ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: BUDOWNICTWO z. 60 Nr kol. 841

Czesław WOŹNIAK

Uniwersytet Warszawski

MATEMATYKA A FIZYCZNE TREŚCI MECHANIKI

Streszczenie. W wielu fizycznych teoriach współczesnej mechaniki możemy zaobserwować pewną nieadekwatność stosowanych pojęć i metod matematycznych do fizycznych treści teorii. Źródła tej nieadekwatności i możliwości jej usunięcia dyskutujemy w rozprawie.

1. WSTĘP

Słowo "mechanika" ma wiele znaczeń; zależą one od osoby, która je wypowiada. Pomińmy od razu znaczenia pokrewne napisowi "Zakłady Mechaniczne" i przyjmijmy, że mechanika to nauka dedukcyjna, w której narzędziem dedukcji jest matematyka. Dla inżyniera przedmiotem rozważań mechaniki są elementy obiektów inżynierskich. Dla matematyka to nauka inspirowana wprawdzie naukami przyrodniczymi, lecz sprowadzająca się do różnych działów geometrii lub analizy (mechanika racjonalna, [1]); przedmiotem rozważań są tu nie rzeczywiste ciała, lecz obiekty matematyczne (np. rozmaitości różniczkowe) nazywane tylko ciałami. Nasz punkt widzenia będzie bliższy podejściu inżynierskiemu; mechanikę będziemy traktować jako naukę, która metodami wyłącznie matematycznymi opisuje i bada pewne rzeczywiste, lecz makroskopowe obiekty i zjawiska. Gdy ruchy tych obiektów opisujemy ruchami punktów materialnych, to mechanika staje się klasycznym działem fizyki. W bardziej złożonych sytuacjach mieć będziemy do czynienia z takimi fizycznymi teoriami mechaniki, jak: liniowa teoria sprężystości, teoria plastycznego płynięcia, teoria termoplastyczności itp. Mówiąc ogólnie, fizyczna teoria mechaniki to odpowienia teoria (struktura) matematyczna (jako dział mechaniki racjonalnej) uzupełniona fizyczną interpretacją jej abstrakcyjnych obiektów (por. także [2]).

Celem rozprawy jest dyskusja na temat związku między fizyczną treścią a matematyczną strukturą mechaniki; pokażemy także, jaką rolę mogą tu odegrać pewne kierunki rozwoju współczesnej matematyki, takie jak alternatywna teoria mnogości [3] lub analiza niestandardowa [4, 5].

2. O ROLACH MATEMATYKI W MECHANICE

Akcentując znaczenie matematyki w fizycznych teoriach mechaniki (również w pewnych teoriach "inżynierskich" jak np. teorie płyt i powłok, teorie stanów granicznych etc.), mówimy niekiedy, że matematyka jest językiem mechaniki. Wydaje się, że matematyka odgrywa w mechanice co najmniej potrójną rolę.

Po pierwsze, aparat matematyczny służy do rozwiązywania tych zadań mechaniki, które już uprzednio zostały sformułowane w języku matematyki. Możemy mieć tu do czynienia z rozwiązaniem zadania bądź o znaczeniu aplikacyjnym (co interesuje inżyniera), bądź o znaczeniu poznawczym (interesującym bardziej fizyka).

Po drugie, sformułowane w języku matematyki teoria fizyczna może być badana metodami matematycznymi niezależnie od jej fizycznej treści. Badania takie prowadzą np. do twierdzeń o istnieniu formalnych rozwiązań zagadnień brzegowych [6]. Postępujemy więc tak jak w mechanice racjonalnej (tj. badającej obiekty matematyczne), gdzie stopień abstrakcji jest wyższy niż stopień abstrakcji fizycznych teorii mechaniki (tj.badających rzeczywiste obiekty makroskopowe).

