s,x) - \widehat{z}_1(s,x)\sum_{i=1}^{\infty}\hat{\alpha}_i(s)\Big),\end{aligned} \tag{4.1.55}$$

co wynika z faktu, że $\hat{\kappa}_K(s,x)=0$. Korzystając z definicji $\hat{\theta}$ wprowadzonej w (4.1.26), równanie (4.1.55) można zapisać w formie

$$z_1(s,x) = \theta(s)C(s,x)\big(R_2(s) + \alpha_1(s)R_1^2(s)\big). \tag{4.1.56}$$

Podstawiając (4.1.54) i (4.1.56) w (4.1.50) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widehat{z}_K(s,x) &= \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\Big(C(s,x)\hat{R}_{i+1}(s) + \sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\hat{\psi}_j(s,x)\Big)\\ &\quad + C(s,x)\hat{R}_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty}\hat{a}_i(s) + \hat{\eta}(s,x)\\ &= \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\Bigg(C(s,x)\hat{R}_{i+1}(s)\\ &\quad + \sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{\alpha}_{j+1}(s)\widehat{z}_0(s,x) - \widehat{z}_1(s,x)\sum_{r=j+1}^{\infty}\hat{\alpha}_r(s) - \hat{\kappa}_{K-j}(s,m)\Big)\Bigg)\\ &\quad + C(s,x)\hat{R}_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty}\hat{a}_i(s) + \hat{\eta}(s,x)\\ &= C(s,x)\Bigg(\sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}(s)\Bigg(\hat{R}_{i+1}(s) + \sum_{j=0}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\Big(\hat{R}_1(s)\hat{\alpha}_{j+1}(s)\\ &\quad - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\big)\Big)\sum_{r=j+1}^{\infty}\hat{\alpha}_r(s)\Bigg) + \hat{R}_1(s)\sum_{i=K-1}^{\infty}\hat{a}_i(s)\Bigg)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{K-1}\hat{a}_{K-i-1}\sum_{j=1}^{i}\hat{R}_{i-j}(s)\hat{\kappa}_{K-j}(s,x) + \hat{\eta}(s,x) = \Phi_1(s)C(s,x) + \omega_1(s,x),\end{aligned} \tag{4.1.57}$$

gdzie Ψ_1 zdefiniowano w (4.1.30), natomiast

$$\omega_1(s,x) \stackrel{def}{=} -\sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1} \sum_{j=1}^{i} \hat{R}_{i-j}(s)\hat{\kappa}_{K-j}(s,x) + \hat{\eta}(s,x). \tag{4.1.58}$$

Na podstawie równania (4.1.53) dla $n = K$ oraz formuł (4.1.54), (4.1.56), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\widehat{z}_K(s,x) &= C(s,x)\hat{R}_{K+1}(s) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s)C(s,x) \\
&\quad - \hat{\theta}(s)C(s,x)\big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\big) \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s) - \hat{\kappa}_{K-i}(s,x)\Bigg) \\
&= C(s,x)\Bigg(\hat{R}_{K+1}(s) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\Big(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s) - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\big) \\
&\quad \times \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s)\Big)\Bigg) - \sum_{i=1}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\hat{\kappa}_{K-i}(s,x)\Big) \\
&= \Psi_2(s)C(s,x) + \omega_2(s,x),
\end{aligned} \tag{4.1.59}$$

gdzie

$$\omega_2(s,x) \stackrel{def}{=} -\sum_{i=1}^{K} \hat{R}_{K-i}(s)\hat{\kappa}_{K-i}(s,x). \tag{4.1.60}$$

oraz Ψ_2 jest zadane w postaci (4.1.33). Porównując prawe strony równań (4.1.57), (4.1.59), otrzymujemy

$$C(s,x) = \frac{\omega_2(s,x) - \omega_1(s,x)}{\Psi_1(s) - \Psi_2(s)}. \tag{4.1.61}$$

Opóźnienie kolejkowania w systemach typu $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania

Na podstawie powyższych rozważań otrzymujemy następujące twierdzenie:

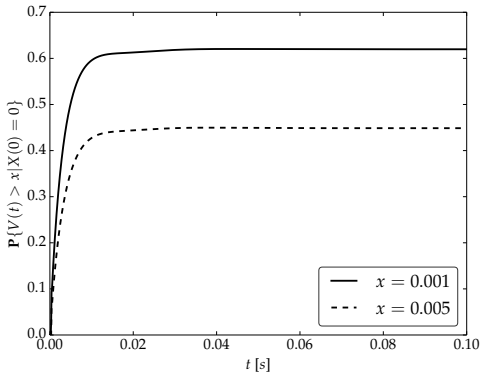
Twierdzenie 4.1.2 *Reprezentacja transformaty Laplace'a zależnego od czasu rozkładu prawdopodobieństwa opóźnienia kolejkowania w systemach typu $M/G/1/K$*

z probabilistyczną dyscypliną wybudzania ma postać

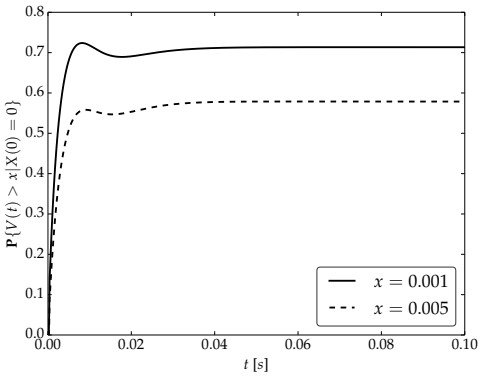
$$
\begin{aligned}
\widehat{v}_n(s,x) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{V(t) > x \,|\, X(0) = n\}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega_2(s,x) - \omega_1(s,x)}{\Psi_1(s) - \Psi_2(s)}\Bigg(\hat{R}_{K-n+1}(s) + \sum_{i=0}^{K-n} \hat{R}_{K-n-i}(s) \\
&\times \Big(\hat{\alpha}_{i+1}(s)\hat{R}_1(s) - \hat{\theta}(s)\Big(\hat{R}_2(s) + \hat{\alpha}_1(s)\hat{R}_1^2(s)\Big) \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\alpha}_j(s)\Big)\Bigg) \\
&- \sum_{i=0}^{K-n} \hat{R}_{K-n-i}(s)\hat{\kappa}_{K-i}(s,m),
\end{aligned}
\tag{4.1.62}
$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, *natomiast formuły* $\hat{\alpha}_n(s)$, $\hat{\kappa}_n(s,x)$, $\hat{\theta}(s)$ $\Psi_1(s)$, $\omega_1(s,x)$, $\Psi_2(s)$ *i* $\omega_2(s,x)$ *zostały odpowiednio podane w (4.1.16), (4.1.48), (4.1.26), (4.1.30), (4.1.58), (4.1.33), (4.1.60), natomiast* $(\hat{R}_n)$ *jest potencjałem Korolyuka ciągu* $(\hat{\alpha}_n)$.

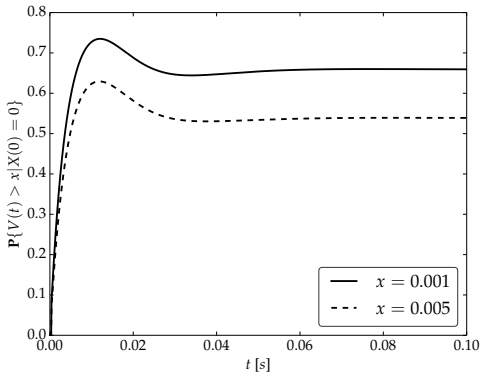
Przykład Rozważmy dwie prędkości strumienia wejściowego 270 kb/s i 450 kb/s, który określony jest za pomocą procesu Poissona odpowiednio z parametrami $\lambda_1 = 225$ i $\lambda_2 = 375$. Strumień pakietów o rozmiarze 150 B wpływa do węzła sieci o pojemności $K = 6$ z mechanizmem probabilistycznego wybudzania serwera, a następnie zostaje transmitowany z prędkością 450 kb/s według rozkładu Erlanga z parametrami $k = 2$ i $\bar{\mu} = 750$. Zatem w zależności od prędkości strumienia wejściowego obciążenie systemu wynosi $\rho = 0.6$ lub $\rho = 1$. Ponadto zakładamy, że system rozpoczyna pracę bez zgłoszeń oraz za każdym razem po wpłynięciu pierwszego pakietu do pustego systemu, serwer potrzebuje czasu na osiągnięcie pełnej gotowości operacyjnej, wynoszącego odpowiednio 5, 12.5 i 50 ms. Czas trwania okresów rozruchu będziemy opisywać za pomocą rozkładu wykładniczego. Na rysunku 4.1.6 przedstawiono prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania większego niż 1 i 5 ms dla poszczególnych czasów trwania okresów rozruchu serwera oraz wartości ρ. Ponadto wyniki dla stanu ustalonego przedstawiono w tabeli 4.1.2.



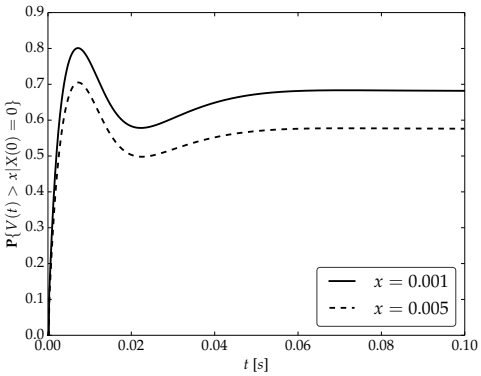
(a) Opóźnienie kolejkowania w chwili t dla $\rho = 0.6$ oraz czasu rozruchu wynoszącego 5 ms.



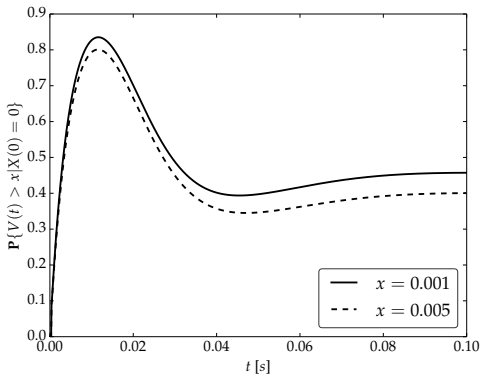
(b) Opóźnienie kolejkowania w chwili t dla $\rho = 1$ oraz czasu rozruchu wynoszącego 5 ms.



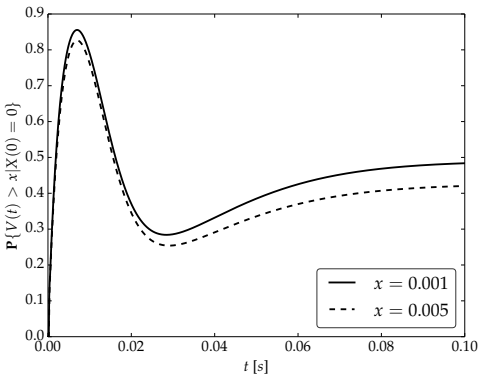
(c) Opóźnienie kolejkowania w chwili t dla ρ=0.6 oraz czasu rozruchu wynoszącego 12.5 ms.



(d) Opóźnienie kolejkowania w chwili t dla $\rho = 1$ oraz czasu rozruchu wynoszącego 12.5 ms.



(e) Opóźnienie kolejkowania w chwili t dla $\rho = 0.6$ oraz czasu rozruchu wynoszącego 50 ms.



(f) Opóźnienie kolejkowania w chwili t dla $\rho = 1$ oraz czasu rozruchu wynoszącego 50 ms.

Rys. 4.1.6. Prawdopodobieństwo opóźnienia kolejkowania większego niż 1 i 5 ms dla $\rho = 0.6$ i $\rho = 1$ oraz średnich czasów rozruchu wynoszących 5, 12.5 i 50 ms.

$\mathbf{P}\{V(\infty) > x\}$			
$\rho = 0.6$		$\rho = 1$	
$x = 0.001$	$x = 0.005$	$x = 0.001$	$x = 0.005$
Czas rozruchu serwera 0.5 ms			
0.36486	0.20828	0.64658	0.49209
Czas rozruchu serwera 5 ms			
0.61979	0.44862	0.71343	0.57866
Czas rozruchu serwera $12,5$ ms			
0.65925	0.53876	0.68155	0.57598
Czas rozruchu serwera 50 ms			
0.45475	0.39841	0.49020	0.42599

Tab. 4.1.2. Opóźnienie kolejkowania w stanie ustalonym dla $\rho = 0.6$ i $\rho = 1$ oraz okresów rozruchu wynoszących średnio 0.5, 5, 12.5 i 50 ms

4.1.4. Proces liczący obsłużone zgłoszenia

Poniższe rozważania dotyczą tranzytywnej charakterystyki procesu liczącego obsłużone zgłoszenia w systemach kolejkowych z jednym stanowiskiem obsługi zgłoszeń, skończonym buforem, poissonowskim strumieniem zgłoszeń i probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera [163]. W kontekście tematyki niniejszej sekcji można dodać, że w pracy [170] opisano proces liczący obsłużone zgłoszenia dla systemów ze skończonym buforem, gdzie strumień wejściowy jest typu BMAP. Ponadto, w pracach [171, 172] scharakteryzowano proces liczący obsłużone zgłoszenia dla linii produkcyjnych w kontekście różnego typu przestojów, np. spowodowanych osiąganiem pełnej gotowości do pracy, awariami, naprawami, czy cyklicznymi okresami pracy.

Podobnie jak wcześniej, za pomocą $H(t)$ będziemy oznaczać liczbę obsłużonych pakietów do chwili t, natomiast $X(t)$ będzie oznaczać liczbę zgłoszeń w systemie w chwili t. Ponadto, wprowadźmy oznaczenie rozkładu prawdopodobieństwa obsługi m zgłoszeń do czasu t pod warunkiem, że system rozpoczął pracę z n zgłoszeniami

$$H_n(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{H(t) = m \,|\, X(0) = n\}, \quad t > 0, 0 \le m, n \le K. \tag{4.1.63}$$

W ramach poniższych rozważań zostanie wyznaczona następująca transformata

$$\widehat{h}_n(s,z) \stackrel{def}{=} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} H_n(t,m)\,\mathrm{d}t, \tag{4.1.64}$$

gdzie $|z| < 1$ i $\mathrm{Re}(s) > 0$. W kontekście wprowadzonych na początku tego rozdziału oznaczeń zdarzeń $A_i(t)$ opisujących pracę systemu, będziemy stosować następującą notację

$$H_0^{(i)}(t,m) \stackrel{def}{=} \mathbf{P}\{\big(H(t) = m\big) \cap A_i(t) \,|\, X(0) = 0\}, \tag{4.1.65}$$

gdzie $t > 0$, $m \geq 0$ oraz $i = 1, 2, 3$. Interpretując powyższą definicję, przykładowo poprzez $H_0^{(1)}(t, m)$ będziemy rozumieć prawdopodobieństwo obsługi dokładnie m zgłoszeń do chwili t i zakończenia okresu rozruchu serwera przed czasem t w przypadku, gdy system rozpoczął pracę z bez pakietów. Zatem, korzystając po raz kolejny z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym otrzymujemy

$$H_0(t, m) = \mathbf{P}\{H(t) = m \,|\, X(0) = 0\} = \sum_{i=1}^{3} H_0^{(i)}(t, m) \tag{4.1.66}$$

i

$$\widehat{h}_0(s, z) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} H_0^{(i)}(t, m)\, \mathrm{d}t. \tag{4.1.67}$$

Analogicznie jak w przypadku długości kolejki i opóźnienia kolejkowania, biorąc pod uwagę zdarzenie $A_1(t)$, otrzymujemy następującą reprezentację

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(t, m) = &\int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y \\ &\times \int_{u=0}^{t-y} \Bigg(\sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} H_{i+1}(t - y - u, m) \\ &+ H_K(t - y - u, m) \sum_{i=K-1}^{\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}G(u). \end{aligned} \tag{4.1.68}$$

W powyższej równości (4.1.68) pierwszy składnik całkowanej sumy opisuje sytuację, w której bufor nie zostaje nasycony podczas okresu rozruchu serwera, natomiast drugi składnik odnosi się do przypadku nasycenia bufora w czasie, gdy serwer osiąga pełną gotowość operacyjną. Podobnie, rozważając $A_2(t)$, formułujemy

$$H_0^{(2)}(t, m) = \mathrm{I}\{m = 0\} \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \overline{G}(t - y)\, \mathrm{d}y. \tag{4.1.69}$$

W przypadku, gdy okres rozruchu serwera kończy się po czasie t, obsługa zgłoszeń w chwili t jest zablokowana, stąd (4.1.69) jest sformułowane jedynie dla $m = 0$. Podobnie

$$H_0^{(3)}(t, m) = \mathrm{I}\{m = 0\} \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{4.1.70}$$

Na podstawie (4.1.68)–(4.1.70) otrzymujmy

$$\begin{aligned} H_0(t, m) = &\int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y \\ &\times \int_{u=0}^{t-y} \Bigg(\sum_{i=0}^{K-2} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} H_{i+1}(t - y - u, m) \\ &+ H_K(t - y - u, m) \sum_{i=K-1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}G(u) \\ &+ I\{m = 0\} \Big(\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \overline{G}(t - y)\, \mathrm{d}y + \mathrm{e}^{-\lambda t} \Big). \end{aligned} \tag{4.1.71}$$

Rozważmy sytuację, gdy w systemie znajduje się $1 \leq n \leq K$ pakietów w chwili rozpoczęcia pracy, w wyniku czego otrzymujemy

$$\begin{aligned} H_n(t,m) &= \mathrm{I}\{m \geq 1\} \\ &\times \int_0^t \Bigg(\sum_{i=0}^{K-n-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} H_{n+i-1}(t-y, m-1) \\ &+ H_{K-1}(t-y, m-1) \sum_{i=K-n}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^i}{i!} \Bigg) \mathrm{d}F(y) \\ &+ \mathrm{I}\{m=0\}\overline{F}(t), \end{aligned} \tag{4.1.72}$$

gdzie $1 \leq n \leq K$. W powyższym równaniu (4.1.72) pierwszy składnik całkowanej sumy dotyczy przypadku, gdy w buforze kolejki są wolne miejsca w chwili zakończenia pierwszej obsługi zgłoszeń, drugi składnik opisuje przypadek, kiedy bufor jest nasycony w chwili zakończenia obsługi, natomiast ostatni składnik (4.1.72) dotyczy przypadku, gdy pierwszy pakiet opuszcza system po czasie t.

