

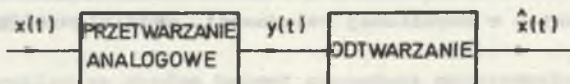
Jerzy JAKUBIEC

METODA MODELOWANIA I KOREKCJI BŁĘDÓW SYSTEMATYCZNYCH  
W PROCESIE ODTWARZANIA DYNAMICZNYCH PRZEBIEGÓW WEJŚCIOWYCH  
NIELINIOWYCH PRZETWORNIKÓW POMIAROWYCH

**Streszczenie.** Przetwarzanie wielkości dynamicznych przez przetwornik pomiarowy o silnie nieliniowych własnościach związane jest z występowaniem dużych wartości błędów systematycznych, mogących przekraczać wartości wielkości mierzonej. Odtwarzanie przebiegu wejściowego takiego przetwornika jest zagadnieniem złożonym, praktycznie realizowalnym jedynie w układach mikroprocesorowych. W artykule przedstawiono koncepcję rozwiązania tego problemu drogą rozwiązywania równania odwrotnego do równania opisującego własności przetwornika. Opisano zastosowany w tym celu sposób modelowania błędów systematycznych procesu przetwarzania, którego istotą jest wydzielenie z równania ogólnego - cząstkowych opisów własności statycznych i dynamicznych przetwornika w postaci łańcucha równań. Proces odtwarzania jest realizowany jako rozwiązywanie równań odwrotnych do wydzielonych równań cząstkowych.

### 1. Wprowadzenie

Zasadniczą strukturę toru przetwarzania, w którym zastosowano odtwarzanie przebiegu wejściowego przetwornika analogowego, pokazano na rys. 1. Zakłada się, że przetwornik analogowy jest nieliniowy i pracuje w warunkach dynamicznych, co oznacza, że jego wielkość wyjściowa  $y(t)$  obciążona jest zarówno błędami statycznymi jak i dynamicznymi (błędy przypadkowe są pomijane). Ponadto dopuszcza się zależność własności przetwornika od wielkości wpływających.



Rys. 1. Struktura toru przetwarzania z odtwarzaniem przebiegu wielkości wejściowej

Fig. 1. Structure of processing (measuring) chain with reconstruction of the input quantity

Opisany dalej sposób odtwarzania ukierunkowany jest zasadniczo na stosowanie w układach programowalnych, gdzie stanowi podstawę budowy algorytmów korekcji błędów statycznych i dynamicznych. Budowanie analogowych układów odtwarzania, opartych na tym sposobie, jest w pewnych przypadkach możliwe, ale zdaniem autora niecelowe ze względu na trudności konstrukcyjne.

Istota prezentowanego sposobu polega na realizacji działań, które ogólnie zaliczane są do grupy tzw. zadań odwrotnych [1]. Przyjmując, że własności przetwornika analogowego opisane są ogólnie równaniem przetwarzania

$$y = f(x) \quad (1)$$

odtworzenie realizowane jest jako rozwiązywanie odwrotnego równania przetwarzania

$$\hat{x} = f^{-1}(y), \quad (2)$$

gdzie  $\hat{x}$  jest oceną wartości chwilowych wielkości wejściowej  $x$ .

W omawianej sytuacji proces przetwarzania wielkości mierzonej składa się z dwóch podstawowych etapów: przetwarzania analogowego i odtwarzania. Przetwarzanie analogowe jest przyczyną powstawania błędów systematycznych wielkości  $y(t)$ . Zakładając, że przebieg odtworzony  $\hat{x}(t)$  reprezentuje odpowiednio dokładnie przebieg wejściowy  $x(t)$ , proces odtwarzania jest eliminowaniem z przebiegu  $y(t)$  błędów systematycznych powstałych w trakcie przetwarzania analogowego. Wynika stąd, że metrologiczną podstawą współzależności obu etapów są błędy systematyczne. Zatem podstawowym zadaniem jest wydzielenie poszczególnych źródeł błędów przetwarzania analogowego i wskazanie sposobów eliminowania tych błędów w procesie odtwarzania.

W dalszym ciągu przedstawiono definicję błędu systematycznego, sformułowaną w taki sposób, aby umożliwić wydzielenie w sposób jednolity cząstkowych źródeł błędów statycznych i dynamicznych. Zdefiniowano następnie własności statyczne i dynamiczne i na podstawie tych określeń zbudowano zasadę rozdzielania wymienionych własności. Wynikiem zastosowania procedury rozdzielania jest przedstawienie równania ogólnego (1) w postaci łańcucha równań opisujących cząstkowe własności statyczne bądź dynamiczne. W końcowym fragmencie artykułu opisane procedurę odtwarzania realizowaną jako rozwiązywanie, w określonej kolejności, wydzielonych równań cząstkowych.

## 2. Definicja systematycznego błędu przetwarzania

Przyjmuje się następującą definicję:

- systematyczny błąd przetwarzania jest różnicą między wartością wielkości wyjściowej przetwornika, opisanego deterministycznym równaniem przetwornika (1), a wartością wielkości wyjściowej przetwornika idealnego,

- wartości wielkości wyjściowej idealnego przetwornika pomiarowego są równe wartościom wielkości wejściowej tego przetwornika w tych samych momentach i w całym zakresie przetwarzania.