Trzecia rola matematyki w mechanice to udział w tworzeniu samych teorii fizycznych (por. także [1], s. 106). Polega on na wyrażaniu pewnych treści (hipotez) fizycznych w matematycznej formie. Na tej drodze możemy np. formułować jedną teorię fizyczną, biorąc jako punkt wyjścia inną,bardziej sprawdzoną lub dokładniejszą, lecz mało dogodną do badania poszczególnych problemów. Mamy tu więc do czynienia z procesem abstrakcji, który nazywamy często "modelowaniem matematycznym" określonej klasy rzeczywistych obiektów bądź zjawisk fizycznych. Jest to możliwe, gdyż obiekty i zjawiska fizyczne mają "ograniczoną indywidualność", tj. tworzą gatunki dające się klasyfikować, a tym samym i opisywać w ramach teorii (por. [7], s. 95).

3. CZY MATEMATYKA JEST ADEKWATNA DO FIZYCZNYCH TREŚCI MECHANIKI?

Zgodnie z uwagami przedstawionymi we wstępie, każda fizyczna teoria mechaniki to pewna matematyczna struktura oraz reguły interpretacji, nadające elementom tej struktury określony sens fizyczny. Tym samym różne teorie fizyczne mogą mieć tę samą strukturę matematyczną, różniąc się jedynie regułami interpretacji fizycznej; fakt ten jest źródłem analogii matematycznych (np. znanych analogii w teorii skręcania sprężystych prętów pryzmatycznych). Fizyczna interpretacja matematycznych obiektów teorii daje możliwość doświadczalnej weryfikacji teorii (ocenę zakresu jej fizycznej stosowalności bądź przydatności) na drodze porównania rozwiązań teoretycznych z wynikami obserwacji lub eksperymentu. Sytuacja taka ma zwłaszcza miejsce, gdy struktura matematyczna teorii jest prosta, np. gdy mamy do czynienia z mechaniką punktu materialnego,sztywnej bryły, ze statyką bądź dynamiką budowli lub stereomechaniką techniczną. Jednakże aparat matematyczny wielu fizycznych teorii mechaniki (w tym także teorii "inżynierskich", jak różne teorie płyt i powłok) jest tak złożony i abstrakcyjny, że uzyskanie dobrej (tj. zgodnej z doświadczeniem bądź intuicję fizyczną) interpretacji wielu wyników teorii jest często bardzo trudne, jeżeli wręcz nie niemożliwe. Na przykład, w klasycznej teorii sprężystości dowodzi się, że pole przemieszczeń u(.), będące rozwiązaniem statycznego zagadnienia brzegowego, istnieje w przestrzeni $H^1(B)^3$; gdy ponadto wprowadzamy pewne ograniczenia dla pola naprężeń (zachodzi to np. dla materiałów wiotkich, tj. nie "przenoszących" ściskania),to pole przemieszczeń istnieje w przestrzeni $BD(B)^3$ (por. [8]).Pole przemieszczeń należące do tak abstrakcyjnych przestrzeni funkcyjnych mogą nie mieć jasnego sensu fizycznego (dają się jedynie dobrze aproksymować pewnymi polami mającymi taki sens). Również, pozostając w ramach klasycznej teorii sprężystości, materialne układy periodyczne (komórkowe) badamy na drodze homogenizacji, przechodząc formalnie z wymiarami komórek do zera; sens fizyczny takiego przejścia jest co najmniej niejasny z uwagi na konieczność przyjęcia zbieżności (zarówno silnej, jak i słabej) w przestrzeniach $Ho^1(B)^3$.