Korzystając z poniższych tożsamości

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} dt \int_{y=0}^{t} \lambda e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y \int_{u=0}^{t-y} \frac{(\lambda u)^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda u} \\ &\times H_j(t-y-u, m)\, \mathrm{d}G(u) = \hat{a}_i(s)\widehat{h}_j(s,z), \end{aligned} \tag{4.1.73}$$

gdzie $\hat{a}_n$ zdefiniowano w (4.1.12), oraz

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m \mathrm{I}\{m=0\} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \left(\int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \overline{G}(t-y)\, \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-\lambda t} \right) \mathrm{d}t \tag{4.1.74}$$

$$= \frac{\lambda\big(1-g(s)\big)+s}{s(\lambda+s)} \stackrel{def}{=} \hat{\zeta}(s,z) = \hat{\zeta}(s), \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \tag{4.1.75}$$

równanie (4.1.71) sprowadzamy do postaci

$$\widehat{h}_0(s,z) = \sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s)\widehat{h}_{i+1}(s,z) + \widehat{h}_K(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\zeta}(s). \tag{4.1.76}$$

Podobnie, równanie (4.1.72) prowadzi nas do

$$\widehat{h}_n(s,z) = \sum_{i=0}^{K-n-1} \hat{\alpha}_i^H(s,z)\widehat{h}_{n+i-1}(s,z) + \widehat{h}_{K-1}(s,z) \sum_{i=K-n}^{\infty} \hat{\alpha}_i^H(z) + \frac{1-f(s)}{s}, \tag{4.1.77}$$

gdzie $1 \leq n \leq K$ oraz

$$\hat{\alpha}_n^H(s,z) \stackrel{def}{=} z \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, \mathrm{d}F(t). \tag{4.1.78}$$

Dokonując w równaniach (4.1.76), (4.1.77) podstawienia $\widehat{d}_n(s,z) \stackrel{def}{=} \widehat{h}_{K-n}(s,z)$ dla $0 \le n \le K$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widehat{d}_K(s,z) = &\sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s)\widehat{d}_{K-i-1}(s,z) \\ &+ \widehat{d}_0(s,z)\sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\zeta}(s)\end{aligned} \tag{4.1.79}$$

oraz

$$\sum_{i=-1}^{n} \hat{\alpha}_{i+1}^H(s,z)\widehat{d}_{n-i}(s,z) - \widehat{d}_n(s,z) = \hat{\xi}_n(s,z), \tag{4.1.80}$$

gdzie $0 \le n \le K-1$, natomiast $\hat{\xi}_n(s,z)$ jest definiowane następująco

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_n(s,z) \stackrel{def}{=} &\hat{\alpha}_{n+1}^H(s,z)\widehat{d}_0(s,z) \\ &- \widehat{d}_1(s,z)\sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{\alpha}_i^H(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}.\end{aligned} \tag{4.1.81}$$

Poprzez analogię do (4.1.22)–(4.1.35), rozwiązanie układu (4.1.80) ma postać

$$\widehat{d}_n(s,z) = C(s,z)\hat{R}_{n+1}^H(s,z) + \sum_{i=0}^{n} \hat{R}_{n-i}^H(s,z)\hat{\xi}_i(s,z), \quad n \ge 0, \tag{4.1.82}$$

gdzie $(\hat{R}_n^H)$ jest potencjałem ciągu $(\hat{\alpha}_n^H)$. Na podstawie (4.1.82) dla $n=0$ otrzymujemy

$$\widehat{d}_0(s,z) = C(s,z)\hat{R}_1^H(s,z), \tag{4.1.83}$$

natomiast dla $n=1$ równanie (4.1.82) zostaje sprowadzone do

$$\begin{aligned}\widehat{d}_1(s,z) &= C(s,z)\hat{R}_2^H(s,z) + \hat{R}_1^H(s,z)\hat{\xi}_0(s,z) \\ &= C(s,z)\hat{R}_2^H(s,z) + \hat{R}_1^H(s,z)\Big(\hat{\alpha}_1^H(s,z)\hat{R}_1^H(s,z)C(s,z) \\ &- \widehat{d}_1(s,z)\sum_{i=1}^{\infty}\hat{\alpha}_i^H(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big)\end{aligned} \tag{4.1.84}$$

stąd

$$\widehat{d}_1(s,z) = \hat{\theta}(s)\left(C(s,z)\big(\hat{R}_2^H(s,z) + \hat{\alpha}_1^H(s,z)(\hat{R}_1^H)^2(s,z)\big) - \hat{R}_1^H(s,z)\frac{1-f(s)}{s}\right), \tag{4.1.85}$$

gdzie $\hat{\theta}$ określono w (4.1.26).

Na podstawie (4.1.79), (4.1.83)–(4.1.85) oraz korzystając z faktu

$$\sum_{i=0}^{K-2} \hat{a}_i(s)\widehat{d}_{K-i-1}(s,z) = \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s)\widehat{d}_i(s,z) \tag{4.1.86}$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\widehat{d}_K(s,z) &= \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s)\Big(C(s,z)\hat{R}^H_{i+1}(s,z) + \sum_{j=0}^{i} \hat{R}^H_{i-j}(s,z)\hat{\xi}_j(s,z)\Big) \\
&\quad + C(s,z)\hat{R}^H_1(s,z) \times \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\zeta}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s)\Bigg(C(s,z)\hat{R}^H_{i+1}(s,z) + \sum_{j=0}^{i} \hat{R}^H_{i-j}(s,z) \\
&\quad \times \Big(\hat{\alpha}^H_{j+1}(s,z)\widehat{d}_0(s,z) - \widehat{d}_1(s,z) \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}^H_r(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big)\Bigg) \\
&\quad + C(s,z)\hat{R}^H_1(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s) + \hat{\zeta}(s) \\
&= C(s,z)\Bigg(\sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s)\Bigg(\hat{R}^H_{i+1}(s,z) + \sum_{j=0}^{i} \hat{R}^H_{i-j}(s,z) \\
&\quad \times \Big(\hat{R}^H_1(s,z)\hat{\alpha}^H_{j+1}(s,z) - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}^H_2(s,z) + \hat{\alpha}^H_1(s,z)(\hat{R}^H_1)^2(s,z)\big)\Big) \\
&\quad \times \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}^H_r(s,z)\Bigg) + \hat{R}^H_1(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s)\Bigg) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s) \sum_{j=0}^{i} \hat{R}^H_{i-j}(s,z)\Bigg(\hat{R}^H_1(s,z)\frac{1-f(s)}{s}\hat{\theta}(s) \\
&\quad \times \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}^H_r(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Bigg) + \hat{\zeta}(s) \\
&= \Psi^H_1(s,z)C(s,z) + \nu_1(s,z),
\end{aligned}
\tag{4.1.87}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\Psi^H_1(s,z) &\stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s)\Big(\hat{R}^H_{i+1}(s,z) + \sum_{j=0}^{i} \hat{R}^H_{i-j}(s,z) \\
&\quad \times \Big(\hat{R}^H_1(s,z)\hat{\alpha}^H_{j+1}(s,z) - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}^H_2(s,z) + \hat{\alpha}^H_1(s,z)(\hat{R}^H_1)^2(s,z)\big) \\
&\quad \times \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}^H_r(s,z)\Big) + \hat{R}^H_1(s,z) \sum_{i=K-1}^{\infty} \hat{a}_i(s)
\end{aligned}
\tag{4.1.88}
$$

i

$$
\begin{aligned}
\nu_1(s,z) &\stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-1} \hat{a}_{K-i-1}(s) \sum_{j=0}^{i} \hat{R}^H_{i-j}(s,z)\Big(\hat{R}^H_1(s,z) \\
&\quad \times \frac{1-f(s)}{s}\hat{\theta}(s) \sum_{r=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}^H_r(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big) + \hat{\zeta}(s).
\end{aligned}
\tag{4.1.89}
$$

Podstawiając $n = K$ w (4.1.82) oraz wykorzystując (4.1.83)–(4.1.85), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\widehat{d}_K(s,z) &= C(s,z)\hat{R}^H_{K+1}(s,z) + \sum_{i=0}^{K} \hat{R}^H_{K-i}(s,z)\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}(s,z) \\
&\times \hat{R}^H_1(s,z)C(s,z) - \hat{\theta}(s)\Bigg(C(s,z)\big(\hat{R}^H_2(s,z) + \hat{\alpha}_1(s,z)(\hat{R}^H_1)^2(s,z)\big) \\
&- \hat{R}^H_1(s,z)\frac{1-f(s)}{s}\Bigg)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Bigg) \\
&= C(s,z)\Bigg(\hat{R}^H_{K+1}(s,z) + \sum_{i=0}^{K}\hat{R}^H_{K-i}(s,z)\Big(\hat{\alpha}_{i+1}(s,z)\hat{R}^H_1(s,z) \\
&- \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}^H_2(s,z) + \hat{\alpha}_1(s,z)(\hat{R}^H_1)^2(s,z)\big)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j(s,z)\Big)\Bigg) \\
&+ \sum_{i=0}^{K}\hat{R}^H_{K-i}(s,z)\Bigg(\hat{\theta}(s)\hat{R}^H_1(s,z)\frac{1-f(s)}{s}\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j(s,z) \\
&- \frac{1-f(s)}{s}\Bigg) = \Psi^H_2(s,z)C(s,z) + \nu_2(s,z),
\end{aligned} \tag{4.1.90}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Psi^H_2(s,z) &\stackrel{def}{=} \hat{R}^H_{K+1}(s,z) + \sum_{i=0}^{K}\hat{R}^H_{K-i}(s,z)\Big(\hat{\alpha}^H_{i+1}(s,z) \\
&\times \hat{R}^H_1(s,z) - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}^H_2(s,z) + \hat{\alpha}^H_1(s,z)(\hat{R}^H_1)^2(s,z)\big) \\
&\times \sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}^H_j(s,z)\Big)
\end{aligned} \tag{4.1.91}$$

i

$$\begin{aligned}
\nu_2(s,z) &\stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{K}\hat{R}^H_{K-i}(s,z)\Bigg(\hat{\theta}(s)\hat{R}^H_1(s,z)\frac{1-f(s)}{s} \\
&\times \sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}^H_j(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.1.92}$$

Na podstawie (4.1.87), (4.1.90) otrzymujemy

$$C(s,z) = \frac{\nu_2(s,z) - \nu_1(s,z)}{\Psi^H_1(s,z) - \Psi^H_2(s,z)}. \tag{4.1.93}$$

Proces liczący obsłużone zgłoszenia w systemach typu $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania

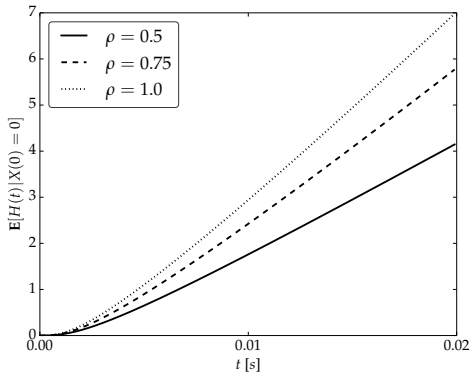
Korzystając z wyników powyższych rozważań otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.1.3 *Reprezentacja funkcji tworzącej transformaty Laplace'a tranzytywnego rozkładu liczby obsłużonych zgłoszeń w systemie $M/G/1/K$ z mechanizmem probabilistycznego wybudzania serwera ma postać*

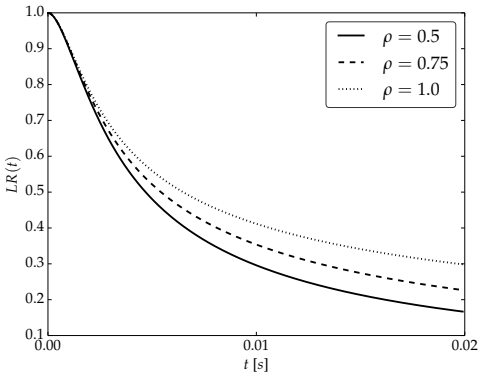
$$
\begin{aligned}
\widehat{h}_n(s,z) &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathbf{P}\{H(t)=m \,|\, X(0)=n\}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\nu_2(s,z)-\nu_1(s,z)}{\Psi_1^H(s,z)-\Psi_2^H(s,z)} \\
&\Bigg(\hat{R}^H_{K-n+1}(s,z) + \sum_{i=0}^{K-n} \hat{R}^H_{K-n-i}(s,z)\Big(\hat{\alpha}^H_{i+1}(s)\hat{R}^H_1(s,z) \\
&- \hat{\theta}(s)\Big(\hat{R}^H_2(s,z) + \hat{\alpha}^H_1(s,z)(\hat{R}^H_1)^2(s,z)\Big)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}^H_j(s,z)\Big)\Bigg) \\
&+ \sum_{i=0}^{K-n} \hat{R}^H_{K-n-i}(s,z)\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}^H_1(s,z)\frac{1-f(s)}{s} \\
&\times \sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}^H_j(s,z) - \frac{1-f(s)}{s}\Big),
\end{aligned}
\tag{4.1.94}
$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, *natomiast formuły* $\hat{\alpha}^H_n(s,z)$, $\hat{\theta}(s)$, $\Psi^H_1(s,z)$, $\nu_1(s,z)$, $\Psi^H_2(s,z)$, $\nu_2(s,z)$ *zostały odpowiednio podane w (4.1.78), (4.1.26), (4.1.88), (4.1.89), (4.1.91), (4.1.92). Ponadto* $(\hat{R}^H_n)$ *jest potencjałem ciągu* $(\hat{\alpha}^H_n)$.

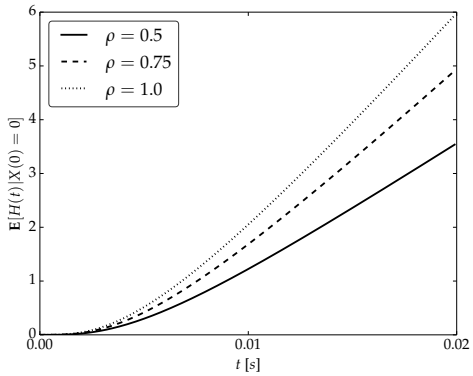
Przykład Rozważmy węzeł sieci o pojemności $K = 50$ z mechanizmem probabilistycznego wybudzania stanowiska obsługi, w którym zgłoszenia są transmitowane według rozkładu hiperwykładniczego (sekcja A.1.5.5) z intensywnościami $\lambda_1 = 300$, $\lambda_1 = 500$, $\lambda_1 = 700$ według rozkładu prawdopodobieństwa $P = [0.3, 0.5, 0.2]$. Zatem, średni czas obsługi wynosi 2 ms. Ponadto, rozpatrzmy trzy średnie prędkości napływu zgłoszeń do systemu 240, 360 i 480 kb/s, co daje nam odpowiednio średnie czasy pomiędzy kolejnymi wpływami 4, 2.(6) i 2 ms. Stąd na podstawie powyższego obciążenie systemu może wynosić $\rho = 0.5$, $\rho = 0.75$ lub $\rho = 1$. Dodatkowo zakładamy, że system rozpoczyna pracę bez zgłoszeń, natomiast średnie czasy rozruchu serwera mogą wynosić 0, 2.5 i 20 ms oraz są opisywane za pomocą rozkładu wykładniczego. Rezultaty dotyczące procesu liczącego obsłużone zgłoszenia zilustrowano na rysunku 4.1.7.



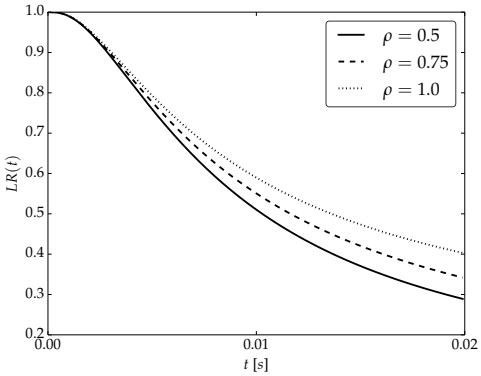
(a) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla czasu rozruchu wynoszącego 0 ms.



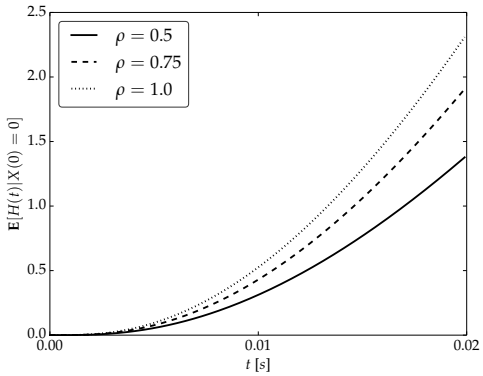
(b) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla czasu rozruchu wynoszącego 0 ms.



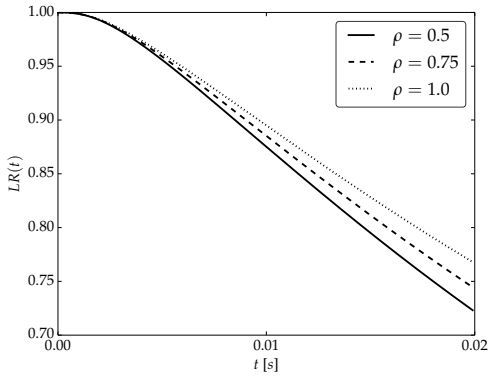
(c) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla czasu rozruchu wynoszącego 2.5 ms.



(d) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla czasu rozruchu wynoszącego 12.5 ms.



(e) Średnia liczba obsłużonych pakietów do chwili t dla czasu rozruchu wynoszącego 20 ms.



(f) Współczynnik utraty pakietów w chwili t dla czasu rozruchu wynoszącego 20 ms.

Rys. 4.1.7. Średnia liczba obsłużonych pakietów oraz współczynnik utraty pakietów do chwili t dla czasów rozruchu serwera 0, 12.5 i 20 ms.

4.2. Kolejkowanie złożonych procesów Poissona

4.2.1. Opis modelu

Zaprezentowane poniżej wyniki, podobnie jak wcześniej, dotyczą modeli kolejkowych ze skończonym buforem o rozmiarze $K-1$, jedną stacją obsługi zgłoszeń oraz probabilistycznym mechanizmem wybudzania serwera opisanym dystrybuantą G dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa. Niemniej jednak w ramach uzupełnienia wcześniejszych rozważań, zakładać będziemy, że zgłoszenia wpływają do serwera grupami o losowym rozmiarze określonym rozkładem prawdopodobieństwa (p_i), $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ z intensywnością λ, co będziemy modelować za pomocą złożonego procesu Poissona (sekcja A.2.3). Grupy zgłoszeń będą kolejkowane zgodnie z strategią częściowej akceptacji wpływających partii (PABS), tzn. jeśli rozmiar wpływającej do systemu grupy pakietów przekracza liczbę wolnych miejsc w buforze kolejki, wówczas tylko część pakietów zostaje buforowana, natomiast reszta zostaje utracona. Ponadto, zakładamy, że system może rozpocząć pracę z niepustym buforem oraz czas obsługi zgłoszeń ma dowolny rozkład prawdopodobieństwa określony przez dystrybuantę F, a transmisja zgłoszeń przebiega według dyscypliny FIFO. Podobnie jak w przypadku kolejkowania procesów Poissona, będziemy wyróżniać trzy rodzaje zdarzeń $A_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, które zostały opisane wcześniej.

4.2.2. Długość kolejki

W ramach sekcji zostanie opisana tranzytywna analiza rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w systemach typu $M^X/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera oraz strumieniem zgłoszeń w postaci złożonego procesu Poissona [161]. Opisane wyniki stanowią dopełnienie rozważań opisanych w sekcji 4.1.2.

