ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: BUDOWNICTWO z. 60 Nr kol. 841

Jan ZAMOROWSKI

MODEL KONTYNUALNO-DYSKRETNY W ZASTOSOWANIU DO OSIOWO-SYMETRYCZNYCH TRÓJKIERUNKOWYCH SIATEK CIĘGNOWYCH - CZYNNIK GEOMETRYCZNIE NIELINIOWY

Streszczenie. W pracy przedstawiono drugi etap rozwiązania osiowo-symetrycznych trójkierunkowych siatek cięgnowych, w którym określa się wpływ czynnika geometrycznie nieliniowego na wartości dodatkowych sił w cięgnach. Zastosowanie modelu kontynualno-dyskretnego pozwoliło sprowadzić rozwiązanie do układu przemieszczeniowych równań równowagi niezależnych od kąta środkowego β, które zapisuje się tylko w węzłach leżących na dwóch sąsiednich południkach.

1. WSTĘP

W referacie [1] przedstawiono metodę obliczeń osiowo-symetrycznych trójkierunkowych siatek cięgnowych, z zastosowaniem kontynualno-dyskretnego modelu obliczeniowego w ujęciu liniowym. Zaproponowane tam rozwiązanie jest wystarczająco dokładne przy łagodnych zmianach konfiguracji siatki spowodowanych obciążeniami normowymi. Natomiast w przypadku przemieszczeń normalnych o dużej zmienności w obszarze brzegu siatki - wywołanych np. górniczą deformacją terenu - należy dodatkowo uwzględnić w tym obszarze wpływ czynnika geometrycznie nieliniowego [2]. Pełne rozwiązanie takiego układu można podzielić na dwa etapy. W pierwszym z nich siatkę oblicza się w ujęciu liniowym, jak np. w [1], a w drugim określa się dodatkowe siły w cięgnach wynikające ze zmiany konfiguracji siatki, wywołanej przemieszczeniami normalnymi jej dolnego brzegu. W niniejszej pracy przedstawiono drugi etap rozwiązania.

2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

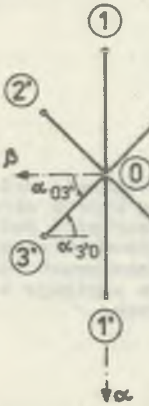
Równania równowagi dla dowolnego węzła siatki uzyskuje się, podobnie jak w [1], z zasady prac przygotowanych dla wirtualnego stanu przemieszczeń:

$$\delta W_o - \delta L_o = 0 \tag{1}$$

gdzie: $\delta W_o = \sum_j (S^o_{oj} + S_{oj})\delta\Delta l_{oj}$ – przyrost pracy sił wewnętrznych, a

S^o_{oj} – siły stanu pierwotnego (wyznaczane w pierwszym etapie rozwiązania),

S_{oj} – siły dodatkowe oraz $j = 1\div6$ (patrz rys. 1).



Rys. 1. Węzeł centralny

Zapisując wyrażenie na odkształcenia cięgien jak w [1]:

$$\varepsilon_{oj} = \bar{\varepsilon}_{oj} + \tilde{\varepsilon}_{oj}, \tag{2}$$

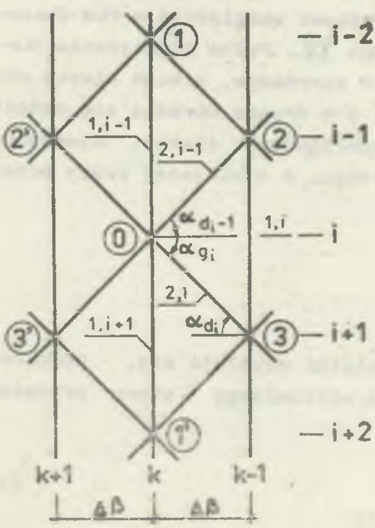
gdzie:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{l_{oj}}(\sin\alpha_{jo}u_j - \sin\alpha_{oj}u_o + \cos\alpha_{jo}v_j - \cos\alpha_{oj}v_o) - \frac{1}{2R_{oj}}(w_o + w_j), \tag{2a}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{oj} = \frac{1}{2l^2_{oj}}(w_j - w_o)^2, \tag{2b}$$

