ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: BUDOWNICTWO z. 61 Nr kol. 842

Anna ŻAK

METODY POSZUKIWANIA NAJKRÓTSZYCH ŚCIEŻEK W SIECIACH

Streszczenie. W niniejszym artykule przedstawia się wykorzystanie teorii grafów i sieci w rozwiązywaniu wybranego problemu inżynierii ruchu - zagadnienia najkrótszych ścieżek.

1. WSTĘP

Teoria grafów i przepływów sieciowych jest znaczącą gałęzią matematyki i znalazła także zastosowanie w szeregu zagadnień inżynierii ruchu. Korzystne jest przedstawianie połączeń transportowych (drogowych, kolejowych, wodnych itp.) w postaci sieci i badanie ich metodami matematycznymi dla modeli sieciowych. Teoria grafów, zajmując się wzajemnymi stosunkami zachodzącymi między liniami i punktami na płaszczyźnie, powiązana jest z algebrą i teorią macierzy.

Niektóre metody badań mogą być stosowane dla dużych sieci i w wielu przypadkach możemy wykorzystać ETO, która przyspiesza obliczenia i daje dokładniejsze wyniki. Szczególne znaczenie teorii grafów dla praktyki polega na tym, że pozwala ona na graficzne przedstawienie modelu i zbudowanie jego cyfrowego odpowiednika. Poszczególne wierzchołki sieci mogą wyrażać treści, a połączenie między nimi różne funkcje.

Niektórzy autorzy prac nie wprowadzają rozróżnienia między grafami a sieciami [2]. Jednak w zagadnieniach inżynierii ruchu drogowego rozróżnienie to wprowadzamy. Przez pojęcie "grafu" rozumiemy często strukturalne powiązania pomiędzy węzłami, a "sieć" posiada dodatkowo pewne charakterystyki ilościowe połączeń i/lub węzłów.

2. DŁUGOŚĆ JAKO CHARAKTERYSTYKA ILOŚCIOWA POŁĄCZENIA

Jedną z najczęściej używanych charakterystyk ilościowych połączenia jest jego długość. Dla połączenia węzłów "i" oraz "j" będzie ona wynosić d_{ij}. Dla dowolnej ścieżki w grafie długość jej będzie sumą długości wszystkich jej połączeń. Długość ścieżki można wyrazić zarówno w jednostkach fizycznych, jak i za pomocą kosztów ponoszonych przez podróżnych, czasu podróży itp.

3. PROBLEM NAJKRÓTSZEJ ŚCIEŻKI

Jednym z zagadnień najczęściej spotykanych w inżynierii ruchu drogowego jest znalezienie najkrótszej ścieżki z węzła "i" do węzła "j". Ścieżka taka posiada najmniejszą wartość określającą jej długość spośród wszystkich możliwych ścieżek. Jedną z własności najkrótszej ścieżki jest to, że każdy leżący na niej odcinek jest optymalny. Oprócz tego przebieg najkrótszych ścieżek informuje, z których połączeń korzystać, gdzie wykonywać inwestycje.

Jednak znajdowanie najkrótszej ścieżki jest bardzo czasochłonne i często kosztowne z uwagi na czas pracy maszyny liczącej. Pozostaje to w ścisłym związku z poprawnym postawieniem zadania i doborem stosownego algorytmu.

W związku z tym istnieje kilka sposobów sformułowania zadania znalezienia najkrótszej ścieżki:

1. Znaleźć najkrótszą ścieżkę z węzła "i" do węzła "j";
2. Znaleźć najkrótszą ścieżkę z węzła "i" do wszystkich pozostałych węzłów;
3. Znaleźć najkrótsze ścieżki między wszystkimi węzłami.

Obok tych zadań istnieją i inne powiązane z zagadnieniem znajdowania najkrótszej ścieżki, np.:

1. Znaleźć k-tą najlepszą ścieżkę lub k najlepszych ścieżek;
2. Znaleźć najkrótszą ścieżkę składającą się z nie więcej niż n połączeń;
3. Problem komiwojażera.