Wprowadźmy oznaczenie rozkładu warunkowego prawdopodobieństwa długości kolejki w chwili t w postaci

$$Q_n^c(t,m) = \mathbf{P}\{X(t) = m \,|\, X(0) = n\}, \quad t > 0,\ 0 \le m, n \le K. \tag{4.2.1}$$

Rezultatem poniższych rozważań będzie jawna postać transformaty Laplace'a $Q_n^c(t,m)$, tzn.

$$\widehat{q}_n^c(s,m) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} Q_n^c(t,m)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{4.2.2}$$

Wprowadźmy następującą notację

$$(Q_0^c)^{(i)}(t,m) = \mathbf{P}\{\big(X(t) = m\big) \cap A_i(t) \,|\, X(0) = 0\}, \tag{4.2.3}$$

gdzie $t > 0$, $0 \le m \le K$ i $i = 1, 2, 3$. Na podstawie twierdzenia o prawdopodobień-

stwie całkowitym otrzymujemy

$$Q_0^c(t,m) = \mathbf{P}\{X(t) = m \,|\, X(0) = 0\} = \sum_{i=1}^{3} (Q_0^c)^{(i)}(t,m). \tag{4.2.4}$$

Można wyznaczyć reprezentację $(Q_0^c)^{(1)}(t,m)$ w postaci

$$\begin{aligned}(Q_0^c)^{(1)}(t,m) = \int_{y=0}^{t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_{u=0}^{t-y} \Bigg(\sum_{i=1}^{K-1} p_i \sum_{j=0}^{K-i-1} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda u} \\ \times \sum_{r=j}^{K-i-1} p_r^{j*} Q_{i+r}^c(t-y-u,m) + Q_K^c(t-y-u,m) \\ \times \Bigg(\sum_{i=1}^{K-1} p_i \Bigg(\sum_{j=0}^{K-i-1} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \sum_{r=K-i}^{\infty} p_r^{j*} \\ + \sum_{j=K-i}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} \Bigg) + \sum_{i=K}^{\infty} p_i \Bigg) \Bigg) \, \mathrm{d}G(u) \, \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Pierwszy składnik całkowanej sumy w (4.2.5) opisuje sytuację, w której rozmiar pierwszej wpływającej do systemu grupy nie przekracza liczby wolnych w systemie miejsc oraz jednocześnie podczas okresu rozruchu serwera bufor nie zostaje nasycony. Stąd, w chwili zakończenia okresu rozruchu $y+u$ stanowisko obsługi rozpoczyna pracę z $1 \le i+r \le K-1$ pakietami w systemie, gdzie i oznacza rozmiar pierwszej partii pakietów oraz r jest całkowitą liczbą pakietów, które pojawiły się w systemie w okresie rozruchu. Drugi składnik całkowanej sumy dotyczy przypadku nasycenia bufora przed zakończeniem okresu rozruchu stacji obsługi, stąd stanowisko po zakończeniu tego okresu zaczyna pracę z K pakietami w systemie.

Podobnie dla $(Q_0^c)^{(2)}(t,m)$ otrzymujemy analogiczną formułę

$$\begin{aligned}(Q_0^c)^{(2)}(t,m) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \overline{G}(t-y) \Bigg(\mathrm{I}\{1 \le m \le K-1\} \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=0}^{m-i} p_{m-i}^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \\ \times \frac{\big(\lambda(t-y)\big)^j}{j!} + \mathrm{I}\{m = K\} \Bigg(\sum_{i=1}^{K-1} p_i \Bigg(\sum_{j=0}^{K-i-1} \sum_{r=K-i}^{\infty} p_r^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \frac{\big(\lambda(t-y)\big)^j}{j!} \\ + \sum_{j=K-i}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda(t-y)} \frac{\big(\lambda(t-y)\big)^j}{j!} \Bigg) + \sum_{i=K}^{\infty} p_i \Bigg) \Bigg) \, \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

W powyższym (4.2.6), jeśli pierwszy okres rozruchu zakończy się po czasie t przy $1 \le m \le K-1$ pakietach w systemie oraz założeniu, że okres rozruchu rozpoczął się w chwili $0 < y < t$, wówczas w czasie $t-y$ do systemu wpływa $m-i$ pakietów. W sytuacji, gdy $m = K$, bufor zostaje nasycony w czasie $(0,t)$.

Biorąc pod uwagę $A_3(t)$ wyznaczamy postać $(Q_0^c)^{(3)}(t,m)$ w następujący sposób

$$(Q_0^c)^{(3)}(t,m) = \mathrm{I}\{m = 0\} e^{-\lambda t}. \tag{4.2.7}$$

Rozważmy teraz przypadek, kiedy system rozpoczyna pracę z $1 \le n \le K$ pakietami. Zakładając, że pierwsza partia pakietów wpływa do systemu po $t = 0$, na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych otrzymujemy następujący układ równań całkowych

$$\begin{aligned} Q_n^c(t,m) = \int_0^t \Bigg(& \sum_{i=0}^{K-n-1} \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!}(y) Q_{n+i-1}^c(t-y,m) \\ & + Q_{K-1}^c(t-y,m) \sum_{i=K-n}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!}(y) \Bigg) \mathrm{d}F(y) \\ & + \overline{F}(t) \Bigg(\mathrm{I}\{n \le m \le K-1\} \sum_{j=0}^{m-n} p_{m-n}^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ & + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-n}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \Bigg), \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

gdzie $1 \le n \le K$. W równaniu (4.2.8), pierwszy składnik całkowanej sumy dotyczy sytuacji, gdy w systemie znajdują się wolne miejsca w chwili zakończenia obsługi pierwszego zgłoszenia (w chwili $0 < y < t$), podczas gdy drugi składnik opisuje przypadek nasycenia bufora przed czasem t. Ostatni składnik sumy odnosi się do sytuacji opuszczenia systemu przez pierwszy pakiet po czasie t.

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\hat{a}_j^c(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+s)t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \mathrm{d}G(t), \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_j(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \overline{F}(t) \Big(& \mathrm{I}\{j \le m \le K-1\} \sum_{j=0}^{m-j} p_{m-j}^{j*} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ & + \mathrm{I}\{m = K\} \sum_{i=K-j}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} p_i^{j*} \frac{(\lambda y)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda y}(t) \Big) \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$\hat{\sigma}_{i,r}(s) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda p_i}{\lambda + s} \sum_{j=0}^{r} p_r^{j*} \hat{a}_j^c(s), \tag{4.2.11}$$

$$\hat{\delta}(s) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda}{\lambda+s} \left(\sum_{i=1}^{K-1} p_i \Big(\sum_{j=0}^{K-i-1} \hat{a}_j^c(s) \sum_{r=K-i}^{\infty} p_r^{j*} + \sum_{j=K-i}^{\infty} \hat{a}_j^c(s) \Big) + g(s) \sum_{i=K}^{\infty} p_i \right). \tag{4.2.12}$$

Ponadto, niech

$$\hat{\varrho}(s,m) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} (Q_0^c)^{(2)}(t,m) \, \mathrm{d}t + \mathrm{I}\{m = 0\} \frac{1}{\lambda + s}. \tag{4.2.13}$$

Na podstawie (4.2.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^\infty \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \int_{x=0}^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \int_{y=0}^{t-x} \frac{(\lambda y)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda y} Q_{i+r}^c(t-x-y,m) \, \mathrm{d}G(y) \\ & = \frac{\lambda}{\lambda+s} \hat{a}_j^c(s) \widehat{q}_{i+r}^c(s,m), \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

wówczas z równań (4.2.4)–(4.2.7), (4.2.11)–(4.2.13) mamy

$$\widehat{q}_0^c(s,m) = \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}(s)\widehat{q}_{i+r}^c(s,m) + \hat{\delta}(s)\widehat{q}_K^c(s,m) + \hat{\varrho}(s,m). \tag{4.2.15}$$

Podobnie, korzystając z (4.2.8) i (4.2.10), wyprowadzamy

$$\widehat{q}_n^c(s,m) = \sum_{i=0}^{K-n-1} \hat{\alpha}_i^c(s)\widehat{q}_{n+i-1}^c(s,m) + \widehat{q}_{K-1}^c(s,m)\sum_{i=K-n}^{\infty} \hat{\alpha}_i^c(s) + \hat{\tau}_n(s,m), \tag{4.2.16}$$

gdzie $1 \le n \le K$ oraz

$$\hat{\alpha}_n^c(s) \stackrel{def}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\sum_{j=0}^{n} p_n^{j*}\frac{(\lambda x)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}F(t), \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{4.2.17}$$

Podstawiając $\widehat{u}_n^c(s,m) \stackrel{def}{=} \widehat{q}_{K-n}^c(s,m)$ dla $0 \le n \le K$ w równaniach (4.2.15), (4.2.16) otrzymujemy

$$\widehat{u}_K^c(s,m) = \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}^c(s)\widehat{u}_{K-i-r}^c(s,m) + \hat{\delta}^c(s)u_0(s,m) + \hat{\varrho}(s,m) \tag{4.2.18}$$

oraz

$$\sum_{i=-1}^{n} \hat{\alpha}_{i+1}^c(s)\widehat{u}_{n-i}^c(s,m) - \widehat{u}_n^c(s,m) = \hat{\phi}_n^c(s,m), \tag{4.2.19}$$

gdzie $0 \le n \le K-1$, natomiast $\hat{\phi}_i^c$ jest zdefiniowany następująco

$$\hat{\phi}_n^c(s,m) \stackrel{def}{=} \hat{\alpha}_{n+1}^c(s)\widehat{u}_0^c(s,m) - \widehat{u}_1^c(s,m)\sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{\alpha}_i^c(s) - \hat{\tau}_{K-n}(s,m). \tag{4.2.20}$$

Następnie, postępując analogicznie jak w przypadku (4.1.22)–(4.1.35), wyznaczamy rozwiązanie układu (4.2.19) w postaci

$$\widehat{u}_n^c(s,m) = C(s,m)\hat{R}_{n+1}^c(s) + \sum_{i=0}^{n} \hat{R}_{n-i}^c(s)\hat{\phi}_i^c(s,m), \tag{4.2.21}$$

gdzie $(\hat{R}_n^c)$ jest potencjałem ciągu $(\hat{\alpha}_n^c)$. Równanie (4.2.21) dla $n = 0$ i $n = 1$ przybiera odpowiednio postać

$$\widehat{u}_0^c(s,m) = C(s,m)\hat{R}_1^c(s) \tag{4.2.22}$$

i

$$\begin{aligned}\widehat{u}_1^c(s,m) &= C(s,m)\hat{R}_2^c(s) + \hat{R}_1^c(s)\hat{\phi}_0^c(s,m) = C(s,m)\hat{R}_2^c(s) + \hat{R}_1^c(s)\\ &\times\Big(\hat{\alpha}_1^c(s)\hat{R}_1^c(s)C(s,m) - \widehat{u}_1^c(s,m)\sum_{i=1}^{\infty}\hat{\alpha}_i(s) - \hat{\tau}_K(s,m)\Big),\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

stąd

$$\widehat{u}_1^c(s,m) = \hat{\theta}(s)\Big(C(s,m)\big(\hat{R}_2^c(s) + a_1(s)(\hat{R}_1^c)^2(s)\big) - \hat{R}_1^c(s)\hat{\tau}_k(s,m)\Big), \tag{4.2.24}$$

gdzie $\hat{\theta}$ zdefiniowano w (4.1.26).

Na podstawie (4.2.20) i (4.2.21) równanie (4.2.18) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_K^c(s,m) &= \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}(s)\widehat{u}_{K-i-r}^c(s) + \hat{\delta}(s)\widehat{u}_0^c(s,m) + \hat{\varrho}(s,m) \\
&= \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}(s)\Big(C(s,m)\hat{R}_{K-i-r+1}^c(s) + \sum_{j=0}^{K-i-r} \hat{R}_{K-i-r-j}^c(s)\hat{\phi}_j^c(s,m)\Big) \\
&+ \hat{\delta}(s)\hat{R}_1^c(s)C(s,m) + \hat{\varrho}(s,m) = \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}(s)\Bigg(C(s,m)\hat{R}_{K-i-r+1}^c(s) \\
&+ \sum_{j=0}^{K-i-r} \hat{R}_{K-i-r-j}^c(s)\Bigg(\hat{\alpha}_{j+1}^c(s)\hat{R}_1^c(s)C(s,m) - \hat{\theta}(s)\Big(C(s,m)\big(\hat{R}_2^c(s) \\
&+ \hat{\alpha}_1^c(s)(\hat{R}_1^c)^2(s)\big) - \hat{R}_1^c(s)\hat{\tau}_K(s,m)\Big)\sum_{z=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}^c z(s) - \hat{\tau}_{K-j}(s,m)\Bigg)\Bigg) \\
&+ \hat{\delta}(s)\hat{R}_1^c(s)C(s,m) + \hat{\varrho}(s,m) = \Psi_1^c(s)C(s,m) + \chi_1^c(s,m),
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Psi_1^c(s) &\stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}(s)\Bigg(\hat{R}_{K-i-r+1}^c(s) + \sum_{j=0}^{K-i-r} \hat{R}_{K-i-r-j}^c(s) \\
&\times \Big(\hat{\alpha}_{j+1}^c(s)\hat{R}_1^c(s) - \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2^c(s) + \hat{\alpha}_1^c(s)(\hat{R}_1^c)^2(s)\big)\sum_{z=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}_z^c(s)\Big)\Bigg) \\
&+ \hat{\delta}(s)\hat{R}_1^c(s)
\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

i

$$\begin{aligned}
\chi_1^c(s,m) &\stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{r=0}^{K-i-1} \hat{\sigma}_{i,r}(s)\sum_{j=0}^{K-i-r} \hat{R}_{K-i-r-j}^c(s) \\
&\times \Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}_1^c(s)\hat{\tau}_K(s,m)\sum_{z=j+1}^{\infty} \hat{\alpha}_z^c(s) - \hat{\tau}_{K-j}(s,m)\Big) + \hat{\varrho}(s,m).
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

Podobnie, na podstawie równania (4.2.21) dla $n = K$ oraz (4.2.22) i (4.2.24)

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widehat{u}_K^c(s,m) &= C(s,m)\hat{R}_{K+1}^c(s) + \sum_{i=0}^{K}\hat{R}_{K-i}^c(s)\Bigg(\hat{\alpha}_{i+1}^c(s)\hat{R}_1^c(s)C(s,m) - \hat{\theta}(s)\\ &\times\Big(C(s,m)\big(\hat{R}_2^c(s)+\hat{\alpha}_1^c(s)(\hat{R}_1^c)^2(s)\big) - \hat{R}_1^c(s)\hat{\tau}_K(s,m)\Big)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j^c(s) - \hat{\tau}_{K-i}(s,m)\Bigg)\\ &= C(s,m)\Bigg(\hat{R}_{K+1}^c(s) + \sum_{i=0}^{K}\hat{R}_{K-i}^c(s)\Big(\hat{\alpha}_{i+1}^c(s)\hat{R}_1^c(s)\\ &- \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2^c(s)+\hat{\alpha}_1^c(s)(\hat{R}_1^c)^2(s)\big)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j^c(s)\Big)\Bigg) + \sum_{i=0}^{K}\hat{R}_{K-i}^c(s)\\ &\times\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}_1^c(s)\hat{\tau}_K(s,m)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j^c(s) - \hat{\tau}_{K-i}(s,m)\Big) = \Psi_2^c(s)C(s,m) + \chi_2^c(s,m),\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Psi_2^c(s) \stackrel{def}{=} \Bigg(&\hat{R}_{K+1}^c(s) + \sum_{i=0}^{K}\hat{R}_{K-i}^c(s)\Big(\hat{\alpha}_{i+1}^c(s)\hat{R}_1^c(s)\\ &- \hat{\theta}(s)\big(\hat{R}_2^c(s)+\hat{\alpha}_1^c(s)(\hat{R}_1^c)^2(s)\big)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j^c(s)\Big)\Bigg)\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

i

$$\chi_2^c(s,m) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{K}\hat{R}_{K-i}^c(s)\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}_1^c(s)\hat{\tau}_K(s,m)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}_j^c(s) - \hat{\tau}_{K-i}(s,m)\Big). \tag{4.2.30}$$

W wyniku porównania (4.2.25), (4.2.28) wyznaczamy $C(s,m)$ w następujący sposób

$$C(s,m) = \frac{\chi_2^c(s,m) - \chi_1^c(s,m)}{\Psi_1^c(s) - \Psi_2^c(s)}. \tag{4.2.31}$$

Długość kolejki w systemach typu $M/G/1/K$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania

Wykorzystując wyniki powyższych rozważań można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2.1 *Reprezentacja transformaty Laplace'a zależnego od czasu rozkładu prawdopodobieństwa długości kolejki w systemie typu $M/G/1/K$ z mechani-*

zmem probabilistycznego wybudzania stanowiska obsługi ma postać

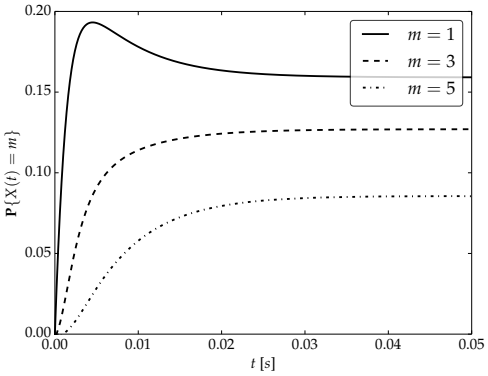
$$q_n(s,m) = \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{X(t)=m\,|\,X(0)=n\}dt = \frac{\chi_2^c(s,m)-\chi_1^c(s,m)}{\Psi_1^c(s)-\Psi_2^c(s)}$$
$$\times\left(\hat{R}^c_{K-n+1}(s) + \sum_{i=0}^{K-n}\hat{R}^c_{K-n-i}(s)\Big(\hat{\alpha}^c_{i+1}(s)\hat{R}^c_1(s) - \hat{\theta}(s)\Big(\hat{R}^c_2(s)+\hat{\alpha}^c_1(s)(\hat{R}^c_1)^2(s)\Big)\right.$$
$$\left.\times\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}^c_j(s)\Big)\right) + \sum_{i=0}^{K-n}\hat{R}^c_{K-n-i}(s)\Big(\hat{\theta}(s)\hat{R}^c_1(s)\hat{\tau}_K(s,m)\sum_{j=i+1}^{\infty}\hat{\alpha}^c_j(s) - \hat{\tau}_{K-i}(s,m)\Big), \tag{4.2.32}$$

gdzie $\mathrm{Re}(s) > 0$, *formuły* $\hat{\tau}_n(s,m)$, $\hat{\alpha}^c_n(s)$, $\hat{\theta}(s)$, $\Psi^c_1(s)$, $\chi^c_1(s,m)$, $\Psi^c_2(s)$, $\chi^c_2(s,m)$ *zostały odpowiednio zdefiniowane w (4.2.10), (4.2.17), (4.1.26), (4.2.26), (4.2.27), (4.2.29), (4.2.30), natomiast* $(\hat{R}^c_n)$ *jest potencjałem ciągu* $(\hat{\alpha}^c_n)$.

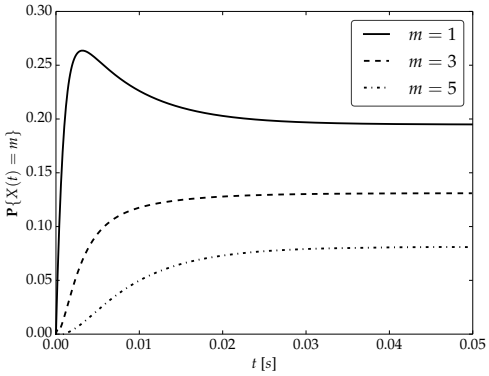
Przykład Rozważmy dwa złożone procesy Poissona o następujących rozkładach prawdopodobieństwa rozmiarów grup pakietów napływających do węzła sieci bezprzewodowej:

- $P_1 : p_1 = p_2 = 0.5, p_k = 0, k > 2,$
- $P_2 : p_1 = 0.8, p_2 = 0.2, p_k = 0, k > 2,$

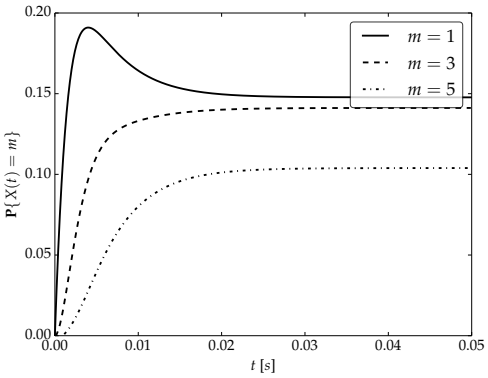
gdzie p_i jest prawdopodobieństwem napływu grupy o rozmiarze i. Załóżmy, że do węzła sieci o pojemności $K = 6$ z probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera napływają pakiety o rozmiarze 500 B według złożonego procesu Poissona odpowiednio z rozkładami wielkości grup pakietów P_1 i P_2 oraz intensywnościami $\lambda_1 = 300$ i $\lambda_2 = 370$. W każdym z przypadków do systemu wpływa średnio 450 pakietów na sekundę. Następnie rozpatrzmy dwie intensywności obsługi zgłoszeń 2.4 Mb/s i 1.8 Mb/s według rozkładu wykładniczego, co daje odpowiednio 600 i 450 pakietów na sekundę, w wyniku czego obciążenie systemu wynosi odpowiednio $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$. Ponadto, niech czasy rozruchu serwera mają rozkład wykładniczy ze średnimi 0.5, 2 i 20 ms. Tranzytywne rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki dla rozpatrywanych czasów rozruchu serwera przedstawiają rysunki 4.2.1 i 4.2.2, na których zilustrowano zachowanie systemu dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$. Wartości prawdopodobieństwa dla stanu ustalonego zostały podane w tabeli 4.2.1.