oraz podstawiając $\delta\Delta l_{oj} = l_{oj}\delta\varepsilon_{oj}$, otrzymuje się:

$$\sum_j S^o_{oj} l_{oj}\delta\bar{\varepsilon}_{oj} - \delta L_o + \sum_j S^o_{oj} l_{oj}\delta\tilde{\varepsilon}_{oj} + \sum_j S_{oj} l_{oj}(\delta\bar{\varepsilon}_{oj} + \delta\tilde{\varepsilon}_{oj}) = 0. \tag{3}$$



Rys. 2. Oznaczenia cięgien i węzłów

Uwzględniając, że zgodnie z rozwiązaniem w [1] $\sum_j S^o_{oj} l_{oj}\delta\bar{\varepsilon}_{oj} - \delta L_o = 0$ oraz przyjmując w ostatnim składniku (3) $\tilde{\varepsilon}_{oj} = 0$ (co prowadzi przy przemieszczeniach normalnych brzegu siatki rzędu r/100, do kilkuprocentowych różnic w wartościach dodatkowych sił – [2]), z równania (3) uzyskano następujące równania równowagi:

$$\sum_j S_{oj}\sin\alpha_{oj} = 0$$

$$\sum_j S_{oj}\cos\alpha_{oj} = 0 \tag{4}$$

$$\sum_j S^o_{oj}\frac{w_j - w_o}{l_{oj}} + \sum_j S_{oj}\frac{l_{oj}}{2R_{oj}} = 0$$

W dwóch pierwszych równaniach powyższego układu występują wtedy tylko siły dodatkowe obliczane wg wzoru:

$$S_{oj} = EF_{oj}\bar{\varepsilon}_{oj}, \tag{5}$$

W trzecim zaś obok sił S_{oj} występują również siły stanu pierwotnego obliczane wg wzorów (9) w [1].

W zasadzie można by było równania (4) zapisać dla wszystkich węzłów siatki, znajdujących się w obszarze wpływu zaburzenia brzegowego, z uwzględnieniem wartości sił początkowych w każdym cięgnie, lecz wtedy otrzymuje się układ kilku do kilkunastu tysięcy równań z szeroką macierzą pasmową współczynników, czasochłonny w rozwiązaniach na EMC.

Z tego względu zaproponowano inny sposób postępowania polegający na wyznaczaniu amplitud dodatkowych przemieszczeń odpowiadających węzłom siatki leżącym na dwóch sąsiednich południkach: głównym k i pośrednim k-1 (rys. 2).

3. PRZEMIESZCZENIOWE RÓWNANIA ZABURZENIA BRZEGOWEGO

Wprowadzając do wyrażeń na odkształcenia cięgiem składowe przemieszczeń węzłów siatki w postaci szeregów trygonometrycznych kąta środkowego β : $u_i = \sum u_{ni}\cos n\beta$, $v_i = \sum v_{ni}\sin n\beta$, $w_i = \sum w_{ni}\cos n\beta$, otrzymuje się z (5) i (2a) następujące wzory na dodatkowe siły w cięgnach:

$$\begin{aligned}
S_{o1} &= \sum_n S_{ni-1}\cos n\beta_k \\
S_{o1'} &= \sum_n S_{ni+1}\cos n\beta_k \\
S_{o2} &= \sum_n K'_{ni-1}\cos n\beta_k + \sum_n K''_{ni-1}\sin n\beta_k \\
S_{o2'} &= \sum_n K'_{ni-1}\cos n\beta_k - \sum_n K''_{ni-1}\sin n\beta_k \\
S_{o3} &= \sum_n K'_{ni}\cos n\beta_k - \sum_n K''_{ni}\sin n\beta_k \\
S_{o3'} &= \sum_n K'_{ni}\cos n\beta_k + \sum_n K''_{ni}\sin n\beta_k
\end{aligned} \tag{6}$$

Występujące tu amplitudy sił określone są analogicznymi wyrażeniami do (10) w [1] z uwzględnieniem zmiany wskaźnika harmonicznego z a na n.