Oprócz tego istnieją też rozszerzenia pewnych problemów z zakresu inżynierii ruchu drogowego dotyczące włączania zakazów skrętu, czasów oczekiwania i przesiadek w przypadku transportu publicznego.

4. ALGORYTMY NAJKRÓTSZYCH ŚCIEŻEK

Z wielkiej liczby możliwych ścieżek między dwoma węzłami opłaca się wykorzystanie tylko nielicznych - tych najkrótszych.

Zakładamy, że długości połączeń są niesymetryczne, tzn. $d_{ij} \neq d_{ji}$ i zawsze dodatnie.

Algorytmy najkrótszej ścieżki powstały i rozwinęły się na bazie sieci zaproponowanej przez Minty'ego (1957 r.). Składała się ona z kawałków sznurka o długości proporcjonalnej do rzeczywistej długości połączeń. Przytrzymując dwa punkty, np. nadania i odbioru, należy naciągnąć sznurki i jako ścieżkę najkrótszą wybrać tę, którą reprezentują najbardziej naciągnięte sznurki.

Dalsze lata przyniosły znaczny rozwój w tej dziedzinie, szczególnie zwracając uwagę na wydajność algorytmów, przede wszystkim tych, które są obliczane za pomocą EMC.

Rozróżniamy dwa podstawowe typy algorytmów poszukiwania najkrótszych ścieżek pomiędzy wieloma węzłami:

1) algorytmy budowy drzewa (dendrytowe);
2) algorytmy macierzowe.

4.1. Algorytmy budowy drzewa

Określają one ścieżki z jednego węzła początkowego do wszystkich pozostałych, muszą więc być tyle razy stosowane, ile jest początkowych węzłów W wielu badaniach posługujemy się znanym algorytmem Moore'a, Forda, Bellmana [1]. Pewną modyfikacją tego algorytmu jest metoda analizy etapowej. Wydajniejszą jeszcze metodą jest system indeksowania zaproponowany przez d'Esopo. Metoda oznaczania Minty'ego polega na konstruowaniu dendrytu najkrótszej ścieżki po jednym połączeniu na raz, rozpoczynając od węzła początkowego [3]. Pewne modyfikacje algorytmu Moore'a zaproponowali Knodell i Jacobs. Metoda Jacobsa dostarcza odpowiedniej liczby ścieżek i stanowi obecnie najszybszą procedurę dendrytową. Jednakże nakłady na utworzenie k-ścieżek są zawsze wyższe niż przy wykorzystaniu k-razy algorytmu Moore'a.

Do grupy algorytmów budowy drzewa, zwanych algorytmami "jednego przejścia", należą procedury zaproponowane między innymi przez Dijkstra, Whitinga i Hilliera. Wydajność tych metod zależy w dużym stopniu od sposobu określania kolejnych węzłów. Procedurę taką opracował Dial. Prócz tego niektórzy autorzy proponują prowadzenie poszukiwań najkrótszej ścieżki między określonymi dwoma węzłami równocześnie z obu węzłów.

4.2. Algorytmy macierzowe

Dostarczają one dróg ze wszystkich węzłów sieci do wszystkich węzłów sieci i wymagają każdorazowo tylko jednorazowego stosowania. Dwa najbardziej wydajne algorytmy macierzowe opracowali Floyd i Dantzig [1]. Do grupy tej zaliczamy również metodę opracowaną przez Shimbela, Pollocka w Wiebensona [3]. Niezależnie od nich podobną metodę opracował Bellman.