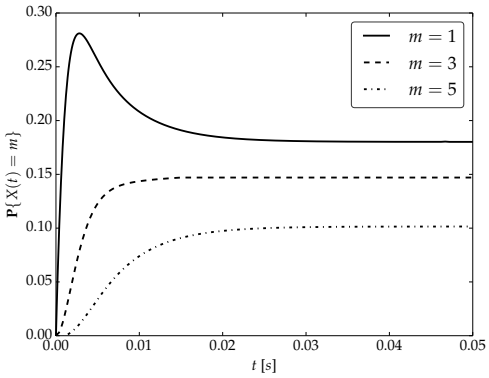
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 0.75$ i czasu rozruchu wynoszącego 0.5 ms.



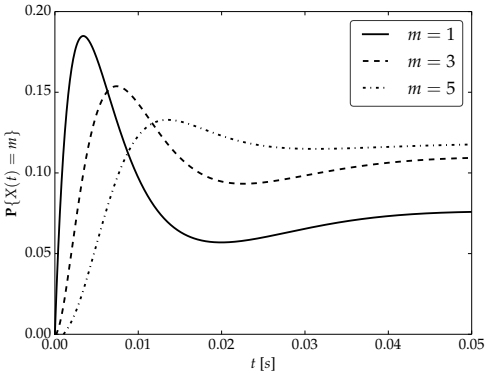
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 0.75$ i czasu rozruchu wynoszącego 0.5 ms.



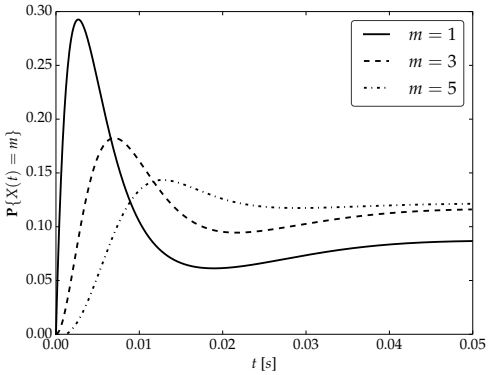
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 0.75$ i czasu rozruchu wynoszącego 2 ms.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 0.75$ i czasu rozruchu wynoszącego 2 ms.

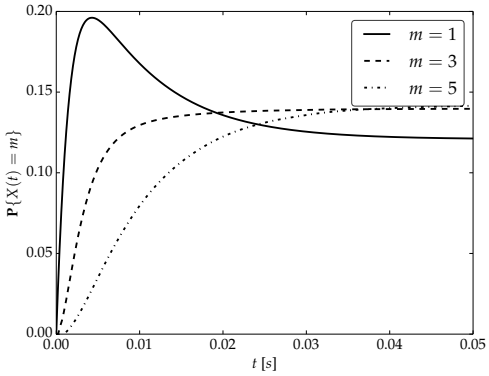


(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 0.75$ i czasu rozruchu wynoszącego 20 ms.

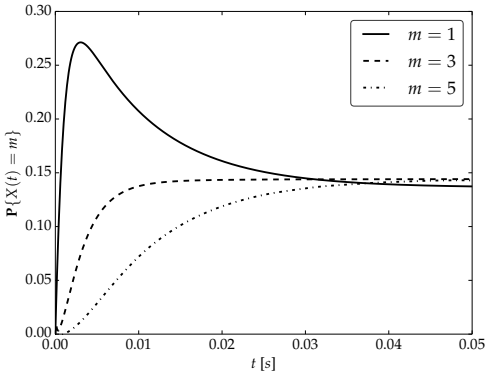


(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 0.75$ i czasu rozruchu wynoszącego 20 ms.

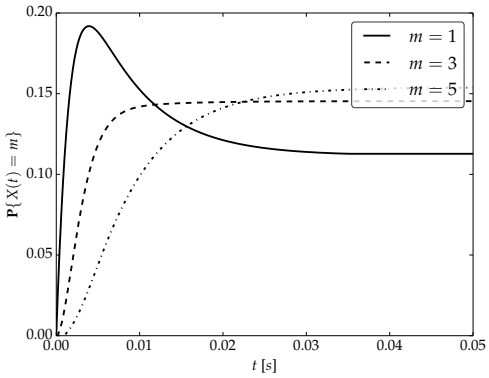
Rys. 4.2.1. Zachowanie kolejki w systemie z probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera dla $\rho = 0.75$, rozkładów P_1, P_2 oraz czasów rozruchu wynoszących 0.5, 2 i 20 ms.



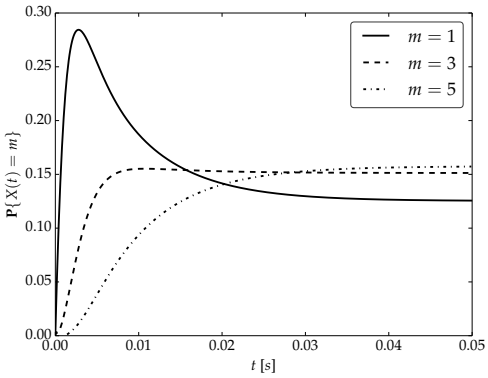
(a) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 1$ i czasu rozruchu wynoszącego 0.5 ms.



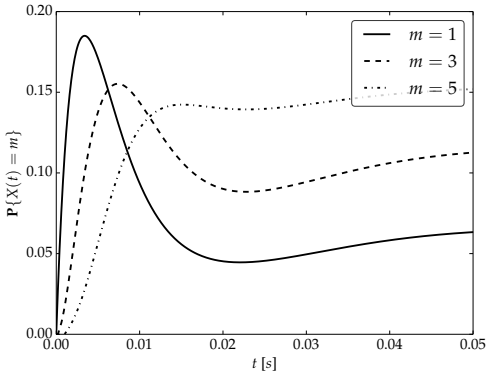
(b) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 1$ i czasu rozruchu wynoszącego 0.5 ms.



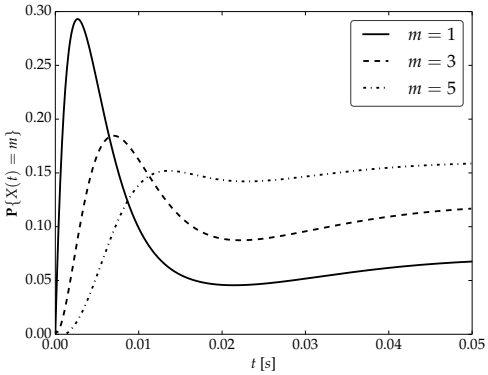
(c) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 1$ i czasu rozruchu wynoszącego 2 ms.



(d) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 1$ i czasu rozruchu wynoszącego 2 ms.



(e) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_1, $\rho = 1$ i czasu rozruchu wynoszącego 20 ms.



(f) Prawdopodobieństwo pobytu m pakietów w systemie w chwili t dla P_2, $\rho = 1$ i czasu rozruchu wynoszącego 20 ms.

Rys. 4.2.2. Zachowanie kolejki w systemie z probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera dla $\rho = 1$, rozkładów P_1, P_2 oraz czasów rozruchu wynoszących 0.5, 2 i 20 ms.

$\mathbf{P}\{X(\infty) = m | X(0) = 0\}$

m	$\rho = 0.75$ P_1	$\rho = 0.75$ P_2	$\rho = 1$ P_1	$\rho = 1$ P_2
Okres rozruchu serwera 0.5 ms				
1	0.19497	0.12134	0.13734	0.12125
3	0.13097	0.12670	0.14412	0.13964
5	0.08088	0.08547	0.14295	0.14155
Okres rozruchu serwera 2 ms				
1	0.18019	0.14772	0.12560	0.11275
3	0.14703	0.14116	0.15128	0.14536
5	0.10153	0.10391	0.15726	0.15374
Okres rozruchu serwera 20 ms				
1	0.08667	0.07584	0.06759	0.06329
3	0.11606	0.10931	0.11682	0.11260
5	0.12134	0.11762	0.15872	0.15195

Tab. 4.2.1. Rozkłady prawdopodobieństwa długości kolejki w stanie ustalonym dla $\rho = 0.75$ i $\rho = 1$, rozkładów P_1, P_2 oraz czasów rozruchu wynoszących 0.5, 2 i 20 ms.

Podsumowanie

W niniejszej rozprawie omówiono w sposób kompleksowy charakterystyki długości kolejki, opóźnienia kolejkowania oraz procesu liczącego obsłużone zgłoszenia dla jednokanałowych modeli kolejkowych z poissonowskim strumieniem zgłoszeń, skończonym buforem oraz mechanizmami wybudzania stanowiska obsługi. Uzyskane wyniki dotyczą kolejkowania procesów Poissona, a część z nich odnosi się również do złożonych procesów Poissona. W ramach rozpatrywanych dyscyplin znalazły się N-progowa i probabilistyczna dyscyplina wybudzania stanowiska obsługi, które umożliwiają modelowanie systemów z różnego rodzaju ograniczeniami w dostępie do serwera wynikającymi m.in. z zastosowanych mechanizmów oszczędzania zużycia energii, czy fizycznych cech serwera np. związanych z czasem osiągania pełnej gotowości operacyjnej. Opisane w pracy charakterystyki można wykorzystać m.in. do aproksymacji współczynnika utraty pakietów, czy też wyznaczenia prawdopodobieństwa utraty pakietów.

Zaprezentowane wyniki zostały otrzymane za pomocą metod analitycznych, które z powodzeniem można wykorzystać do wyznaczenia wielu nowych charakterystyk dla systemów kolejkowych z różnymi ograniczeniami narzuconymi na pracę serwera. Zastosowana metodologia umożliwia tranzytywny opis pracy systemów kolejkowych w zwartej postaci, co redukuje nakład czasu niezbędny na implementacje poszczególnych charakterystyk. Poza tym, pomimo skomplikowanej struktury statystycznego opisu ruchu sieciowego modelowanego za pomocą wykorzystanej metodologii, wyniki numeryczne możliwe są do uzyskania na przeciętnej klasy komputerze osobistym. Oczywiście w przypadku systemów kolejkowych o dużych buforach kolejek, gdzie czas obsługi zgłoszeń ma skomplikowany rozkład prawdopodobieństwa obliczenia numerycznie wymagają odpowiednio większych zasobów obliczeniowych.

Zawarte w pracy rezultaty badań są interesujące zarówno ze względu na teoretyczne jak i praktyczne aspekty związane z teorią kolejek. W pracy pokazano, że jest możliwy matematyczny, zwarty opis zachowania systemów kolejkowych z dyscyplinami wybudzania w dowolnej chwili czasu, co daje możliwość efektywnego modelowania tego typu systemów w stanie nieustalonym oraz ustalonym. Należy zwrócić uwagę na fakt, że założenie skończoności bufora systemu oraz ogólna postać zaprezentowanych charakterystyk umożliwiająca modelowanie obsługi zgłoszeń za

pomocą rozkładów prawdopodobieństwa z ciężkimi ogonami daje to możliwość precyzyjnego opisu statystycznych właściwości ruchu sieciowego w węzłach urządzeń sieciowych. Z praktycznego punktu widzenia, przedstawione w pracy rezultaty badań, a także nowe charakterystyki wyznaczone za pomocą użytej w rozprawie metodologii można wykorzystać do oceny wydajności oraz zapewnienia jakości różnego rodzaju usług telekomunikacyjnych.

Rezultaty rozważań teoretycznych zostały uzupełnione o liczne przykłady numeryczne ilustrujące zachowanie poszczególnych charakterystyk systemów kolejkowych w kontekście ruchu sieciowego.

Ponadto, w pracy zostały szczegółowo omówione narzędzia matematyczne (np. metoda potencjału błądzenia losowego) wykorzystane do wyznaczenia charakterystyk oraz metody obliczeniowe (np. numeryczne algorytmy odwracania transformaty Laplace'a i funkcji tworzących) umożliwiające praktyczne korzystanie z przedstawionych rezultatów teoretycznych.

Bibliografia

[1] L. Kleinrock. Queueing systems, volume I: Theory. 1975.

[2] L. Kleinrock. Queueing systems, volume II: Computer applications. 1976.

[3] W. Leland and T. J. Ott. *Load-balancing heuristics and process behavior*, volume 14. ACM, 1986.

[4] R. Cáceres, P. B. Danzig, S. Jamin, and D. J. Mitzel. Characteristics of wide-area TCP/IP conversations. In *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, volume 21, pages 101–112. ACM, 1991.

[5] V. Paxson. Empirically derived analytic models of wide-area TCP connections. *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, 2(4):316–336, 1994.

[6] I. Norros. A storage model with self-similar input. *Queueing systems*, 16(3-4): 387–396, 1994.

[7] M. F. Arlitt and C. L. Williamson. Internet web servers: Workload characterization and performance implications. *IEEE/ACM Transactions on Networking (ToN)*, 5(5):631–645, 1997.

[8] R. Maheswar and R. Jayaparvathy. Power control algorithm for wireless sensor networks using N-policy $M/M/1$ queueing model. *Power*, 2(07):2378–2382, 2010.

[9] F. C. Jiang, D. C. Huang, C. T. Yang, and F. Y. Leu. Lifetime elongation for wireless sensor network using queue-based approaches. *The Journal of Supercomputing*, 59(3):1312–1335, 2012.

[10] F. C. Jiang, D. C. Huang, and K. H. Wang. Design approaches for optimizing power consumption of sensor node with N-policy $M/G/1$ queuing model. In *Proceedings of the 4th International Conference on Queueing Theory and Network Applications*, page 3. ACM, 2009.

[11] F. C. Jiang, D. C. Huang, C. T. Yang, and K. H. Wang. Mitigation techniques for the energy hole problem in sensor networks using N-policy $M/G/1$ queuing

models. In *Frontier Computing. Theory, Technologies and Applications, 2010 IET International Conference on*, pages 281–286. IET, 2010.

[12] V. Mancuso and S. Alouf. Analysis of power saving with continuous connectivity. *Computer Networks*, 56(10):2481–2493, 2012.

[13] D. L. Jagerman and B. Melamed. Burstiness descriptors of traffic streams: Indices of dispersion and peakedness. In *Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems*, pages 24–28, 1994.

[14] Y. Ying, R. Mazumdar, C. Rosenberg, and F. Guillemin. The burstiness behavior of regulated flows in networks. In *NETWORKING 2005. Networking Technologies, Services, and Protocols; Performance of Computer and Communication Networks; Mobile and Wireless Communications Systems*, pages 918–929. Springer, 2005.

[15] B. D'Auria and S. I. Resnick. Data network models of burstiness. *Advances in Applied Probability*, 38(2):373–404, 2006.

[16] D. J. Daley and R. Vesilo. Long range dependence of point processes, with queueing examples. *Stochastic Processes and Their Applications*, 70(2):265–282, 1997.

[17] T. Karagiannis, M. Molle, and M. Faloutsos. Long-range dependence ten years of internet traffic modeling. *Internet Computing, IEEE*, 8(5):57–64, 2004.

[18] W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, and D. V. Wilson. On the self-similar nature of ethernet traffic. In *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*, volume 23, pages 183–193. ACM, 1993.

[19] M. E. Crovella and A. Bestavros. Self-similarity in World Wide Web traffic: Evidence and possible causes. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 5(6): 835–846, 1997.

[20] W. Willinger, M. S. Taqqu, R. Sherman, and D. V. Wilson. Self-similarity through high-variability: Statistical analysis of ethernet LAN traffic at the source level. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 5(1):71–86, 1997.

[21] F. W. Johannsen. Waiting times and number of calls. *P.O. Electr. Eng. J.*, 1907.

[22] A. K. Erlang. The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik B*, 20:33–39, 1909.

[23] Agner Krarup Erlang. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Elektrotkeknikeren*, 13:5–13, 1917.

[24] F. Pollaczek. Über eine aufgabe der wahrscheinlichkeitstheorie. I. *Mathematische Zeitschrift*, 32(1):64–100, 1930.

[25] A. Y. Khintchine. Mathematical theory of a stationary queue. *Mathematicheskii Schornik*, 39(4):73–84, 1932.

[26] T. O. Engset. Die wahrscheinlichkeitsrechnung zur bestimmung der wahleranzahl in automatischen fernsprechamtern. *Elektrotechnische zeitschrift*, 39(31): 304–306, 1918. Angielskie tłumaczenie *On the calculation of switches in an automatic telephone system - An investigation regarding some points in the basis for the application of probability theory on the determination of the amount of automatic exchange equipment* opublikowano w 1998 roku w *Telektronikk*.

[27] E. C. Molina. Application of the theory of probability to telephone trunking problems. *Bell system technical Journal*, 6(3):461–494, 1927.

[28] T. C. Fry. *Probability and its engineering uses*. D. Van Nostrand Company, 1928.

[29] R. Syski. *Congestion theory in telephone systems*. Oliver & Boyd, 1960.

[30] D. G. Kendall. Some problems in the theory of queues. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 13(2):151–185, 1951.

[31] D. G. Kendall. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(3):338–354, 1953.

[32] A. M. Lee. *Applied queueing theory*. Macmillan, 1966.

[33] D. V. Lindley. The theory of queues with a single server. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 48, pages 277–289. Cambridge Univ Press, 1952.

[34] W. L. Smith. On the distribution of queueing times. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 49, pages 449–461. Cambridge Univ Press, 1953.

[35] D. R. Cox. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 51, pages 433–441. Cambridge Univ Press, 1955.

[36] J. R. Jackson. Networks of waiting lines. *Operations research*, 5(4):518–521, 1957.

[37] P. D. Finch. The effect of the size of the waiting room on a simple queue. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 20(1):182–186, 1958.

[38] P. M. Morse. Queues, inventories and maintenance: The analysis of operation systems with variable supply and demand, 1958.

[39] F. A. Haight. Two queues in parallel. *Biometrika*, 45(3-4):401–410, 1958.

[40] H. White and L. S. Christie. Queuing with preemptive priorities or with breakdown. *Operations research*, 6(1):79–95, 1958.

[41] J. D. C. Little. A proof for the queuing formula: $L = \lambda W$. *Operations research*, 9(3):383–387, 1961.

[42] N. T. J. Bailey. A continuous time treatment of a simple queue using generating functions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 16(2):288–291, 1954.

[43] L. Takács. Transient behavior of single-server queuing processes with recurrent input and exponentially distributed service times. *Operations Research*, 8(2): 231–245, 1960.

[44] L. Takács. The transient behavior of a single server queueing process with a Poisson input. In *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob*, volume 2, pages 535–567, 1961.