Podstawiając do (4) siły stanu pierwotnego (9) wg [1] oraz siły dodatkowe (5), z ich amplitudami jak wyżej, uzyskano dla dowolnego węzła siatki przemieszczeniowe równania zaburzenia brzegowego:

$$\sum_n \Big[\frac{F_1}{l_{1i-1}} u_{ni-2} + \frac{F_1}{2R_{1i-1}} w_{ni-2} + \frac{2F_2}{l_{2i-1}} \sin\alpha_{di-1} \sin\alpha_{gi-1} u_{ni-1} -$$

$$\frac{2F_2}{l_{2i-1}} n\Delta\beta \sin\alpha_{di-1} \cos\alpha_{gi-1} v_{ni-1} + \frac{F_2}{R_{2i-1}} \sin\alpha_{di-1} w_{ni-1} -$$

$$\left(\frac{F_1}{l_{1i-1}} + \frac{F_1}{l_{1i+1}} + \frac{2F_2}{l_{2i-1}} \sin^2\alpha_{di-1} + \frac{2F_2}{l_{2i}} \sin^2\alpha_{gi}\right) u_{ni} +$$

$$\left(\frac{F_1}{2R_{1i-1}} - \frac{F_1}{2R_{1i+1}} + \frac{F_2}{R_{2i-1}} \sin\alpha_{di-1} - \frac{F_2}{R_{2i}} \sin\alpha_{gi}\right) w_{ni} + \tag{7a}$$

$$\frac{2F_2}{l_{2i}} \sin\alpha_{gi} \sin\alpha_{di} u_{ni+1} + \frac{2F_2}{l_{2i}} n\Delta\beta \sin\alpha_{gi} \cos\alpha_{di} v_{ni+1} -$$

$$\frac{F_2}{R_{2i}} \sin\alpha_{gi} w_{ni+1} + \frac{F_1}{l_{1i+1}} u_{ni+2} - \frac{F_1}{2R_{1i+1}} w_{ni+2} \Big] \cos n\beta_k = 0$$

$$\sum_n \Big[\frac{2F_2}{l_{2i-1}} n\Delta\beta \sin\alpha_{gi-1} \cos\alpha_{di-1} u_{ni-1} + \frac{2F_2}{l_{2i-1}} \cos\alpha_{di-1} \cdot$$

$$\cos\alpha_{gi-1} v_{ni-1} + \frac{F_2}{R_{2i-1}} n\Delta\beta \cos\alpha_{di-1} w_{ni-1} - \tag{7b}$$

$$2\left(\frac{F_2}{l_{2i-1}} \cos^2\alpha_{di-1} + \frac{F_2}{l_{2i}} \cos^2\alpha_{gi}\right) v_{ni} - \frac{2F_2}{l_{2i}} n\Delta\beta \sin\alpha_{di} \cdot$$

$$\cos\alpha_{gi} u_{ni+1} + \frac{2F_2}{l_{2i}} \cos\alpha_{gi} \cos\alpha_{di} v_{ni+1} +$$

$$\frac{F_2}{R_{2i}} n\Delta\beta \cos\alpha_{gi} w_{ni+1} \Big] \sin n\beta_k = 0$$

$$\sum_n E \Big[-\frac{F_1}{2R_{1i-1}} u_{ni-2} - \frac{F_1 l_{1i-1}}{4R^2_{1i-1}} w_{ni-2} - \frac{F_2}{R_{2i-1}} \sin\alpha_{gi-1} u_{ni-1} +$$

$$\frac{F_2}{R_{2i-1}} n\Delta\beta \cos\alpha_{gi-1} v_{ni-1} - \frac{F_2 l_{2i-1}}{2R^2_{2i-1}} w_{ni-1} +$$

$$\left(\frac{F_1}{2R_{1i-1}} - \frac{F_1}{2R_{1i+1}} + \frac{F_2}{R_{2i-1}}\sin\alpha_{di-1} - \frac{F_2}{R_{2i}}\sin\alpha_{gi}\right)u_{ni} -$$