Wymienione przykłady (a także wiele innych, tu nie przytoczonych) prowadzą do wniosku, że konsekwentne stosowanie aparatu matematycznego nawet stosunkowo prostych teorii fizycznych mechaniki (jak klasyczna teoria sprężystości) często odsuwa nas dosyć daleko od intuicji fizycznych i doświadczenia. Widoczna staje się pewna nieadekwatność matematycznych struktur do fizycznych treści mechaniki. Wynika to z faktu, że aparat matematyczny stanowiący "język" mechaniki uniezależnia strukturę matematyczną teorii od jej fizycznych treści, wyprowadzając nas poza fizyczną teorię mechaniki (por. także [7], ss. 100-103). Nieadekwatność, o której mówimy, nie ma oczywiście większego znaczenia dla matematyka zajmującego się mechaniką racjonalną, tj. mechaniką będącą działem matematyki. Nie zauważa jej także zwykle inżynier zajmujący się mechaniką techniczną, któremu aparat matematyczny jest przydatny tylko wtedy, gdy prowadzi do efektywnych rezultatów (ilościowych lub jakościowych) o znaczeniu aplikacyjnym. Tym samym dla większości osób pracujących w dziedzinie mechaniki analizowanie związku między jej matematyczną a fizyczną strukturą nie wydaje się celowe. Problem ten jest jednak istotny, gdy zajmujemy się fizycznymi i matematycznymi podstawami mechaniki. Jest to bowiem problem zbliżenia matematyki i fizyki lub, mówiąc dokładniej, problem lepszego "dopasowania" matematycznych struktur do fizycznych zagadnień, które mamy badać w ramach mechaniki.

Pytania, na które zamierzamy dać (może niezbyt pełną) odpowiedź,brzmi: jak interpretować oraz jak usuwać istniejące nieadekwatności struktur matematycznych do sensu fizycznego różnych fizycznych teorii mechaniki? Wydaje się, że można tego dokonać dwoma sposobami:

1° przez sprowadzenie danej teorii fizycznej mechaniki do teorii bardziej podstawowej, której aparat matematyczny ma jasną interpretację fizyczną,

2° przez wprowadzenie do rozważań aparatu matematycznego bardziej adekwatnego do fizycznej treści teorii.

Jak dalej zobaczymy, realizacja obu powyżej sformułowanych zadań (które zresztą się nawzajem uzupełniają) wymaga zastosowania bardzo subtelnych i nawet trochę niezwykłych podejść matematycznych. Podejścia te, w sposób bardzo poglądowy i dostępny dla niespecjalistów w zakresie podstaw matematyki, przedstawimy w pozostałej części rozprawy.

Kończąc ten rozdział, wypada powrócić do tytułowego pytania. Odpowiedź na nie nie jest ani jednoznacznie pozytywna, ani jednoznacznie negatywna; powiemy "tak", myśląc o aplikacyjnej roli matematyki (rozwiązywanie zadań), powiemy "nie", gdy myślimy o podstawach mechaniki. W dalszym ciągu interesować nas będzie jednak tylko ten drugi punkt widzenia.

4. ALTERNATYWNA TEORIA MNOGOŚCI A FIZYCZNE PODSTAWY MECHANIKI

Nieadekwatność współczesnej matematyki do fizycznych podstaw mechaniki jest konsekwencją nieadekwatności matematyki do świata, w którym żyjemy (zakładając obiektywizm jego poznania). Jednym z jej źródeł jest aksjomat nieskończoności ("istnieje co najmniej jeden zbiór dający się wzajemnie jednoznacznie odwzorować na swój właściwy podzbiór"), gdyż nie potrafimy wskazać na jakikolwiek zbiór nieskończony w otaczającej nas materialnej rzeczywistości. Można także zauważyć, że nieadwkwatność matematyki do fizycznych treści mechaniki pojawić się może dopiero wtedy, gdy do opisu zjawisk i obiektów przyrody używamy zbiorów nieskończonych.