[45] L. Takács. Transient behavior of single-server queueing processes with Erlang input. *Transactions of the American Mathematical Society*, 100(1):1–28, 1961.

[46] L. Takács. *Introduction to the Theory of Queues*. Oxford University Press, New York, 1962.

[47] A. V. Gafarian, C. J. Ancker Jr, and T. Morisaku. The problem of the initial transient in digital computer simulation. In *Proceedings of the 76 Bicentennial conference on Winter simulation*, pages 49–51. Winter Simulation Conference, 1976.

[48] E. de Souza e Silva, H. R. Gail, and R. V. Campos. *Calculating transient distributions of cumulative reward*, volume 23. ACM, 1995.

[49] W. K. Grassmann. Warm-up periods in simulation can be detrimental. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 22(03):415–429, 2008.

[50] W. K. Grassmann. Transient solutions in Markovian queueing systems. *Computers & Operations Research*, 4(1):47–53, 1977.

[51] C. D. Pegden and M. Rosenshine. Some new results for the $M/M/1$ queue. *Management Science*, 28(7):821–828, 1982.

[52] A. R. Odoni and E. Roth. An empirical investigation of the transient behavior of stationary queueing systems. *Operations Research*, 31(3):432–455, 1983.

[53] W. D. Kelton and A. M. Law. The transient behavior of the $M/M/s$ queue, with implications for steady-state simulation. *Operations Research*, 33(2):378–396, 1985.

[54] W. D. Kelton. Transient exponential-Erlang queues and steady-state simulation. *Communications of the ACM*, 28(7):741–749, 1985.

[55] P. R. Parthasarathy. A transient solution to an $M/M/1$ queue: A simple approach. *Advances in Applied Probability*, 19(4):997–998, 1987.

[56] J. Abate and W. Whitt. Transient behavior of the $M/M/1$ queue via Laplace transforms. *Advances in Applied Probability*, 20(1):145–178, 1988.

[57] P. Leguesdron, J. Pellaumail, G. Rubino, and B. Sericola. Transient analysis of the $M/M/1$ queue. *Advances in Applied Probability*, 25(3):702–713, 1993.

[58] D. L. Iglehart and W. Whitt. Multiple channel queues in heavy traffic. I. *Advances in Applied Probability*, 2(1):150–177, 1970.

[59] D. L. Iglehart and W. Whitt. Multiple channel queues in heavy traffic. II: Sequences, networks, and batches. *Advances in Applied Probability*, 2(2):355–369, 1970.

[60] H. Kobayashi. Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions. *Journal of the ACM (JACM)*, 21 (2):316–328, 1974.

[61] E. Gelenbe and I. Mitrani. *Analysis and synthesis of computer systems*, volume 4. World Scientific, 2010.

[62] T. Czachórski, K. Grochla, T. Nycz, and F. Pekergin. A diffusion approximation model for wireless networks based on IEEE 802.11 standard. *Computer Communications*, 33:S86–S92, 2010.

[63] L. Kleinrock. Information flow in large communication nets. *RLE Quarterly Progress Report*, 1, 1961.

[64] W. J. Gordon and G. F. Newell. Closed queuing systems with exponential servers. *Operations research*, 15(2):254–265, 1967.

[65] C. E. Skinner. A priority queuing system with server-walking time. *Operations Research*, 15(2):278–285, 1967.

[66] N. K. Jaiswal. *Priority queues*. Elsevier, 1968.

[67] M. Mandelbaum and B. Avi-Itzhak. Introduction to queueing with splitting and matching. In *Israel Journal of Technology*, volume 6, page 376. Weizmann Sci Press, 1968.

[68] J. P. Buzen. Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers. *Communications of the ACM*, 16(9):527–531, 1973.

[69] M. Reiser and S. S. Lavenberg. Mean-value analysis of closed multichain queuing networks. *Journal of the ACM (JACM)*, 27(2):313–322, 1980.

[70] G. S. Fishman. Estimation in multiserver queuing simulations. *Operations Research*, 22(1):72–78, 1974.

[71] F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, and F. G. Palacios. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the ACM (JACM)*, 22(2):248–260, 1975.

[72] E. D. Lazowska, J. Zahorjan, and K. C. Sevcik. Computer system performance evaluation using queueing network models. *Annual review of computer science*, 1(1):107–137, 1986.

[73] J. Walrand. *An introduction to queueing networks*. Prentice Hall, 1988.

[74] E. Gelenbe. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of applied probability*, pages 656–663, 1991.

[75] E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction to queueing networks*, volume 2. Wiley Chichester, 1998.

[76] M. J. Jacob and T. P. Madhusoodanan. Transient solution for a finite capacity $M/G^{a,b}/1$ queueing system with vacations to the server. *Queueing systems*, 2 (4):381–386, 1987.

[77] B. D. Choi and K. K. Park. The $M/G/1$ retrial queue with Bernoulli schedule. *Queueing Systems*, 7(2):219–227, 1990.

[78] J. Cao. Reliability analysis of $M/G/1$ queueing system with repairable service station of reliability series structure. *Microelectronics Reliability*, 34(4):721–725, 1994.

[79] K. C. Madan. An $M/G/1$ queueing system with additional optional service and no waiting capacity. *Microelectronics Reliability*, 34(3):521–527, 1994.

[80] I. Atencia, I. Fortes, P. Moreno, and S. Sanchez. An $M/G/1$ retrial queue with active breakdowns and Bernoulli schedule in the server. *International Journal of Information and Management Sciences*, 17(1):1, 2006.

[81] A. Beja and A. Teller. Relevant policies for Markovian queueing systems with many types of service. *Management Science*, 21(9):1049–1054, 1975.

[82] K. Sen and J. L. Jain. Combinatorial approach to Markovian queueing models. *Journal of statistical planning and inference*, 34(2):269–279, 1993.

[83] H. R. Gail, S. L. Hantler, and B. A. Taylor. On a preemptive Markovian queue with multiple servers and two priority classes. *Mathematics of Operations Research*, 17(2):365–391, 1992.

[84] W. Whitt. Improving service by informing customers about anticipated delays. *Management science*, 45(2):192–207, 1999.

[85] S. Hur and S. J. Paik. The effect of different arrival rates on the N-policy of $M/G/1$ with server setup. *Applied Mathematical Modelling*, 23(4):289–299, 1999.

[86] P. P. Bocharov, R. Manzo, and A. V. Pechinkin. Analysis of a two-phase queueing system with a Markov arrival process and losses. *Journal of Mathematical Sciences*, 131(3):5606–5613, 2005.

[87] S. S. Mishra and D. K. Yadav. Cost and profit analysis of Markovian queuing system with two priority classes: a computational approach. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 5(3):150–156, 2009.

[88] M. F. Neuts. *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. Courier Corporation, 1981.

[89] M. F. Neuts. Matrix-analytic methods in queuing theory. *European Journal of Operational Research*, 15(1):2–12, 1984.

[90] M. F. Neuts. *Structured stochastic matrices of $M/G/1$ type and their applications*. Dekker, 1989.

[91] V. Ramaswami. A duality theorem for the matrix paradigms in queueing theory. *Stochastic Models*, 6(1):151–161, 1990.

[92] A. S. Alfa. Discrete time queues and matrix-analytic methods. *Top*, 10(2): 147–185, 2002.

[93] L. Breuer and D. Baum. *An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods*. Springer Science & Business Media, 2005.

[94] R. B. Cooper. Introduction to queueing theory. 1981.

[95] A. A. Borovkov. *Asymptotic methods in queuing theory*. Number 1. John Wiley & Sons, 1984.

[96] B. R. K. Kashyap and M. L. Chaudhry. *An introduction to queueing theory*. A & A Publications, 1988.

[97] R. Nelson. Probability, stochastic processes, and queueing theory: The mathematics of computer performance modelling, 1995.

[98] B. D. Bunday. *An introduction to queueing theory*. Hodder Arnold, 1996.

[99] D. Gross and C. Harris. *Fundamentals of queueing theory*. Wiley Interscience, 1998.

[100] J. N. Daigle. *Queueing theory with applications to packet telecommunication*. Springer Science & Business Media, 2005.

[101] V. Anisimov. *Switching processes in queueing models*. John Wiley & Sons, 2013.

[102] R. G. Gallager. *Stochastic processes: theory for applications*. Cambridge University Press, 2013.

[103] L. Kleinrock. *Communication Nets; Stochastic Message Flow and Delay*. McGraw-Hill Company, New York, 1964.

[104] M. Stasiak, M. Glabowski, A. Wisniewski, and P. Zwierzykowski. *Modelling and dimensioning of mobile wireless networks: from GSM to LTE*. John Wiley & Sons, 2010.

[105] T. Czachórski. *Modele kolejkowe w ocenie efektywności pracy sieci i systemów komputerowych*. Wydaw. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, 1999.

[106] T. Czachórski. Queueing models for performance evaluation of computer networks — transient state analysis. In *Analytic Methods in Interdisciplinary Applications*, pages 51–80. Springer, 2015.

[107] O. M. Tikhonenko. Queuing system with processor sharing and limited resources. *Automation and Remote Control*, 71(5):803–815, 2010.

[108] O. M. Tikhonenko. Queueing systems with common buffer: a theoretical treatment. In *Computer Networks*, pages 61–69. Springer, 2011.

[109] W. E. Leland and D. V. Wilson. High time-resolution measurement and analysis of LAN traffic: Implications for LAN interconnection. In *INFOCOM'91. Proceedings. Tenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Networking in the 90s., IEEE*, pages 1360–1366. IEEE, 1991.

[110] M. Harchol-Balter and A. B. Downey. Exploiting process lifetime distributions for dynamic load balancing. *ACM Transactions on Computer Systems (TOCS)*, 15(3):253–285, 1997.

[111] V. Paxson and S. Floyd. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling. *IEEE/ACM Transactions on Networking (ToN)*, 3(3):226–244, 1995.

[112] W. Willinger, M. S. Taqqu, W. E. Leland, and D. V. Wilson. Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of ethernet traffic measurements. *Statistical science*, pages 67–85, 1995.

[113] K. Park, G. Kim, and M. Crovella. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self-similar network traffic. In *Network Protocols, 1996. Proceedings., 1996 International Conference on*, pages 171–180. IEEE, 1996.

[114] A. Feldmann. *Characteristics of TCP connection arrivals*, pages 367–397. John Wiley & Sons, 2000.

[115] W. E. Leland, M. S Taqqu, W. Willinger, and D. V. Wilson. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version). *Networking, IEEE/ACM Transactions on*, 2(1):1–15, 1994.

[116] J. Seo, S. Lee, N. Park, H. Lee, and C. Cho. Performance analysis of sleep mode operation in IEEE 802.16e. In *Vehicular Technology Conference, 2004. VTC2004-Fall. 2004 IEEE 60th*, volume 2, pages 1169–1173. IEEE, 2004.

[117] K. Han and S. Choi. Performance analysis of sleep mode operation in IEEE 802.16e mobile broadband wireless access systems. In *Vehicular Technology Conference, 2006. VTC 2006-Spring. IEEE 63rd*, volume 3, pages 1141–1145. IEEE, 2006.

[118] W. M. Kempa and I. Paprocka. Analytical solution for time-dependent queue-size behavior in the manufacturing line with finite buffer capacity and machine setup and closedown times. In *Applied Mechanics and Materials*, volume 809, pages 1360–1365. Trans Tech Publ, 2015.

[119] Q. Sun, S. Jin, and C. Chen. Energy analysis of sensor nodes in WSN based on discrete-time queueing model with a setup. In *Control and Decision Conference (CCDC), 2010 Chinese*, pages 4114–4118. IEEE, 2010.

[120] J. Hu and T. Phung-Duc. Power consumption analysis for data centers with independent setup times and threshold controls. In *Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, volume 1648. Aip Publishing, 2015.

[121] N. Tian and Z. G. Zhang. *Vacation queueing models: Theory and Applications*, volume 93. Springer Science & Business Media, 2006.

[122] S. F. Yashkov. A note on application of the method of supplementary variables to the analysis of a processor sharing system. *Automation and Remote Control*, 69(9):1622–1629, 2008.

[123] A. N. Kolmogorov. On the analytic methods of probability theory. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, (5):5–41, 1938.

[124] W. Feller. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. *Annals of Mathematics*, pages 527–570, 1957.

[125] P. Conny. Intensitätsschwankungen im fernsprechverkehr. *Ericsson Technics*, 44:189, 1943. Angielskie tłumaczenie *Intensity Variations in Telephone Traffic* opublikowano w 1987 roku przez *North–Holland Publ. Co.*

[126] A. M. Law. A comparison of two techniques for determining the accuracy of simulation output. *University of Wisconsin*, 1975.

[127] J. Banks. Principles of simulation. *Handbook of Simulation: principles, methodology, advances, applications, and practice*, pages 3–30, 1998.

[128] M. A. Centeno. An introduction to simulation modeling. In *Proceedings of the 28th conference on Winter simulation*, pages 15–22. IEEE Computer Society, 1996.

[129] R. B. Chase, N. J. Aquilano, and F. R. Jacobs. Production and operations management: manufacturing and services. 1995.

[130] T. J. Schriber and D. T. Brunner. How discrete-event simulation software works. *Handbook of Simulation: principles, methodology, advances, applications, and practice*, pages 765–811, 1995.

[131] A. A. B. Pritsker. Principles of simulation modeling. *Handbook of Simulation: principles, methodology, advances, applications, and practice*, pages 31–54, 1998.

[132] A. Chydziński. On transient analysis of queues with Poisson input stream. In *Proceedings of International Workshop in Applied Probability*, pages 85–89, 2004.

[133] A. Chydziński. Solving finite-buffer queues with Markovian arrivals. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 35(3):13–15, 2007.

[134] A. Chydziński. Charakterystyki kolejkowania markowskich modeli ruchu w sieciach pakietowych. *Studia Informatica*, 28(3B):1–186, 2007.

[135] A. Chydziński. On the remaining service time upon reaching a given level in $M/G/1$ queues. *Queueing Systems*, 47(1-2):71–80, 2004.

[136] A. Chydziński. Buffer overfow period in a constant service rate queue. *Proceedings of TELE-INFO'06*, 6:186–191, 2006.

[137] A. Chydziński. On the overflow interval in a Poisson arrival queue. *WSEAS Transactions on Computers*, 5(7):1421–1428, 2006.

[138] A. Chydziński. On the statistical structure of losses caused by the buffer overflow. *Proceedings of TELE-INFO'05*, 5:165–171, 2005.

[139] A. Chydziński. On the distribution of consecutive losses in a finitecapacity queue. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 4(3):117–124, 2005.

[140] A. Chydziński. Duration of the buffer overflow period in a batch arrival queue. *Performance Evaluation*, 63(4):493–508, 2006.

[141] V. Kadankov and T. Kadankova. Busy period, virtual waiting time and number of customers in $G^\delta/M^\kappa/1/B$ system. *Queueing Systems*, 65(2):175–209, 2010.

[142] T. Kadankova, V. Kadankov, and N. Veraverbeke. Busy period, time of the first loss of a customer and the number of customers in $M^\kappa/G^\delta/1/B$. *arXiv preprint arXiv:1103.4064*, 2011.

[143] W. M. Kempa. On the distribution of the time to buffer overflow in a queueing system with a general-type input stream. In *Telecommunications and Signal Processing (TSP), 2012 35th International Conference on*, pages 207–211. IEEE, 2012.

[144] W. M. Kempa. Departure process in finite-buffer queue with batch arrivals. In *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*, pages 1–13. Springer, 2011.

[145] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Queue-size distribution in a WSN node with power saving algorithm based on N-policy. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[146] W. M. Kempa and D. Kurzyk. On transient queue-size distribution in a WSN node with threshold-type power saving algorithm. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[147] W. M. Kempa. On queueing delay in WSN with energy saving mechanism based on queued wake up. In *Systems, Signals and Image Processing (IWSSIP), 2014 International Conference on*, pages 187–190, 2014.

[148] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Transient departure process in $M/G/1/K$-type queue with threshold server's waking up. In *Software, Telecommunications and Computer Networks (SoftCOM), 2015 23rd International Conference on*, pages 32–36. IEEE, 2015.

[149] V. S. Korolyuk. Boundary-value problems for compound Poisson processes. *Naukova Dumka, Kiev (in Russian)*, 1975.

[150] W. M. Kempa. The transient analysis of the queue-length distribution in the batch arrival system with N-policy, multiple vacations and setup times. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1293, pages 235–242. AIP Publishing, 2010.

[151] W. M. Kempa. On transient queue-size distribution in the batch arrival system with the N-policy and setup times. *Mathematical Communications*, 17(1):285–302, 2012.

[152] J. W. Cohen. *The Single Server Queue.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[153] M. Bratiichuk and B. Borowska. Explicit formulae and convergence rate for the system $M^\alpha/G/1/N$ as $N \to \infty$. *Stochastic Models*, 18, 2002.

[154] W. Kempa. The virtual waiting time for the batch arrival queueing systems. *Stochastic Analysis and Applications*, 22(5):1235–1255, 2004.

[155] W. M. Kempa. The virtual waiting time in a finite-buffer queue with a single vacation policy. In *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*, pages 47–60. Springer, 2012.

[156] W. M. Kempa. On transient departure process in a finite-buffer queueing model with probabilistic packet dropping. In *Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'14)*, volume 1631, pages 42–49. AIP Publishing, 2014.

[157] C. Luo, X. Huang, and C. Ding. Study on the departure process of discrete-time $Geo/G/1$ queue with randomized vacations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 2014.

[158] Y. Tang. On the transient departure process of $M^x/G/1$ queueing system with single server vacation. *Journal of Systems Science and Complexity*, 20 (4):562–571, 2007.

[159] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Non-stationary departure process in a batch-arrival $M^X/G/1/K$-type queue with threshold policy. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[160] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Analysis of time-dependent queue-size distribution in a finite-buffer model with generally distributed server setup times. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[161] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Analysis of time-dependent queue-size distribution in a finite-buffer model with batched arrivals and generally distributed setup times. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[162] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Analysis of transient virtual delay in a finite-buffer queueing model with generally distributed setup times. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[163] W. M. Kempa and D. Kurzyk. Transient processing analysis in a finite-buffer queueing model with setup times. *Zgłoszono do publikacji*, 2016.

[164] A. Burnetas and A. Economou. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. *Queueing Systems*, 56(3-4):213–228, 2007.

[165] W. Sun, P. Guo, and N. Tian. Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times. *Central European Journal of Operations Research*, 18(3):241–268, 2010.

[166] P. Chen, W. Zhou, and Y. Zhou. Equilibrium customer strategies in the queue with threshold policy and setup times. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015.

[167] W. Yue, Q. Sun, and S. Jin. Performance analysis of sensor nodes in a WSN with sleep/wakeup protocol. In *Lect. Notes Oper. Res.*, volume 12, pages 370–377, 2010.

[168] Z. Niu, X. Guo, S. Zhou, and P. R. Kumar. Characterizing energy–delay tradeoff in hyper-cellular networks with base station sleeping control. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 33(4):641–650, 2015.

[169] C. Nuzman, I. Saniee, W. Sweldens, and A. Weiss. A compound model for TCP connection arrivals for LAN and WAN applications. *Computer Networks*, 40(3):319–337, 2002.

[170] W. M. Kempa. Study on time-dependent departure process in a finite-buffer queueing model with BMAP-type input stream. In *Cybernetics (CYBCONF), 2015 IEEE 2nd International Conference on*, pages 245–250. IEEE, 2015.

[171] W. M. Kempa, I. Paprocka, K. Kalinowski, and C. Grabowik. On departure process in a production model with cyclic working and repair periods. In *Advanced Materials Research*, volume 1036, pages 846–851. Trans Tech Publ, 2014.