$$\left(\frac{F_1 l_{1i-1}}{4R^2_{1i-1}} + \frac{F_1 l_{1i+1}}{4R^2_{1i+1}} + \frac{F_2 l_{2i-1}}{2R^2_{2i-1}} + \frac{F_2 l_{2i}}{2R^2_{2i}}\right)w_{ni} +$$

$$\frac{F_2}{R_{2i}}\sin\alpha_{di}u_{ni+1} + \frac{F_2}{R_{2i}}n\Delta\beta\cos\alpha_{di}v_{ni+1} - \frac{F_2 l_{2i}}{2R^2_{2i}}w_{ni+1} + \tag{7c}$$

$$\left.\frac{F_1}{2R_{1i+1}}u_{ni+2} - \frac{F_1 l_{1i+1}}{4R^2_{1i+1}}w_{ni+2}\right]\cos n\beta_k +$$

$$\sum_m\sum_n\left[\frac{S_{mi-1}}{I_{1i-1}}w_{ni-2} + 2\frac{K'_{mi-1}}{I_{2i-1}}w_{ni-1} - \left(\frac{S_{mi-1}}{I_{1i-1}} + \frac{S_{mi+1}}{I_{1i+1}} + 2\frac{K'_{mi-1}}{I_{2i-1}} +\right.\right.$$

$$\left.\left.2\frac{K'_{mi}}{I_{2i}}\right)w_{ni} + 2\frac{K'_{mi}}{I_{2i}}w_{ni+1} + \frac{S_{mi+1}}{I_{1i+1}}w_{ni+2}\right]\cos m\beta_k\cos n\beta_k +$$

$$\sum_m\sum_n\left[2n\Delta\beta\left(\frac{K''_{mi-1}}{I_{2i-1}}w_{ni-1} - \frac{K''_{mi}}{I_{2i}}w_{ni+1}\right)\right]\sin m\beta_k\sin n\beta_k = 0$$

W dalszych wzorach w miejsce bieżących wskaźników m (dla składników harmonicznych amplitud sił stanu pierwotnego) i n (dla składników harmonicznych dodatkowych przemieszczeń) wprowadzono odpowiednio wskaźniki x, y, zachowując m i n dla oznaczeń najwyższych wyrazów.

Równaniom (7) można wówczas nadać następującą zwięzłą postać:

$$\sum_{y=0}^{n} F_{1y}(u_y, v_y, w_y)\cos y\beta_k = 0 \tag{8a}$$

$$\sum_{y=0}^{n} F_{2y}(u_y, v_y, w_y)\sin y\beta_k = 0 \tag{8b}$$

$$\sum_{y=0}^{n} F_{3y}(u_y, v_y, w_y)\sin y\beta_k + \sum_{x=0}^{m}\sum_{y=0}^{n} F'_{3xy}(S^o_x, w_y)\cos x\beta_k\cos y\beta_k +$$

$$+\sum_{x=0}^{m}\sum_{y=0}^{n} F''_{3xy}(S^o_x, w_y)\sin x\beta_k\sin y\beta_k = 0 \tag{8c}$$

Z dwóch pierwszych równań powyższego układu wynikają bezpośrednio, dla dowolnego y, niezależne równania od kąta środkowego β :

$$F_{1y}(u_y, v_y, w_y) = 0 \tag{9a}$$

$$F_{2y}(u_y, v_y, w_y) = 0 \tag{9b}$$

Uwzględniając w (8c) zależności:

$$\cos x\beta_k \cos y\beta_k = \frac{1}{2}\cos(x-y)\beta_k + \frac{1}{2}\cos(x+y)\beta_k$$

$$\sin x\beta_k \sin y\beta_k = \frac{1}{2}\cos(x-y)\beta_k - \frac{1}{2}\cos(x+y)\beta_k$$

otrzymuje się w wyniku równanie:

$$\sum_{y=0}^{n} F_{3y}\cos y\beta_k + \sum_{x=0}^{m}\sum_{y=0}^{n}\frac{1}{2}(F'_{3xy} + F''_{3xy})\cos(x-y)\beta_k +$$

$$+ \sum_{x=0}^{m}\sum_{y=0}^{n}\frac{1}{2}(F'_{3xy} - F''_{3xy})\cos(x+y)\beta_k = 0$$