Próbą uniknięcia kontrowersji wynikających z aksjomatu istnienia zbioru nieskończonego, a zarazem próbą budowy matematyki na fenomenologicznych podstawach, jest alternatywna teoria mnogości [3]. Mamy w niej do czynienia wyłącznie ze zbiorami skończonymi, tworzącymi tzw. uniwersum zbiorów. Wprowadzamy następnie obiekty (klasy) o postaci $\{x: f(x)\}$, gdzie $f(x)$ jest własnością zbiorów x wziętych z uniwersum zbiorów. Nie każda klasa jest zbiorem (np. $V = \{x: x = x\}$ zbiorem nie jest). Wprowadzamy wreszcie obiekty zwane semizbiorami, będące klasami zawartymi w pewnym zbiorze (z uniwersum zbiorów): Z jest semizbiorem, gdy istnieje zbiór z taki, że $Z \subseteq z$. Podstawowy postulat alternatywnej teorii mnogości to postulat istnienia semizbioru nie będącego zbiorem (właściwego semizbioru).

Użyjemy alternatywnej teorii mnogości jako języka mechaniki. Niech "z" reprezentuje w mechanice (skończony) zbiór atomów tworzących określone środowisko, w którym żyjemy; zbiór taki zawsze istnieje, nawet gdy nie potrafimy go dokładnie wskazać (nie jest to potrzebne). Wyodrębnijmy ze środowiska rzeczywiste makroskopowe ciało B będące przedmiotem rozważań mechaniki. Niech f(x) będzie własnością "być atomem ciała B" (f(x) nie musi być formułą teoriomnogościową , por. [3]). Utwórzmy klasę $Z=\{x: f(x)\}$. Mamy wtedy $Z \subset z$, przy czym Z nie jest zbiorem, gdyż bez względu na dokładność pomiarów i obserwacji nie możemy np. podać liczby atomów ciała B jako obiektu makroskopowego. Tym samym każde ciało makroskopowe jest reprezentowane w mechanice (gdy jej językiem jest alternatywna teoria mnogości) nie zbiorem, lecz (właściwym) semizbiorem.

Powyższy przykład sugeruje, że alternatywna teoria mnogości może być bardziej adekwatna do fizycznych treści mechaniki niż aparat klasycznej matematyki. W ten sposób możemy dążyć do realizacji drugiego z zadań wymienionych na końcu poprzedniego rozdziału. Jak realizować pierwsze zadanie - powiemy poniżej.

5. ANALIZA NIESTANDARDOWA JAKO NARZĘDZIE MECHANIKI

Przedstawmy najpierw pewne idee analizy niestandardowej [4, 5]. Niech M będzie strukturą matematyczną, którą utożsamimy z klasyczną analizą matematyczną, L będzie językiem formalnym użytym do opisu M oraz K_0 zbiorem zdań języka L, prawdziwych w M. Mówimy wtedy, że M jest modelem dla K_0. Dowodzi się [4], że oprócz M istnieją tzw. niestandardowe modele dla K_0; model taki oznaczmy przez $^*M$. Każdemu obiektowi $x \in M$ odpowiada dokładnie jeden obiekt $^*x \in {}^*M$, przy czym gdy x jest zbiorem nieskończonym (i tylko wtedy), to $^*x$ zawiera elementy niestandardowe (tj. nie mające swoich "odpowiedników" w M). Tym samym zbiorowi liczb rzeczywistych R w M odpowiada w $^*M$ zbiór $^*R$, który prócz standardowych liczb rzeczywistych zawiera także liczby infinitezymalne (nieskończenie bliskie zeru) oraz liczby nieskończone. Podobnie zbiór liczb naturalnych $^*N$ w $^*M$ prócz standardowych liczb naturalnych zawiera także liczby naturalne nieskończone [4, 5].