[172] W. M. Kempa, I. Paprocka, C. Grabowik, and K. Kalinowski. On effect of model parameters on departure process in a production system with failures. In *Advanced Materials Research*, volume 1036, pages 927–932. Trans Tech Publ, 2014.

[173] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume I.* John Wiley & Sons London-New York-Sydney-Toronto, 1968.

[174] J. Jakubowski and R. Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa.* Script, 2001.

[175] A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, random variables, and stochastic processes.* Tata McGraw-Hill Education, 2002.

[176] S. M. Ross. *Introduction to probability models.* Academic press, 2014.

[177] J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt. An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models. In W. Grassmann, editor, *Computational probability*, volume 24 of *International Series in Operations Research & Management Science*, pages 257–323. Springer US, 2000.

[178] VS Korolyuk, NS Bratiichuk, and B Pirdzhanov. Boundary-value problems for random walks. *Ylym, Ashkhabad*, 1987.

[179] C. H. von Lanzenauer and W. N. Lundberg. The n-fold convolution of a mixed density and mass function. *ASTIN bulletin*, 8(01):91–103, 1974.

[180] H. Aydoğdu. Some bounds for the n-fold convolution of concave and log-concave distribution functions. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, 56(2):17–25, 2007.

Załączniki

Dodatek A

Narzędzia matematyczne

Część A niniejszego dodatku dotyczy podstawowych zagadnień z zakresu teorii prawdopodobieństwa [173, 174], procesów stochastycznych [175, 176], całki Riemanna-Stieltjesa, transformaty Laplace'a, transformaty Laplace'a-Stieltjesa [94], numerycznego algorytmu odwracania transformaty Laplace'a [177], funkcji tworzących rozkładu prawdopodobieństwa [94], numerycznego algorytmu odwracania funkcji tworzących [177] oraz teorii potencjału błądzenia losowego [149, 178]. Omówione poniżej zagadnienia są ściśle związanie z tematyką rozprawy.

Niektóre użyte poniżej oznaczenia występują również w części właściwej pracy, niemniej jednak ich znaczenie jest inne, np. poniżej przez X oznaczana jest zmienna losowa, natomiast w kontekście rozpatrywanych modeli kolejkowych $X(t)$ oznacza liczbę zgłoszeń będących w systemie w chwili t.

A.1. Teoria prawdopodobieństwa

Korzenie rachunku prawdopodobieństwa sięgają XVI, kiedy to formalizm matematyczny zaczął być wykorzystywany m.in. przez Geronimo Cardano do opisu gier losowych. Znaczący wpływ na rozwój rachunku prawdopodobieństwa mieli Pierre de Fermat, Blaise Pascal oraz Jakub Bernoulli. Początkowo teoria prawdopodobieństwa dotyczyła niemal wyłącznie zjawisk dyskretnych i oparta była głównie na metodach kombinatorycznych. W XIX nastąpił jej szybki rozwój za sprawą m.in. Carla Friedricha Gaussa, Pierre'a Simona de Laplace'a, Siméona Denisa Poissona, czy Pafnutija Lwowicza Czybyszewa. W 1900 roku, na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu, David Hilbert przedstawił 23 zagadnienia dotyczące podstawowych w tamtym czasie problemów w matematyce. Problem szósty dotyczył aksjomatyzacji całości fizyki, gdzie teoria prawdopodobieństwa była uznawana przez Hilberta za jej ważny dział. Po próbach aksjomatyzacji teorii prawdopodobieństwa przez Bohlmanna (1908 r.), Bernsteina (1917 r.), von Misesa (1919 r.), Łomnickiego (1923 r.),

w roku 1933 A. Kołmogorow sformułował w oparciu o 5 aksjomatów teorię prawdopodobieństwa jako szczególny przypadek teorii miary. Aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa Kołmogorowa uzyskała szerokie uznanie, co spowodowało jej dalszy rozwój, dzięki czemu obecnie jest powszechnie rozwijaną i wykorzystywaną teorią w wielu dziedzinach nauki m. in. w teorii kolejek.

A.1.1. Przestrzeń probabilistyczna

Podstawą aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa Kołmogorowa jest koncepcja przestrzeni probabilistycznej zdefiniowanej w postaci trójki

$$(\Omega, \mathscr{F}, P), \tag{A.1.1}$$

gdzie Ω jest niepustym zbiorem nazywanym przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathscr{F}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω nazywanym przestrzenią zdarzeń losowych, tzn. klasą podzbiorów spełniających warunki

- $\emptyset \in \mathscr{F}$
- jeżeli $A \in \mathscr{F}$, to $A^c = \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$,
- jeżeli $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

natomiast $P : \mathscr{F} \to [0, 1]$ jest odwzorowaniem nazywanym miarą probabilistyczną o własnościach

- $P(A) \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \mathscr{F}$,
- $P(\Omega) = 1$,
- dla $A_1, A_2, ... \in \mathscr{F}$, które są parami rozłączne tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Parę $(\Omega, \mathscr{F})$ nazywa się przestrzenią mierzalną.

A.1.2. Prawdopodobieństwo łączne i warunkowe

Koniunkcją dwóch zdarzeń $A, B \in \mathscr{F}$ nazywane jest zdarzenie $A \cap B$ (krócej AB), które składa się ze zdarzeń elementarnych należących zarówno do A jak i do B. Zdarzenia A i B są niezależne jeśli zachodzi równość $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Zdarzenia $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$ są wzajemnie niezależne gdy $P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_m})$ dla każdego układu indeksów $i_1, ..., i_m$ oraz $m < n$. Ponadto, $A_1, ..., A_n$ są parami niezależne jeśli $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ dla $i \neq j$. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia B pod warunkiem, że zaszło zdarzenie A dane jest wzorem

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \tag{A.1.2}$$

przy założeniu, że $P(A) > 0$. Zatem, jeśli zdarzenia A i B są niezależne, wówczas $P(B|A) = P(B)$.

A.1.3. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Niech $I \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem indeksów oraz $B_i \in \mathscr{F}$. Jeżeli rodzina $\{B_i\}_{i \in I}$ jest rozbiciem zbioru Ω, tzn. spełnia następujące warunki

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i, j \in I, i \neq j$,
- $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$,
- $P(B_i) > 0$, dla każdego $i \in I$,

wówczas dla dowolnego $A \in \mathscr{F}$ zachodzi równanie

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i). \tag{A.1.3}$$

A.1.4. Zmienna losowa

A.1.4.1. Zmienna losowa

Zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ nazywana jest funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F} \tag{A.1.4}$$

gdzie $B \subset \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem borelowskim. W celu uproszczenia powyższego zapisu stosuje się oznaczenie $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \stackrel{ozn}{=} \{X \in B\}$. Zbiór B może być m.in. dowolnym zbiorem borelowskim na prostej np. $B = \{x_0\}$, $B =< a, b >$, $B =< x_0, \infty)$, $B = \mathbb{N}$ lub płaszczyźnie np. $B = \mathbb{R}^2$. Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną X wartości ze zbioru B oznacza się przez

$$\mathbf{P}\{X \in B\} \stackrel{ozn}{=} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}). \tag{A.1.5}$$

Przykładowo, jeśli przyjmiemy, że $B = [a, b)$, wówczas

$$\mathbf{P}\{a \leq X < b\} \stackrel{ozn}{=} P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\}). \tag{A.1.6}$$

Jeśli X jest zmienną losową, wówczas $Y = g(X)$ jest również zmienną losową, gdzie g jest dowolną funkcją $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ponadto, gdy $X_1, X_2, ..., X_n$ są zmiennymi losowymi, wówczas $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jest również zmienną losową.

A.1.4.2. Rozkład prawdopodobieństwa

Rozkładem prawdopodobieństwa nazywana jest dowolna miara probabilistyczna μ określona na σ-ciele podzbiorów $\mathbb{R}$.

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X nazywany jest rozkład prawdopodobieństwa μ_X określony na na σ-ciele podzbiorów $\mathbb{R}$, taki że

$$\mu_X(B) = \mathbf{P}\{X \in B\}, \tag{A.1.7}$$

gdzie $B \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem borelowskim.

A.1.4.3. Dystrybuanta zmiennej losowej

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję F_X określoną na $\mathbb{R}$ w postaci

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\}. \tag{A.1.8}$$

Ponadto, dystrybuanta dowolnej zmiennej losowej ma następujące własności

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$,
- F_X jest niemalejąca,
- F_X jest lewostronnie ciągła, tzn.

  $$\lim_{x\to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0)$$

  dla każdego $x \in \mathbb{R}$,
- $\mathbf{P}\{a \leq X < b\} = F_X(b) - F_X(a)$,
- $\mathbf{P}\{X = x_0\} = \lim_{x\to x_0^+} F_X(x) - F_X(x_0)$

A.1.4.4. Dyskretna zmienna losowa

Zmienna losowa X nazywana jest dyskretną lub typu skokowego, wtedy i tyko wtedy gdy zbiór jej wartości jest skończony lub przeliczalny. Jeśli $x_1, x_2, ...$ są wartościami zmiennej X oraz $p(x_i) = \mathbf{P}\{X = x_i\}$ wówczas

$$\sum_i p(x_i) = 1. \tag{A.1.9}$$

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną X wartości ze zbioru B jest określone w postaci

$$\mathbf{P}\{X \in B\} = \sum_{x_i \in A} p(x_i). \tag{A.1.10}$$

Dystrybuanta dyskretnej zmiennej losowej wyraża się wzorem

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p(x_i). \tag{A.1.11}$$

A.1.4.5. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa określonym na σ-ciele podzbiorów $\mathbb{R}$. Jeśli istnieje funkcja f całkowalna w sensie Lebesgue'a w postaci

$$\mu(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{A.1.12}$$

gdzie B jest zbiorem borelowskim, wówczas f jest nazywana gęstością rozkładu prawdopodobieństwa μ.

A.1.4.6. Ciągła zmienna losowa

Jeśli istnieje gęstość rozkładu prawdopodobieństwa f zmiennej losowej X, wówczas dystrybuanta X może być przedstawiona w postaci

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{A.1.13}$$

natomiast X jest nazywana ciągłą zmienną losowa.

Zmienne losowe typu ciągłego posiadają następujące własności:

- $F'(x) = f(x)$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
- $\mathbf{P}\{X = c\} = 0$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$,
- $\mathbf{P}\{a \leq X < b\} = \mathbf{P}\{a < X \leq b\} = \mathbf{P}\{a < X < b\} = \mathbf{P}\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a)$,
- $\mathbf{P}\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

A.1.4.7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych

Niech F_X, F_Y będą dystrybuantami zmiennych losowych X i Y. Wówczas zachodzi wzór

$$F_Y(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{X < x | Y = y\}\,\mathrm{d}F_X(y). \tag{A.1.14}$$

A.1.4.8. Rozkład prawdopodobieństwa z ciężkim ogonem

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X z dystrybuantą F ma ciężki ogon jeśli

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{P}\{X > x\} = \infty, \quad \lambda > 0. \tag{A.1.15}$$

Podklasą rozkładów prawdopodobieństwa z ciężkim ogonem są rozkłady prawdopodobieństwa z długim ogonem, które są charakteryzowane następująco

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\{X > x + t | X > x\} = 1 \tag{A.1.16}$$

dla każdego $t > 0$.

A.1.5. Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

A.1.5.1. Rozkład Poissona

Zależny od parametru α rozkład Poissona jest jedynym dyskretnym rozkładem zaprezentowanym w tej sekcji. Jego charakterystyka jest następująca.

Funkcja masy prawdopodobieństwa:

$$f(i) = \frac{\alpha^i \mathrm{e}^{-\alpha}}{i!}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{A.1.17}$$

Dystrybuanta:

$$F(i) = \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{i-0}^{\lfloor i \rfloor} \frac{\alpha^i}{i!}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{A.1.18}$$

Średnia:

$$\alpha. \tag{A.1.19}$$

Wariancja:

$$\alpha. \tag{A.1.20}$$

A.1.5.2. Rozkład wykładniczy

Rozkład wykładniczy zależy od parametru skali α, a jego postać jest następująca.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \tag{A.1.21}$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}. \tag{A.1.22}$$

Średnia:

$$\frac{1}{\alpha}. \tag{A.1.23}$$

Wariancja:

$$\frac{1}{\alpha^2}. \tag{A.1.24}$$

Rozkład wykładniczy charakteryzuje się własnością braku pamięci, tzn. dla zmiennej losowej X z wykładniczym rozkładem prawdopodobieństwa zachodzi

$$\mathbf{P}\{X > t + s | X > t\} = \mathbf{P}\{X > s\}, \quad s > 0,\, t > 0. \tag{A.1.25}$$

Własność braku pamięci oznacza, że kolejne realizacje zmiennej losowej X nie zależą od dotychczasowych wartości zmiennej.

A.1.5.3. Rozkład Erlanga

Rozkład Erlanga jest sparametryzowany poprzez α, k, które określają odpowiednio jego skalę i kształt. Rozkład Erlanga z parametrami α i k jest określony w następujący sposób.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{\alpha^k x^{k-1} \mathrm{e}^{-\alpha x}}{(k-1)!}, \quad x > 0. \tag{A.1.26}$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^n}{n!}, \quad x > 0. \tag{A.1.27}$$

Średnia:

$$\frac{k}{\alpha}. \tag{A.1.28}$$

Wariancja:

$$\frac{k}{\alpha^2}. \tag{A.1.29}$$

Dla $k = 1$ otrzymujemy rozkład wykładniczy.

A.1.5.4. Rozkład gamma

Uogólnieniem rozkładu Erlanga jest zależny od parametrów skali α i kształtu k rozkład gamma, który jest określony następująco.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{\alpha^k x^{k-1} \mathrm{e}^{-\alpha x}}{\Gamma(k)}, \quad x > 0. \tag{A.1.30}$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = \frac{\gamma(k, \alpha x)}{\Gamma(k)}, \quad x > 0. \tag{A.1.31}$$

Średnia:

$$\frac{k}{\alpha}. \tag{A.1.32}$$

Wariancja:

$$\frac{k}{\alpha^2}. \tag{A.1.33}$$

Ponadto $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ oraz $\gamma(t,y) = \int_0^y x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

A.1.5.5. Rozkład hiperwykładniczy

Gęstość rozkład hiperwykładniczego jest kombinacją wypukłą gęstości rozkładów wykładniczych, tzn.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x), \tag{A.1.34}$$

gdzie f_i są gęstościami rozkładów wykładniczych, natomiast $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Zatem, rozkład hiperwykładniczy jest parametryzowany poprzez ciąg $p_1, \ldots, p_n$ oraz ciąg parametrów skali $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i \mathrm{e}^{-\alpha_i x}, \quad x > 0. \tag{A.1.35}$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{e}^{-\alpha_i x}, \quad x > 0. \tag{A.1.36}$$

Średnia:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\alpha_i}. \tag{A.1.37}$$

Wariancja:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\alpha_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i p_j \left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_j}\right)^2. \tag{A.1.38}$$

A.1.5.6. Rozkład Pareto

Rozkład Pareto jest zależny od parametru skali α i parametru kształtu k oraz jest określony następująco.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k\alpha^k}{x^{k+1}} & x \geq \alpha \\ 0 & x < \alpha \end{cases}. \tag{A.1.39}$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (\frac{\alpha}{x})^k & x \geq \alpha \\ 0 & x < \alpha \end{cases}. \tag{A.1.40}$$

Średnia:

$$\begin{cases} \infty & k \leq 1 \\ \frac{k\alpha}{k-1} & k > 1 \end{cases}. \tag{A.1.41}$$

Wariancja:

$$\begin{cases} \infty & k \in (0,2] \\ \frac{k\alpha^2}{(k-1)^2(k-2)} & k > 2 \end{cases}. \tag{A.1.42}$$

Rozkład Pareto należy do klasy rozkładów prawdopodobieństwa z ciężkim ogonem (sekcja A.1.4.8).

A.1.5.7. Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla jest zależny od parametru skali α i parametru kształtu k oraz jest scharakteryzowany następująco.

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\alpha}(\frac{x}{\alpha})^{k-1}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{\alpha})^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{A.1.43}$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-(\frac{x}{\alpha})^k} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{A.1.44}$$

Średnia:

$$\alpha\Gamma\Big(1 + \frac{1}{k}\Big). \tag{A.1.45}$$

Wariancja:

$$\alpha^2\left(\Gamma\Big(1 + \frac{2}{k}\Big) - \left(\Gamma\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\right)^2\right). \tag{A.1.46}$$

Podobnie jak w przypadku rozkładu Pareto, rozkład Weibulla należy do klasy rozkładów prawdopodobieństwa z ciężkim ogonem A.1.4.8.

A.2. Procesy stochastyczne

Niech Z_t, $t \geq 0$ będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Procesem stochastycznym nazywamy rodzinę zmiennych losowych $\{Z_t\}_{t\in T}$ indeksowanych zbiorem T. Zatem dla każdego $t \in T$, Z_t jest odwzorowaniem $Z_t : \Omega \to \mathbb{R}$. Wartości zmiennych losowych Z_t nazywane są stanami, natomiast ich dziedziny zmiennych nazywane są przestrzeniami stanów. Dla każdego ustalonego $\omega \in \Omega$ odwzorowanie

$$t \to Z_t(\omega), \quad t \in T \tag{A.2.1}$$

nazywane jest realizacją lub trajektorią procesu. Ponadto, na każdy proces stochastyczny można patrzeć jak na funkcję dwóch zmiennych t, ω, gdzie mamy do czynienia z odwzorowaniem w postaci $t, \omega \to Z_t(\omega)$.

Zbiór indeksów T może być interpretowany jako czas. Jeśli $T \subseteq \mathbb{N}$ lub $T \subseteq \mathbb{Z}$ wówczas mówimy o procesie stochastycznym z czasem dyskretnym, natomiast dla $T \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mówimy o procesie stochastycznym z czasem ciągłym.

Dyskretne procesy stochastyczne zazwyczaj oznaczane są przez $\{Z_n, n \in N\}$, gdzie N jest zbiorem przeliczalnym, natomiast ciągle procesy stochastyczne oznaczane są przez $\{Z_t, t \geq 0\}$, gdzie $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Procesy stochastyczne można podzielić na dyskretne z przeliczalną oraz nieprzeliczalną przestrzenią stanów, a także na ciągłe z dyskretną i nieprzeliczalną przestrzenią stanów.

Proces stochastyczny w chwili t jest w stanie ustalonym jeśli

$$\mathbf{P}\{Z_{t_1} < x_1, \cdots, Z_{t_n} < x_n\} = \mathbf{P}\{Z_{t_{1+\tau}} < x_1, \cdots, Z_{t_{n+\tau}} < x_n\} \tag{A.2.2}$$

dla dowolnego τ.

A.2.1. Proces liczący

Procesem liczącym nazywamy proces stochastyczny $\{N_t, t \geq 0\}$, dla którego spełnione są następujące warunki

i) $N_0 = 0$,

ii) $N_t \in \mathbb{N}$,

iii) dla każdego $s < t$ zachodzi $N_s \leq N_t$, gdzie $N_t - N_s$ jest liczbą zdarzeń, które zaszły w okresie $(s, t]$.

A.2.2. Proces Poissona

Procesem Poissona z parametrem λ nazywamy proces liczący A.2.1 określony na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spełniający następujące warunki

i) $N_0 = 0$,

ii) dla dowolnego $n \geq 1$ oraz $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ przyrosty $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, ..., N_{t_2} - N_{t_1}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi,

iii) dla dowolnego $0 \leq s < t$ zmienne $N_t - N_s$ mają rozkład Poissona A.1.5.1 z parametrem $\alpha(t-s)$, tzn.

$$\mathbf{P}\{N_t - N_s = k\} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\big((\alpha(t-s)\big)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{A.2.3}$$

gdzie α jest parametrem rozkładu Poissona.