któremu można nadać następującą postać:

$$\sum_{l} F_l \cos l\beta_k = 0 \qquad \text{dla} \quad l \in (0,1,\ldots,m+n) \tag{10}$$

gdzie:

$$F_o = F_{3o} + F'_{3oo} + \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{m}(F'_{3xx} + F''_{3xx}) \tag{11a}$$

oraz dla $l > 1$:

$$F_l = F_{3l} + \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{m}(F'_{3,x,x-l} + F''_{3,x,x-l} + F'_{3,x,x+l} +$$

$$+ F''_{3,x,x+l} + F'_{3,x,l-x} - F''_{3,x,l-x}) \tag{11b}$$

Ostatecznie rozwiązanie sprowadza się do układu równań, w którym y-owym amplitudom składowych przemieszczeń dowolnego węzła siatki dwóch sąsiednich południków przyporządkowane są trzy równania. Dwa pierwsze to (9a) i (9b), a trzecie, niezależne również od kąta środkowego β, otrzymuje się z (10) dla $l = y$:

$$\bar{F}_l = 0, \text{ gdzie } l \in (0,1,\dots,m+n) \tag{12}$$

W równaniu tym oprócz amplitud u_y, v_y, w_y występują również, jak to bezpośrednio wynika z (11b), amplitudy u_{x-y}, v_{x-y}, w_{x-y} oraz u_{x+y}, v_{x+y}, w_{x+y}.

W sumie dla każdego węzła siatki zapisuje się 3 (n+1) równań, a nadliczbowe równania (12) (dla $n < l \leqslant m+n$) przy zadanej dokładności obliczeń mogą być pominięte. Minimalną wartość wskaźnika n można ustalić na podstawie analizy zbieżności wyników uzyskanych dla kolejnych jego wartości, natomiast wartość wskaźnika m wynika z rowziązania stanu pierwotnego.

4. ZAKOŃCZENIE

W przypadku gdy uzyska się wystarczającą zbieżność wyników przy umiarkowanych wartościach n (np. $n \cong 2$ m)) przedstawione rozwiązanie (wg równań (9) i (12)) będzie znacznie efektywniejsze od rozwiązania z dyskretnym modelem obliczenkowym - równania (4). Może ono posłużyć do oceny czynnika nieliniowego zarówno w przypadku bardziej złożonych stanów pierwotnych odpowiadających obciążeniom normowym (przy siatce usztywnionej pierścieniami), jak i towarzyszących tym stanom dodatkowych przemieszczeń dolnego brzegu siatki cięgnowej wymuszanych np. górniczą deformacją terenu.

LITERATURA

[1] Niewiadomski J., Zamorowski J.: Model kontynualno-dyskretny w zastosowaniu do osiowo-symetrycznych trójkierunkowych siatek cięgnowych. VII Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna Konstrukcje Metalowe, Gdańsk 1984, t. 1, ss. 85-92.

[2] Zamorowski J.: Analiza statyczna chłodni cięgnowej jako układu kontynualno-dyskretnego, Praca doktorska, Politechnika Śląska 1982.

КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПО ОСИ ВАНТОВЫХ СЕТОК С ТРЕУГОЛЬНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ - ФАКТОР ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛИНЕЙНЫЙ

Р е з ю м е

В работе представлен второй этап решения симметрических по оси вантовых сеток с треугольными ячейками, в котором определяется влияние фактора геометрично нелинейного на значения дополнительных сил в вантах. Применение континуально-дискретной модели позволило свести решение к системе уравнений смещений равновесия узлов только двух соседних меридианов.

CONTINUAL - DISCRETE MODEL IN AXIALLY-SYMETRIC THREE-WAY TENSIONED NETWORKS - GEOMETRICALLY NONLINEAR APPROACH

S u m m a r y

In the paper the second stage of solution of the axial-symetric three-way tensioned networks is presented. In this solution the influence of geometrically nonlinear factor on value of additional forces in tension members is determined.

Application of continual-discrete model allows to reduce the solution to a system of displacement equations of equilibrium independent of central angle β, which are noted only in knots placed on two neighbouring meridians.