4.3. Porównanie algorytmów budowy drzewa i algorytmów macierzowych

Zaletą algorytmów macierzowych jest możliwość łatwiejszego zaprogramowania. Oprócz tego można w przybliżeniu określić czas obliczeń. Z drugiej jednak strony metoda ta przy korzystaniu z maszyn cyfrowych wymaga dużej pojemności pamięci, co stanowi jedną z przyczyn rzadszego jej stosowania. Jest zdecydowanie wydajniejsza, gdy szukamy najkrótszej ścieżki między wszystkimi węzłami, w przypadku gdy istnieją bezpośrednie połączenia między wszystkimi węzłami. Ustępuje jednak metodzie budowy drzewa, gdy mamy do czynienia z siecią, której węzły bezpośrednio połączone są tylko z niektórymi węzłami, jak również wtedy, gdy szukamy najkrótszej ścieżki między dwoma wybranymi węzłami. Metoda dendrytowa korzystniejsza jest przy

obliczeniach prowadzonych za pomocą EMC, gdyż mniejsza jest niezbędna pojemność pamięci.

4.4. Metody przybliżone

Wyżej wymienione algorytmy mimo wielu swoich zalet są jednak czasochłonne. Zwrócono wobec tego uwagę na możliwość tworzenia bardzo szybko ścieżek prawie optymalnych - z optymalności można zrezygnować na rzecz szybkości obliczeń. Jedną z takich metod zaproponował Lin, inną procedurę opracował Mills [1]. Jansen i Tanner szukali oszczędności w uproszczonym przedstawieniu sieci i w konsekwencji skróceniu liczby obliczeń.

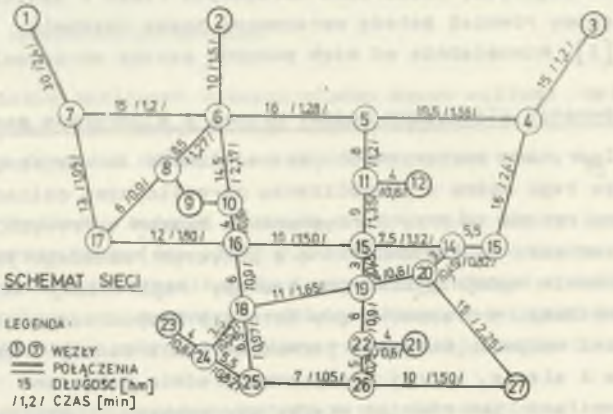
4.5. Metoda podziału i ograniczeń

Metoda ta pozwala na znalezienie wszystkich możliwych ścieżek prowadzących tylko jeden raz przez każdy z węzłów. Ze wszystkich możliwych rozwiązań bada się jedynie mały ich zbiór, odrzucając inne możliwości na podstawie pewnych zasad ograniczania. Metodę taką zaproponowali Little, Minty, Sweeney i Karel [3]. Procedurę podziału w odniesieniu do algorytmu Floyda zaproponował Hu [1].

Wydajność metody podziału zależy od użytej techniki podziału. Ma ona wpływ na czas obliczeń i liczbę miejsc pamięci EMC.

5. ANALIZA SIECI MIASTA ŚREDNIEJ WIELKOŚCI

Rys. 1 przedstawia schemat sieci drogowej miasta średniej wielkości. Wyróżniamy w niej dwa rodzaje węzłów: węzły generująco-absorbujące (nr 1, 2, 3, 9, 12, 21, 23, 27) i węzły pośrednie (pozostałe). Połączenia między węzłami są symetryczne, tzn. $d_{ij} = d_{ji}$ i opisane przez podanie długości i czasu przejazdu.



Rys. 1. Schemat sieci miasta średniej wielkości

Obliczenia najkrótszych ścieżek wykonano ze względu na minimalny czas niezbędny do przebycia drogi z węzła początkowego do końcowego (metodą oznaczania Minty'ego i metodą macierzową) oraz z uwagi na długość połączeń metodą oznaczania [4].

5.1. Poszukiwanie najkrótszej ścieżki metodą oznaczania

Należało znaleźć 28 najkrótszych ścieżek między wszystkimi węzłami generująco-absorbującymi. Obliczenia najkrótszych ścieżek, które ujmowałyby wszystkie możliwe kombinacje połączeń węzłów początkowych z końcowymi, wymagały "ręcznego" wykonania 527 operacji obliczeniowych.Umożliwiły ścisłe określenie kolejności węzłów na każdej znalezionej ścieżce. Poszczególne operacje tej metody pozwoliły znaleźć długość ścieżki najkrótszej i ścieżek "gorszych", tzn. dłuższych.