Procesy Poissona są szczególnym przypadkiem procesów liczących. W kontekście teorii kolejek, za pomocą procesów Poissona modelowane są strumienie zgłoszeń, gdzie zdarzenia nazywane są zgłoszeniami/pakietami/zadaniami, natomiast $\frac{1}{\alpha}$ określa średni czas pomiędzy następującymi po sobie wpływami zgłoszeń do systemu. Przez N_t oznaczana jest liczba zdarzeń, które zaszły do chwili t z prawdopodobieństwem

$$\mathbf{P}\{N_t = k\} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}. \tag{A.2.4}$$

Procesy Poissona charakteryzują się własnością braku pamięci. Ponadto, jeśli przez Y_n oznaczymy zmienną losową opisującą moment zajścia n-tego zdarzenia, wówczas można zauważyć następującą równoważność

$$\{N_t \geq n\} \equiv \{Y_n \leq t\}. \tag{A.2.5}$$

Ponadto, Y_n mają rozkład Erlanga z parametrami $k = n$ i $\alpha = \lambda$, stąd gęstość rozkładu prawdopodobieństwa czasu zajścia n-tego zdarzenia ma postać

$$f_{Y_n}(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \ t \geq 0. \tag{A.2.6}$$

A.2.3. Złożony proces Poissona

Niech $\{N_t, t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona oraz niech $\{\alpha_k, k = 1, 2, 3, ...\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwach opisanych przez

$$p_i = \mathbf{P}\{\alpha_k = i\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{A.2.7}$$

Rozkład prawdopodobieństwa N_t wyraża się wzorem

$$\mathbf{P}\{N_t = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{i} \alpha_j = k\right\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} p_k^{i*}, \tag{A.2.8}$$

gdzie p_k^{i*} jest i-krotnym splotem ciągu p_k A.5.8. Podobnie jak w przypadku zwykłych procesów Poissona, przez Y_n można określić moment zajścia n-tego zdarzenia. Funkcja gęstości czasu zajścia n-tego zdarzenia jest wyrażona w postaci

$$f_{Y_n}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda^i t^{i-1}}{(i-1)!} c_{k,i}, \ t \geq 0, \tag{A.2.9}$$

gdzie

$$c_{k,i} = \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j < k \leq \sum_{j=1}^{i} \alpha_j\right\} = \sum_{m=0}^{k-1} \left(p_m^{(i-1)*} - p_m^{i*}\right). \tag{A.2.10}$$

Podobnie jak procesy Poissona, złożone procesy Poissona charakteryzują się również własnością braku pamięci.

W teorii kolejek, złożone procesy Poissona wykorzystywane są do modelowania rozmiarów wpływających do systemu partii pakietów, tzn. α_n jest zmienną losową opisującą rozmiar grupy pakietów wpływających do systemu.

A.2.4. Proces Markowa

Procesem Markowa nazywamy proces stochastyczny $\{X_t, t \geq 0\}$ spełniający własność Markowa, tzn.

$$\forall h > 0 \quad \mathbf{P}\{X_{t+h} \leq x | \{\forall s \leq t \, X_s = x_s\}\} = \mathbf{P}\{X_{t+h} \leq x | X_t = x_t\}. \tag{A.2.11}$$

Własność Markowa określana jest również własnością braku pamięci. W przypadku, gdy prawdopodobieństwa (A.2.11) nie zależą od t, wówczas proces Markowa nazywany jest jednorodnym, natomiast warunek (A.2.11) można zapisać w postaci

$$\forall t, h > 0 \quad \mathbf{P}\{X_{t+h} \leq x | X_t = y\} = \mathbf{P}\{X_h \leq x | X_0 = y\}. \tag{A.2.12}$$

Procesy Markowa z czasem dyskretnym nazywane są łańcuchami Makrowa. Innymi słowy, łańcuchem Markowa nazywamy dyskretny proces stochastyczny $\{X_n, n \in N\}$, gdzie $N \subseteq \mathbb{N}$, taki że

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} \leq x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\} = \mathbf{P}\{X_{n+1} \leq x | X_n = x_n\}. \tag{A.2.13}$$

Podobnie jak w przypadku procesów z czasem ciągłym, jeśli prawdopodobieństwa (A.2.13) nie zależą od n wówczas proces nazywany jest jednorodnym, natomiast warunek (A.2.13) można sprowadzić do postaci

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} \leq x | X_n = y\} = \mathbf{P}\{X_1 \leq x | X_0 = y\}. \tag{A.2.14}$$

Wartości zmiennych losowych X_i nazywane są stanami i tworzą przestrzeń stanów S łańcucha Markowa. Jedną z reprezentacji jednorodnych łańcuchów Markowa jest para (π, P), gdzie π jest wektorem początkowym będącym rozkładem zmiennej losowej X_0, natomiast P jest macierzą stochastyczną nazywaną również macierzą przejść o wartościach $p_{i,j} = \mathbf{P}\{X_j = x_j | X_i = x_i\}$. W przypadku jednorodnych łańcuchów Markowa, jeśli spełniony jest warunek

$$\pi \mathrm{P} = \pi, \tag{A.2.15}$$

wówczas mówimy, że π jest rozkładem stacjonarnym. Na postawie równania Chapmana-Kołmogorowa, prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w n krokach ma postać

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \tag{A.2.16}$$

gdzie $I = \{i : x_i \in S\}$.

Rozważmy proces Markowa $\{X_t, t \geq 0\}$. Niech τ_n będzie oznaczać czas, w którym nastąpiła n-ta zmiana stanu procesu X_t. Wówczas, $\{X_n^{(e)}, n = 1, 2, ...\}$, gdzie $X_i^{(e)} = X_{\tau_i}$ jest łańcuchem Markowa z czasem dyskretnym nazywanym włożonym łańcuchem Markowa.

A.3. Całka Riemanna-Stieltjesa

Niech $P : a < x_0 < x_1 < \cdots x_n = b$ będzie podziałem domkniętego przedziału $[a, b]$ na n rozłącznych przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$. Dla punktów pośrednich $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ oraz funkcji f, g zdefiniujmy sumę aproksymacyjną w postaci

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right). \tag{A.3.1}$$

Jeśli dla każdego podziału $P_k : a = x_0^k < x_1^k < \cdots x_n^k = b$ spełniającego warunek

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} |x_i^k - x_{i-1}^k| = 0 \tag{A.3.2}$$

ciąg sum

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^k)(g(x_i^k) - g(x_{i-1}^k)), \tag{A.3.3}$$

jest zbieżny do I, przy założeniu, że $x_{i-1}^k \leq \xi_i^k \leq x_i^k$, wówczas granica I oznaczana jest przez

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) \tag{A.3.4}$$

oraz nazywana jest całką Riemanna-Stieltjesa funkcji f względem funkcji g na przedziale $[a, b]$

Całka Riemanna-Stieltjesa spełnia następujące własności, przy założeniu, że istnieje dla funkcji f, f_1, f_2, g, g_1, g_2.

- $\int_a^b \mathrm{d}g(x) = g(b) - g(a)$.
- Jeżeli $g(x) = C$, wówczas $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$.
- Dla każdego $a < c < b$ zachodzi następująca równość
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$
- Dla dowolnych stałych C_1, C_2 zachodzi równość
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)) = C_1 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_1(x) + C_2 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_2(x).$$
oraz
$$\int_a^b (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))\,\mathrm{d}g(x) = C_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}g(x) + C_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}g(x).$$
- Jeśli g jest funkcją różniczkowalną na $[a, b]$, wówczas
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

A.4. Transformata Laplace'a

Transformatą Laplace'a funkcji $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywana jest funkcja $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określona w postaci

$$\tilde{f}(s) = \mathscr{L}[F(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} F(t)\,\mathrm{d}t, \tag{A.4.1}$$

dla $\mathrm{Re}(s) > 0$. W ogólnym przypadku całka występująca z prawej strony powyższego równia nie musi być zbieżna. Warunek konieczny istnienia transformaty Laplace'a wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie A.4.1 *Jeśli funkcja F spełnia warunki:*

(1) $F(t) = 0$ dla $t < 0$;

(2) funkcja F jest ograniczona na każdym domkniętym przedziale $[0, T]$, $T > 0$;

(3) istnieje $M > 0$ oraz $a \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $t \geq 0$ zachodzi

$$|F(t)| \leq M\mathrm{e}^{at}; \tag{A.4.2}$$

wówczas transformata Laplace'a $\tilde{f}$ zdefiniowana w A.4.1 istnieje dla każdego s, takiego że $\mathrm{Re}(s) > a$.

Transformata Laplace'a jest operacją liniową, tzn. jeśli istnieje $\tilde{f}(s) = \mathscr{L}[F(t)]$ oraz $\tilde{g}(s) = \mathscr{L}[G(t)]$, wówczas dla dowolnych stałych C_1, C_2 zachodzi

$$\mathscr{L}[C_1 F(t) + C_2 G(t)](s) = C_1 \tilde{f}(s) + C_2 \tilde{g}(s). \tag{A.4.3}$$

Niech splot funkcji F i G jest zdefiniowany w postaci

$$F(t) * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y)G(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(t-y)\,\mathrm{d}y, \tag{A.4.4}$$

gdzie $t \geq 0$. Jeśli funkcje F i G są całkowalne na przedziale $(-\infty, \infty)$, wówczas transformata Laplace'a splotu $F(t) * G(t)$ jest wyrażana jako

$$\mathscr{L}[F(t) * G(t)](s) = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s). \tag{A.4.5}$$

W ogólności zachodzi równanie

$$\mathscr{L}[F_1(t) * \cdots * F_n(t)](s) = \tilde{f}_1(s) ... \tilde{f}_n(s), \tag{A.4.6}$$

gdzie $\tilde{f}_i(s) = \mathscr{L}[F_i(t)]$ dla $0 \leq i \leq n$.

Ponadto, należy zwrócić uwagę na własności graniczne transformaty Laplace'a w postaci

$$F(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\tilde{f}(s) \tag{A.4.7}$$

oraz

$$F(\infty) = \lim_{s \to 0} s\tilde{f}(s). \tag{A.4.8}$$

A.5. Transformata Laplace'a-Stieltjesa

Uogólnieniem transformaty Laplace'a jest transformata Laplace'a-Stieltjesa, która jest zdefiniowana w postaci

$$\hat{f}(s) = \mathscr{L}\mathscr{S}[F(t)](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}F(t), \tag{A.5.1}$$

gdzie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{Re}(s) > 0$. Jeśli dla funkcji F spełnione są założenia z twierdzenia (sekcja A.4.1), wówczas istnieje transformata $\hat{f}(s)$ funkcji F oraz spełniona jest równość

$$\hat{f}(s) = s\tilde{f}(s) - F(0), \tag{A.5.2}$$

gdzie $\tilde{f}(s) = \mathscr{L}[F(t)](s)$.

Transformata Laplace'a-Stieltjesa ma wiele zastosowań w teorii prawdopodobieństwa, m.in.:

- Jeśli F jest dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, wówczas
$$\mathscr{L}\mathscr{S}[F(t)](s) = \mathscr{L}[f(t)], \tag{A.5.3}$$
gdzie $f(t)$ jest gęstością zmiennej X, co wynika z faktu, że
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}F(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}F'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{A.5.4}$$

- Momenty rozkładu określonego dystrybuantą F można wyznaczyć bezpośrednio w następujący sposób
$$\int_0^\infty t^n\,\mathrm{d}F(t) = (-1)^n \left(\frac{\partial^n \mathscr{L}\mathscr{S}[F(t)](s)}{\partial s^n}\right)\Bigg|_{s=0} \tag{A.5.5}$$

- Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o dystrybuantach $F_1, F_2, ..., F_n$. Wówczas dystrybuanta F zmiennej losowej $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ma postać
$$F(t) = F_1(t) * F_2(t) * \cdots * F_n(t), \tag{A.5.6}$$
gdzie $*$ jest splotem Laplace'a-Stieltjesa [179, 180], który dla dowolnych funkcji F i G ma postać
$$F(t) * G(t) = \int_{-\infty}^\infty G(t-x)\,\mathrm{d}F(x). \tag{A.5.7}$$

- Ponadto, n-krotnym splotem Laplace'a-Stieltjesa funkcji F nazywamy funkcję $F^{n*}(t) = \underbrace{F(t) * \cdots * F(t)}_{n}$, tzn.
$$F^{n*}(t) = \begin{cases} F(t), & n = 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^\infty F^{(n-1)*}(t-x)\,\mathrm{d}F(x), & n > 1, \end{cases} \tag{A.5.8}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Jeśli nośnikiem F jest $[0, \infty)$, wówczas całkę w $(A.5.8)$ można zapisać w postaci

$$\int_0^t F^{(n-1)*}(t-x)\,\mathrm{d}F(x). \tag{A.5.9}$$

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach prawdopodobieństwa F, wówczas F^{n*} jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa sumy $X_1, X_2, ..., X_n$, tzn.

$$F^{n*}(t) = \mathbf{P}\{X_1 + X_2 + \cdots X_n \leq t\}, \;\; t \in \mathbb{R}. \tag{A.5.10}$$

Uwaga Podobna własność występuje w przypadku dyskretnych zmiennych losowych $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ o identycznych rozkładach prawdopodobieństwa w postaci $p_i = \mathbf{P}\{Y_k = i\}$. Analogicznie

$$p_i^{n*} = \mathbf{P}\{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = i\}, \tag{A.5.11}$$

gdzie p_i^{n*} jest n-krotnym splotem dyskretnym rozkładu p_i w postaci

$$p_0^{0*} = 1, \quad p_i^{j*} = \sum_{r=0}^{i} p_r^{(j-1)*} p_i^r, \quad j \geq 1. \tag{A.5.12}$$

- Jeśli X_1, X_2 będą zmiennymi losowymi odpowiednio z rozkładami opisanymi dystrybuantami F_1, F_2 oraz F będzie splotem Laplace'a-Stieltjesa F_1, F_2, wówczas

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-sX_1}] = \mathscr{L}\mathscr{S}[F_1(t)](s), \quad \mathbf{E}[\mathrm{e}^{-sX_2}] = \mathscr{L}\mathscr{S}[F_2(t)](s). \tag{A.5.13}$$

Ponadto

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-s(X_1+X_2)}] = \mathscr{L}\mathscr{S}[F_1(t)](s)\mathscr{L}\mathscr{S}[F_2(t)](s) = \mathscr{L}\mathscr{S}[F(t)](s). \tag{A.5.14}$$

A.6. Numeryczne odwracanie transformaty Laplace'a

Z równości A.5.3 wynika, że istnieje relacja pomiędzy transformatami Laplace'a i Laplace'a-Stieltjesa funkcji F. Stąd poniższy algorytm może być wykorzystywany zarówno do odwracania transformaty Laplace'a, jak również transformaty Laplace'a-Stieltjesa.

Przedstawiony poniżej numeryczny algorytm odwracania transformaty Laplace'a oparty jest na wzorze całkowym Bromwicha przedstawionym w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie A.6.1 ([177]) *Niech $\tilde{f}$ będzie transformatą Laplace'a funkcji F, wówczas F może być wyrażona w postaci*

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{st} \tilde{f}(s)\,\mathrm{d}s, \;\; t > 0, \tag{A.6.1}$$

gdzie $b > \mathrm{Re}(s^*)$ dla wszystkich punktów osobliwych $s^* \in \mathbb{C}$ funkcji $\tilde{f}$.

Całkę A.6.1 można aproksymować za pomocą metody trapezów w postaci

$$F(t) \approx F_h(t) \equiv \frac{h\mathrm{e}^{bt}}{\pi}\mathrm{Re}(\tilde{f}(b)) + \frac{2h\mathrm{e}^{bt}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(\tilde{f}(b+\mathrm{i}kh))\cos(kht). \tag{A.6.2}$$

Ustalając $h = \pi/lt$ oraz $b = A/2lt$, formuła A.6.2 można być zapisana w następujący sposób

$$F_h(t) \equiv F_{A,l}(t) = \frac{\mathrm{e}^{A/2lt}}{lt} + \frac{2\mathrm{e}^{A/2lt}}{lt}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}\left(\frac{A}{2lt} + \frac{\mathrm{i}k\pi}{lt}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/l}. \tag{A.6.3}$$

Za pomocą operacji algebraicznych $f_{A,l}$ można doprowadzić do postaci

$$F_{A,l}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k(t), \tag{A.6.4}$$

gdzie

$$a_k(t) = \frac{\mathrm{e}^{A/2l}}{2lt}b_k(t), \quad k \geq 0, \tag{A.6.5}$$

$$b_0(t) = \tilde{f}\left(\frac{A}{2lt}\right) + 2\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Re}\left(\tilde{f}\left(\frac{A}{2lt} + \frac{\mathrm{i}j\pi}{lt}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi/l}\right) \tag{A.6.6}$$

i

$$b_k(t) = 2\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Re}\left(\tilde{f}\left(\frac{A}{2lt} + \frac{\mathrm{i}j\pi}{lt} + \frac{\mathrm{i}k\pi}{t}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi/l}\right), \quad k \geq 1. \tag{A.6.7}$$

Korzystając z wzoru sumacyjnego Eulera, można aproksymować formułę A.6.4 za pomocą skończonego szeregu, w wyniku czego otrzymujemy

$$F(t) \approx \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{-m}\sum_{j=0}^{n+k}(-1)^j a_j(t), \tag{A.6.8}$$

gdzie m, n, A, l są liczbami naturalnymi. Ponadto, przyjmuje się, że typowe wartości tych parametrów są następujące $m = 11$, $n = 38$, $A = 19$ i $l = 1$.

Czynnik $\mathrm{e}^{A/2l}/2lt$ w definicji składnika $a_k(t)$ zbiega do nieskończoności, gdy t zbiega do 0. Stąd algorytm nie powinien być stosowany w przypadku małych wartości t. Niemniej jednak wartość $F(t)$ dla $t \to 0$ można aproksymować korzystając z własności granicznych transformaty Laplace'a A.4.7.

A.7. Funkcja tworząca

Funkcja tworząca dla ciągu liczb rzeczywistych $\mathrm{a} = (a_n)$ jest zdefiniowana w postaci szeregu funkcyjnego o zmiennej rzeczywistej lub zespolonej, wyrażonego następująco

$$G_{\mathrm{a}}(z) = \sum_{i=0}^{\infty}a_i z^i. \tag{A.7.1}$$

Powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < r$, gdzie r jest promieniem zbieżności określonym wzorem $r = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}$.

Niech X będzie dyskretną zmienną losową z rozkładem prawdopodobieństwa $p_i = \mathbf{P}\{X = i\}$, $i \geq 0$,, wówczas funkcją tworzącą prawdopodobieństwa zmiennej X nazywamy szereg

$$G_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i. \tag{A.7.2}$$

Szereg G jest bezwzględnie zbieżny dla co najmniej wszystkich $z \in \mathbb{C}$ takich, że $|z| \leq 1$, co wynika z faktu, że $G_X(1) = 1$.

Funkcja tworząca rozkładu prawdopodobieństwa ma następujące własności:

- Dla zmiennej losowej X spełniona jest równość

$$G_X(z) = \mathbf{E}[z^X]. \tag{A.7.3}$$

- Prawdopodobieństwa p_k zmiennej losowej X mogą być uzyskiwane na podstawie G_X poprzez wyznaczanie jej pochodnej, tzn.

$$p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}. \tag{A.7.4}$$

  Każdy dyskretny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej jest jednoznacznie wyznaczony przez jego funkcję tworzącą.