Przejdźmy teraz do mechaniki, ograniczając się do rozpatrywania tylko newtonowskich skończonych układów punktów materialnych. Podstawą rozważań jest możliwość formalizacji mechaniki newtonowskiej, tj. przedstawienie jej w postaci zbioru zdań S języka L, przy czym $S \in K_0$. Każde zdanie z S jest prawdziwe tak w M, jak i w $^*M$; prócz modelu standardowego (w M) istnieje więc także niestandardowy model mechaniki Newtona (w $^*M$). W ramach tego modelu mamy do czynienia także z n-punktowymi układami, w których n jest liczbą naturalną nieskończoną (tj. większą od każdej standardowej liczby naturalnej). Zauważmy, że dla każdej takiej liczby n mamy $N \subset \{0,1,2,\ldots,n\}$. Zgodnie z terminologią alternatywnej teorii mnogości wszystkie standardowe liczby naturalne tworzą nie zbiór, lecz właściwy semizbiór N (w analizie niestandardowej N jest tzw. zbiorem zewnętrznym, tj. nie będącym obiektem struktury $^*M$ [4]).

Niech $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ będzie pewnym położeniem rozpatrywanego niestandardowego układu n punktów materialnych w przestrzeni $^*R^3$, $x_i \in {}^*R^3$, $i = 1,2,\ldots,n$. Załóżmy, że punkty standardowe przestrzeni R^3 (tj. punkty należące jednocześnie do R^3), które znajdują się nieskończenie blisko jakiegoś z punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (sformułowanie takie ma sens w R^3 z uwagi na istnienie w $^*R$ liczb infinitezymalnych), tworzą w R^3 domknięcie pewnego obszaru B (por. [4], s. 101). Mówiąc poglądowo, dzięki analizie niestandardowej możemy położenie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ układu n punktów materialnych (n – liczba naturalna niestandardowa) "obserwować" jako położenie w R^3 ośrodka ciągłego "wypełniającego" obszar B, przechodząc w prosty sposób od mechaniki newtonowskiej skończonych układów punktów materialnych (mającej jasny sens fizyczny) do pewnych teorii kontynualnych mechaniki, takich jak np. teoria sprężystości (por. [9]). Tą drogą możemy więc dążyć do realizacji pierwszego z zadań wymienionych na końcu rozdziału 3.

Na zakończenie zauważmy, że powyższe rozważania dotyczą tylko podstaw mechaniki. Nie mają one, jak na razie, widocznego wpływu na praktyczną działalność inżyniera, fizyka lub matematyka. Wydaje się jednak, że nieco szersze spojrzenie na mechanikę, wykraczające poza tę działalność, jest także warte uwagi.

LITERATURA

[1] Truesdell C.: Sześć wykładów nowoczesnej filozofii przyrody. PWN, Warszawa 1969.

[2] Giles R.: Mathematical foundations of thermodynamics. Pergamon Press, London 1955.

[3] Vopěnka P.: Mathematics in the alternative set theory. Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1979.

[4] Robinson A.: Non-Standard Analysis. North-Holland Publ., Comp., Amsterdam-London 1966.

[5] Lutz R., Goze M.: Nonstandard analysis. Lecture Notes in Mathematics; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg London 1981.

[6] Fichera G.: Existence theorems in elasticity. Handbuch der Physik, Band 6a/2; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972.

[7] Sławianowski J.J.: Przyczynowość w mechanice kwantowej. Biblioteka Wiedzy Współczesnej; Wiedza Powszechna, Warszawa 1969.

[8] Naniewicz Z.: Existence theorems in the theory of slender materials. Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. techn., w druku.

[9] Woźniak Cz.: On the nonstandard analysis and the interrelation between mechanics of mass-point systems and continuum mechanics. Mech. Teor. i Stos. 1981; nr 4, ss. 511-525.

МАТЕМАТИКА И ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МЕХАНИКИ

Р е з ю м е

Во многих физических теориях современной механики можно заметить некоторое несоответствие, применяемых математических понятий и методов физическому содержанию теорий. В данной роботе обсуждаются источники этого несоответствия а также возможность его устраненбя.

MATHEMATICS VERSUS PHYSICAL MEANING OF MECHANICS

S u m m a r y

In many physical theories of mechahics an unadequacy between the mathematical structure and the physical sense of the theory can be observed. The source of such unadequacy and the possibilities of its removal are discussed.