5.2. Poszukiwanie najkrótszej ścieżki metodą macierzową

Dla przedstawionego na schemacie modelu sieci miasta średniej wielkości znaleziono najkrótszę ścieżki metodą macierzową. W celu wykonania obliczeń wykorzystano algorytm tej metody. Był on podstawą do napisania programu TRAS, w autokodzie FORTRAN 1900, który pozwala obliczać macierz rzędu 100 x 100.

Korzystanie z programu wymaga posiadania następujących danych:

- rząd macierzy (liczba całkowita);
- liczba znanych elementów macierzy (liczba całkowita);
- elementów macierzy różnych od zera i nieskończoności; podaje się je za pomocą trzech liczb:
  1) numer węzła, który odpowiada węzłowi będącemu początkiem połączenia,
  2) numer kolumny, który odpowiada węzłowi będącemu końcem połączenia,
  3) wartości elementu (np. długość połączenia, czas przejazdu).

Obliczenia wykonane zostały na EMC Odra 1305. przeprowadzone były w dwóch wariantach.

W pierwszym przypadku elementami macierzy D^1 były wartości odpowiadające czasom przejazdu odpowiednich połączeń. Wynikiem wykonanych obliczeń jest macierz D^8. Z uwagi na symetrię połączeń jest ona symetryczna względem głównej przekątnej.

W drugim przypadku obliczenia przeprowadzono biorąc pod uwagę długość poszczególnych połączeń. Analogicznie - macierz końcowa obrazuje najkrótsze odległości między poszczególnymi węzłami generująco-absorbującymi.

6. PODSUMOWANIE

Celem niniejszej pracy było przedstawienie metod i sposobów znajdowania najkrótszych ścieżek.

Istnieje ich stosunkowo dużo. Mogą być one adaptowane do wykorzystywania obliczeń techniką cyfrową, co pokazano na przykładzie metody macierzowej. Wybór sposobu zależy od wielkości sieci, stopnia jej skomplikowania, ilości danych opisujących sieć, posiadanych możliwości obliczeniowych w zakresie EMC.

Wykonywanie tych obliczeń "ręcznie" jest bardzo pracochłonne, uwidoczniło się to na przykładzie wykorzystanej metody oznaczania. Korzystanie z techniki cyfrowej wydatnie przyspiesza proces liczenia,wymaga jednak istnienia gotowych programów.

Podkreślić należy, że metody poszukiwania najkrótszych ścieżek nie we wszystkich przypadkach posiadają swój ostateczny kształt i nie są całkowicie dopracowane. Zagadnienia związane z poszukiwaniem najkrótszych ścieżek stanowią podstawę do dalszej analizy modeli sieciowych, szczególnie w odniesieniu do sieci transportowych.

LITERATURA

[1] Steenbrink P.A.: Optymalizacja sieci transportowych. WKŁ, Warszawa 1978.

[2] Ford L.R., Fulkerson D.R.: Przepływy w sieciach. PWN, Warszawa 1969.

[3] Mitchell G.H.: Badania operacyjne metody i przykłady. WNT, Warszawa 1977.

[4] Żak A.: Analiza algorytmów rozkładu ruchu na sieć z zastosowaniem metod teorii grafów. Praca magisterska (niepublikowana), Gliwice 1980.

МЕТОДЫ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ДОРОГ В СЕТЯХ

Р е з ю м е

В настоящей статье представляется использование теории графов и сетей в разрешении одной проблемы инженерии движения - вопроса самых коротких дорог.

THE METHODS OF CRITICAL PATHS SEARCHING IN THE NETWORKS

S u m m a r y

In the paper the application of the graphs and networks theory for the solution of a selected problem in the scope of the traffic engineering eg. a question of critical paths is presented.