- Istnieje relacja pomiędzy funkcją tworzącą rozkładu prawdopodobieństwa oraz funkcją tworzącą momenty w postaci

$$G_X(\mathrm{e}^t) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{tX}] = 1 + \mathbf{E}[X] + \frac{t^2\mathbf{E}[X^2]}{2!} + \frac{t^3\mathbf{E}[X^3]}{3!} + \cdots \tag{A.7.5}$$

- Wartość oczekiwaną zmiennej losowej X można przedstawić w postaci

$$\mathbf{E}[X] = \left.\frac{\partial G_X(z)}{\partial z}\right|_{z=1} \tag{A.7.6}$$

A.8. Numeryczne odwracanie funkcji tworzących

Wyznaczanie rozkładów prawdopodobieństwa na podstawie funkcji tworzących prawdopodobieństwa może się odbywać poprzez wielokrotne wyznaczanie pochodnych tych funkcji oraz obliczanie ich wartości w punkcie $z = 0$ według formuły (A.7.4). Niemniej jednak, czasami mogą się pojawić trudności związane z numerycznym, czy też symbolicznym różniczkowaniem. W [177] zaproponowano metodę odwracania funkcji tworzącej opartą na wzorze całkowym Cauchy'ego oraz całkowaniu opartym o metodę trapezów.

Podobnie, jak w przypadku transformaty Laplace'a, numeryczne odwracanie funkcji tworzących może być zrealizowane poprzez wyznaczanie wartości pewnej całki, z tą różnicą, że w tym przypadku zamiast całki Bromwicha rozpatrywana jest całka Cauchy'ego.

Twierdzenie A.8.1 ([177]) *Niech (q_i) będzie ciągiem liczb zespolonych spełniających warunek $|q_k| \leq Kb^k$ dla wszystkich $k \geq 1$ oraz dodatnich stałych K i b. Wówczas*

$$\begin{aligned} q_k =& \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{G(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \\ =& \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} G(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku} \, \mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{A.8.1}$$

gdzie $G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i$, natomiast Γ jest domkniętą krzywą całkowania w postaci okręgu o promieniu r mniejszym od promienia zbieżności $\frac{1}{b}$

Twierdzenie A.8.2 ([177]) *Zgodnie z założeniami twierdzenia A.8.1, dla $0 < r < \frac{1}{b}$ i $k \geq 1$ elementy q_k wyrażone w postaci*

$$q_k = q_k^a - e_a \tag{A.8.2}$$

można aproksymować za pomocą metody trapezów w następujący sposób

$$q_k^a = \frac{1}{2klr^k} \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j a_j(k,l,r) \tag{A.8.3}$$

gdzie

$$a_j(k,l,r) = \sum_{j_1=0}^{l-1} \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} j_1/l} G(r\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(j_1+lj)/lk}), \ 1 \leq j \leq 2k, \tag{A.8.4}$$

natomiast e_a jest błędem aproksymacji zadanym wzorem

$$e_a = \sum_{j=1}^{\infty} q_{k(1+2jl)} r^{2jkl}. \tag{A.8.5}$$

Wyrażenie (A.8.3) może zostać sprowadzone do postaci

$$\begin{aligned} q_k^a =& \frac{1}{2klr^k} \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \mathrm{Re}\Big(a_j(k,l,r)\Big) \\ =& \frac{1}{2klr^k} \left(a_0(k,l,r) + (-1)^k a_k(k,l,r) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \mathrm{Re}\Big(a_j(k,l,r)\Big) \right). \end{aligned} \tag{A.8.6}$$

Jeśli warunek $|q_n| \leq C$ jest spełniony dla dowolnego $n \geq (1+2l)k$, wówczas

$$|e_a| \leq \sum_{j=1}^{\infty} Cr^{2jkl} \leq \frac{Cr^{2kl}}{1 - r^{2kl}}, \tag{A.8.7}$$

co może być aproksymowane przez Cr^{2kl}, kiedy r^{2kl} jest dostatecznie małe. Dla $C = 1$ oraz ustalonego $r = 10^{-\eta/2kl}$, uzyskujemy błąd aproksymacji rzędu $10^{-\eta}$. Zazwyczaj przyjmuje się, że $\eta = 8$ oraz $l = 1$, stąd otrzymujemy $r = 10^{-4/k}$.

A.9. Teoria potencjału błądzenia losowego

Idea potencjału ciągłego błądzenia losowego została przedstawiona w pracy [149], a następnie rozwinięta w [178]. Na jej podstawie możliwe jest wyznaczenie rozwiązań układów równań opisujących systemy kolejkowe. Przedstawione poniżej rozważania wielokrotnie są wykorzystywane w głównej części rozprawy.

Rozważmy dyskretne błądzenie losowe Y_n w następującej postaci

$$Y_0 = 0,\ Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n = 1, 2, ..., \tag{A.9.1}$$

gdzie X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach prawdopodobieństwa $r_k = \mathbf{P}\{X_n = k\}$ dla $k = -1, 0, 1, ...$ oraz $r_{-1} > 0$. Proces Y_n zachowuje się podobnie jak proces stochastyczny określający liczbę pakietów w systemie kolejkowym.

Ciąg (R_k) spełniający warunek

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta^k R_k = \frac{1}{P(\theta) - 1},\ |\theta| < 1, \tag{A.9.2}$$

gdzie

$$P(\theta) = \sum_{k=-1}^{\infty} \theta^k r_k \tag{A.9.3}$$

jest funkcją tworzącą prawdopodobieństwa (r_k), nazywamy potencjałem błądzenia losowego Y_n lub potencjałem ciągu (r_n). Zatem potencjał (R_k) ciągu (r_k) jest ciągiem, którego funkcja tworząca może być zapisana za pomocą funkcji tworzącej ciągu (r_k).

Twierdzenie A.9.1 *Rozważmy ciągi liczb (α_k), $k \geq 0$, gdzie $\alpha_0 \neq 0$ oraz (ψ_k), $k \geq 1$. Każde rozwiązanie układu równań liniowych*

$$\sum_{k=-1}^{n} \alpha_{k+1} x_{n-k} - x_n = \psi_n, \qquad n \geq 0 \tag{A.9.4}$$

można zapisać w postaci

$$x_n = C R_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} R_{n-k} \psi_k, \qquad n \geq 0, \tag{A.9.5}$$

gdzie C jest stałą niezależną od n, natomiast (R_k) jest potencjałem ciągu (α_k), tzn.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k R_k = \frac{1}{P_\alpha(\theta) - 1}, \qquad P_\alpha(\theta) = \sum_{k=-1}^{\infty} \theta^k \alpha_{k+1}, \qquad |\theta| < 1. \tag{A.9.6}$$

Ponadto, wyrazy ciągu (R_k) mogą być wyznaczone rekurencyjnie w następujący sposób

$$R_0 = 0,\ R_1 = \alpha^{-1},\ R_{k+1} = \alpha^{-1} \left(R_k - \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i+1} R_{k-i} \right),\ k \geq 1. \tag{A.9.7}$$

Dodatek B

Narzędzia symulacyjne

B.1. Symulator zdarzeń dyskretnych dla systemów typu $M/G/1/K$ z N-progową i probabilistyczną dyscypliną wybudzania

Poniżej został podany kod źródłowy programu napisanego w języku `Python 3.4` z wykorzystaniem pakietu `SimPy 3.0.7`. Za pomocą niniejszego programu możliwa jest symulacja zachowania systemów kolejkowych $G/G/1/K$ zarówno z N-progową, jak i probabilistyczną dyscypliną wybudzania. Ponadto, możliwe jest przeprowadzenie symulacji w przypadku, gdy obie dyscypliny są stosowane w jednym modelu.

```
import simpy #biblioteka pakietu SimPy

class Packet(object):
    """
    Klasa reprezentująca wpływający do systemu pakiet
    """
    def __init__(self, time, size, id):
        """
        Opis parametrów
            time - czas wpływu pakietu do systemu
            size - rozmiar pakietu
            id - identyfikator pakietu
        """
        self.time = time
        self.size = size
        self.id = id
```

```
    def __repr__(self):
        return "id: {}, time: {}, size: {}".\
            format(self.id, self.time, self.size)

class QueueModel:
    """
    Klasa odpowiedzialna za symulację kolejkowania
    """
    def __init__(self,env,arrival_time, service_time,\
                 setup_time, packet_size, K=8, N=1,\
                 init_pkgs=0, initial_delay=0, debug=True):
        """
        Opis parametrów
            env           – obiekt z SimPy odpowiedzialny
                            za przeprowadzenie symulacji
            arrival_time  – funkcja próbkująca czas pomię-
                            dzy wpływami kolejnych pakietów
                            wg określonego rozkładu
                            prawdopodobieństwa
            service_time  – funkcja próbkująca czas pomię-
                            dzy obsługą kolejnych pakietów
                            wg określonego rozkładu
                            prawdopodobieństwa
            setup_time    – funkcja próbkująca czas opóź-
                            nienie kolejkowania wg proba-
                            bilistycznej dyscypliny prze-
                            stoju wg określonego rozkładu
                            prawdopodobieństwa
            packet_size   – funkcja zwracająca rozmiar
                            pakietu, może być losowy
            init_pkgs     – ilość pakietów w systemie
                            w chwili t=0
            K             – ilość miejsc w systemie
            N             – próg dyscypliny przestoju
            initial_delay – opóźnienie kolejkowania bez-
                            pośrednio po rozpoczęciu
                            pracy systemu
            debug         – umożliwia śledzenie wpływów
                            pakietów i ich obsługę w czasie
        """
```

```
        self.env = env
        self.arrival_time = arrival_time
        self.service_time = service_time
        self.setup_time = setup_time
        self.packet_size = packet_size
        self.K = K
        self.N = N
        self.init_pkgs = init_pkgs
        self.initial_delay = initial_delay
        self.debug = debug

        # liczba wszystkich pakietów,
        # które przybyły do systemu
        self.arrived_pkgs = 0

        # liczba utraconych pakietów
        self.lost_pkgs = 0

        # liczba obsłużonych pakietów
        self.serviced_pkgs = 0

        # lista obsłużonych pakietów w zależności
        # od czasu
        self.departured_packets = []

        # lista czasów
        # dla departured_packets
        self.departured_packets_time = []

        # lista z opóźnieniem
        # kolejkowania
        self.queuing_delay = []

        # lista czasów
        # dla queuing_delay
        self.queuing_delay_time = []

        # lista z liczbą pakietów
        # w systemie w zależności od czasu
        self.pkgs_in_sys = []
```

```
        # lista czasów dla pkgs_in_sys
        self.pkgs_in_sys_time = []

        # bufor systemu
        self.queue = simpy.Store(self.env)

        # zdarzenie wykorzystywane
        # przy N-progowym wybudzaniu serwera
        self.waiting_for_packets = env.event()

        if self.init_pkgs > 0:
            for i in range(self.init_pkgs):
                p = Packet(self.env.now,\
                           self.packet_size(),i+1)
                self.queue.put(p)

        self.pkgs_in_sys.append(self.init_pkgs)
        self.pkgs_in_sys_time.append(0)

        self.ser = self.env.process(self.service())
        self.arr = self.env.process(self.arrival())

    def ql(self):
        """
        Metoda zwracająca aktualną liczbę
        pakietów w systemie
        """
        return (self.pkgs_in_sys[-1])
    def arrival(self):
        """
        Metoda realizująca wpływ pakietów do systemu
        """

        # początkowe opóźnienie kolejkowania
        yield self.env.timeout(self.initial_delay)
        while True:
            arr_time = self.arrival_time()

            # oczekiwanie na wpłynięcie pakietu do systemu
```

```
            yield self.env.timeout(arr_time)

            self.arrived_pkgs += 1
            p = Packet(self.env.now,
                       self.packet_size(),\
                       self.arrived_pkgs+self.init_pkgs)

            if self.ql() < self.K:
                # jeśli w systemie są wolne miejsca
                # wówczas pakiet zostaje dodany
                # do bufora systemu
                yield self.queue.put(p)

                self.pkgs_in_sys.append(
                    self.pkgs_in_sys[-1]+1)
                self.pkgs_in_sys_time.append(self.env.now)

                if self.debug:
                    print("Packet arrival id: ",p.id,\
                          " ", self.env.now, " ",\
                          self.ql())

                if self.ql() >= self.N and\
                        self.waiting_for_packets.processed\
                                == False:

                    # inicjacja rozpoczęcia okresu
                    # obsługi zgłoszeń
                    self.waiting_for_packets.succeed()
                    self.waiting_for_packets =\
                        self.env.event()
            else:
                # pakiet zostaje utracony jeśli
                # w systemie nie ma wolnych miejsc
                self.queuing_delay.append(0)
                self.queuing_delay_time.append(p.time)

                if self.debug:
                    print("Packet lost id: ",p.id, " ",\
                          self.env.now, " ", self.ql())
```

```
            self.lost_pkgs += 1

    def service(self):
        """
        Metoda realizująca obsługę pakietów
        """
        while True:
            # oczekiwanie na odpowiednie
            # nasycenie bufora systemu
            yield self.waiting_for_packets

            # probabilistyczna dyscyplina przestoju
            yield self.env.timeout(self.setup_time())

            while self.ql() > 0:
                # pakiet zostaje zdjęty z bufora
                # i przekazany do serwera
                itm = yield self.queue.get()

                if self.debug:
                    print("Packet sent to service  ",\
                          itm.id, " ",self.env.now,\
                          " ", len(self.queue.items),\
                          self.env.now - itm.time)

                self.queuing_delay.append(
                    self.env.now - itm.time)
                self.queuing_delay_time.append(itm.time)

                ser_time = self.service_time()

                # obsługa pakietu
                yield self.env.timeout(ser_time)

                self.pkgs_in_sys.append(
                    self.pkgs_in_sys[-1]-1)
                self.pkgs_in_sys_time.append(
                    self.env.now)
                self.serviced_pkgs += 1
```

```
                self.departured_packets.append(
                    self.serviced_pkgs)
                self.departured_packets_time.append(
                    self.env.now)

                if self.debug:
                    print("Packet serviced  id: ",
                          itm.id, " ", self.env.now,\
                          " ", self.ql())

if __name__ == "__main__":
    import random

    env = simpy.Environment()

    lam = 150
    mu = 250
    gam = 300

    arrival_dist = lambda: random.expovariate(lam)
    service_dist = lambda: random.expovariate(mu)
    setup_time = lambda: random.expovariate(gam)
    packet_size = lambda : 1

    init_pkg_sys = 0
    init_delay = 0
    K = 6
    N = 2

    model = QueueModel(env, arrival_dist,
                       service_dist, setup_time,
                       packet_size, K, N,
                       init_pkg_sys, init_delay,
                       debug=True)
    env.run(until=1.0)
```

Indeks

Abstract

The subject of the dissertation refers to studies over concepts derived from queuing theory. In particular, presented research results are related with analysis of queuing models, which can be applied in computer networks and telecommunication. Nowadays, queuing theory is utilized for ensuring the relevant quality of service in various areas of telecommunication. Precise modelling of network traffic has important impact in designing of a network devices in terms of their performance or costs of production. As an example, we can consider a spatially distributed autonomous sensors, which work together and form a network (wireless sensor network). Applications of wireless sensor networks in monitoring of different real-life phenomena, like air and water pollution, fire risk, road traffic, military operations and many others are common nowadays. Sensors (nodes), typically equipped with a non-rechargable battery, are often located in hardly accessible places in which their eventual replacement with new ones can be difficult. In the context of queuing theory, the problem of power saving in wireless sensor networks is intensively explored.

This doctoral thesis contains stochastic analysis of queuing models with wake up mechanisms of the server such as threshold policy and setup times. Presented research results concern of effective and precise modelling of network traffic in network devices with limited access to server arising from applied power saving mechanism or physical features of servers. In particular, detailed transient characterizations of queue size, virtual waiting time and departure process in a single-server finite-buffer models with N-policy and generally distributed server setup times was described. Presented results concern of simple and compound Poisson arrival process.

In the considered queueing models, utilizing analytical approach based on the technique of embedded Markov chains, potential of random walks, continuous total probability law, renewal theory and linear algebra, compact-forms of representation for the Laplace transform and generating function of Laplace transform of transient distributions was found. Applied research methodology allows to determining a transient behaviour and a steady state of considered systems. Numerical tractability of the formulas is visualized in network-motivated numerical examples.

Streszczenie

Tematyka rozprawy wpisuje się w nurt badań nad zagadnieniami pochodzącymi z teorii kolejek, z akcentem na analizę modeli kolejkowych znajdujących zastosowanie w sieciach komputerowych oraz telekomunikacji. Teoria kolejek obecnie jest wykorzystywana m.in. do zapewnienia odpowiednich wymogów jakościowych różnego rodzaju usług telekomunikacyjnych, co stanowi motywację do prowadzenia badań na tej płaszczyźnie. Precyzyjne modelowanie kolejkowania ruchu sieciowego ma istotny wpływ na projektowanie urządzeń sieciowych pod względem ich wydajności, kosztów produkcji i użytkowania. Przykładem mogą być bezprzewodowe sieci sensorowe zbudowane z przestrzennie rozproszonych czujników, które wykorzystywane są do monitorowania fizycznych i środowiskowych warunków takich jak ciśnienie, temperatura, wilgotność, czy też hałas. Ze względu na szeroki wachlarz zastosowań sieci sensorowych m.in. w monitorowaniu zanieczyszczenia powietrza, monitorowaniu natężenia ruchu drogowego, projektowaniu systemów detekcji pożarów itp., węzły sieci są często rozmieszczone w trudno dostępnych miejscach. Stąd wymiana ich źródeł zasilania jest problematyczna. Oszczędność energii w kontekście teorii kolejek jest w ostatnim czasie zagadnieniem intensywnie eksplorowanym.

W pracy doktorskiej zaprezentowano stochastyczną analizę modeli kolejkowych z mechanizmami wybudzania stanowiska obsługi. Przedstawione rezultaty badań dotyczą precyzyjnego i efektywnego modelowania ruchu pakietów w urządzeniach sieciowych z ograniczeniami w dostępie do stanowiska obsługi, które mogą wynikać m.in. z własności zastosowanych mechanizmów oszczędzania zużycia energii, czy fizycznych cech stanowiska obsługi, np. związanych z czasem osiągania przez stanowisko pełnej gotowości operacyjnej. W pracy szczegółowo zostały omówione tranzytywne charakterystyki długości kolejki, opóźnienia kolejkowania oraz procesu liczącego obsłużone zgłoszenia dla jednokanałowych modeli kolejkowych z poissonowskim strumieniem zgłoszeń, skończonym buforem oraz N-progową i probabilistyczną dyscypliną wybudzania serwera. Przedstawione rezultaty rozważań dotyczą kolejkowania procesów Poissona oraz złożonych procesów Poissona.

Do uzyskania wyników analitycznych wykorzystano metodologię opartą o włożone łańcuchy Makrowa, metodę potencjału błądzenia losowego, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym dla ciągłych zmiennych losowych oraz zagadnienia po-

chodzące z teorii prawdopodobieństwa, teorii odnowy oraz algebry liniowej. Wyniki badań mają postać zależnych od parametrów systemu transformat Laplace'a lub funkcji tworzących transformat Laplace'a odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa. Zastosowana w analizie systemów kolejkowych metodologia badawcza umożliwia charakterystykę ich pracy zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym.

Postać uzyskanych formuł umożliwia ich wykorzystanie do efektywnych obliczeń numerycznych, co zostało pokazane za pomocą licznych przykładów. Charakterystyki przykładowych systemów zostały poddane analizie wrażliwości na zmiany parametrów rozpatrywanych systemów.