Zgodnie z powyższą definicją systematyczny błąd przetwarzania analogowego można wyrazić w postaci analitycznej jako:

$$\delta_p = y - y_1, \quad (3)$$

gdzie  $y_1$  jest wielkością wyjściową przetwornika idealnego. Równanie przetwarzania takiego przetwornika ma postać

$$y_1 = x, \quad (4)$$

zatem dla opisu własności przetwornika w postaci równania (1) błąd systematyczny przetwarzania analogowego opisuje zależność

$$\delta_p = f(x) - x. \quad (5)$$

Powyższa definicja jest zasadniczo zgodna ze stosowanymi określeniami [2], jednak w używanych definicjach z reguły przyjmuje się, że idealne równanie przetwarzania ma postać:  $y = Sx$ ,  $S$  jest czułością przetwornika i zachodzi  $S = \text{const}$ . Biorąc jednak pod uwagę łatwość sprowadzania współczynnika  $S$  do wartości równej 1 - co jest możliwe zarówno konstrukcyjnie, przez dobór współczynnika wzmocnienia wzmacniacza z reguły występującego w przetworniku analogowym, jak również programowo: przez wstępne przemnożenie wyników pomiaru wielkości  $y$  przez odpowiednią stałą - można przyjąć, że cyfrowe wyniki pomiaru wielkości  $y$  w idealnym przypadku reprezentują wprost wartości wielkości mierzonej, czego wyrazem jest równanie (4).

### 3. Rozdzielanie statycznych i dynamicznych własności przetwornika analogowego

Pierwszym krokiem na drodze budowy procedury odtwarzania przebiegu wejściowego przetwornika opisanego ogólnym równaniem przetwarzania (1), modelującym zarówno własności statyczne jak i dynamiczne przetwornika, jest rozdzielanie tych własności. Wydzielenie z równania ogólnego cząstkowych własności statycznych i dynamicznych jest równoznaczne z wydzieleniem odpowiednich cząstkowych źródeł błędów; a co za tym idzie, pozwala na realizację odtwarzania poprzez eliminację (korekcję) kolejnych błędów. Aparat matematyczny stosowany do opisu przetwornika jest istotnie różny dla własności statycznych i dynamicznych, stąd też rozdzielanie tych własności jest wręcz krokiem niezbędnym w celu rozwiązania nieliniowego równania przetwarzania.

Przyjmijmy, że ogólne własności przetwornika dają się opisać równaniem różniczkowym. W układach fizycznych te własności, które nazywane są dynamicznymi, opisywane są za pomocą pochodnych. Zatem wielkością dynamiczną nazywana będzie wielkość modelowa, której pochodne występują w równaniu przetwarzania. Wielkością statyczną nazywana będzie wielkość występująca w równaniu przetwarzania, lecz opisana bez użycia pochodnych.

Konsekwencją przyjętej definicji wielkości dynamicznej jest ogólna definicja błędów dynamicznych: są to błędy modelowane za pomocą pochodnych. Taka definicja nadaje pochodnym rangę podobną do rangi wielkości wpływających. Jest to fizycznie uzasadnione, ponieważ pochodne wielkości fizycznych są również wielkościami fizycznymi (mierzalnymi). Można wręcz powiedzieć, że tak jak wielkości wpływające modelują błędy dodatkowe, pochodne modelują błędy dynamiczne. Jak to pokazano w pracy [3], stosując powyższą definicję można wprowadzać poprawki na błędy dynamiczne.

Definicja ta pozwala na fizyczną interpretację błędów dynamicznych, lecz w celu wyznaczenia wartości tych błędów oraz błędów statycznych konieczne jest zdefiniowanie własności statycznych i dynamicznych. Przyjmuje się, że opisem własności statycznych i dynamicznych jest odpowiednio statyczne i dynamiczne równanie przetwarzania, powstające w wyniku zastosowania następującej procedury rozdzielania.

Ogólne równanie przetwarzania zapisuje się w postaci układu równań takich, że:

- każde z równań opisuje jedynie własności statyczne bądź dynamiczne,
- każde z równań daje się interpretować jako opis zniekształceń idealnego równania przetwarzania (4), zatem można je zapisać jako:

$$y = x + \delta_p, \quad (6)$$

gdzie:

- dla równania dynamicznego  $\delta_p$  jest błędem dynamicznym, będącym funkcją pochodnych dążącą do zera dla wartości pochodnych dążących do zera,
- dla równania statycznego  $\delta_p$  nie zależy od wartości pochodnych.

Praktyczne działania przy rozdzielaniu można przedstawić w dwóch krokach. W pierwszym - przyrównując do zera pochodne w równaniu ogólnym, otrzymuje się opis wypadkowych własności statycznych. Należy teraz, dobierając nowe zmienne pomocnicze, zredukować to równanie do postaci idealnej (4). Wprowadzając te nowe zmienne do równania ogólnego, otrzymuje się dynamiczne równanie przetwarzania, które łącznie z równaniami pomocniczymi stanowi układ równań równoważny matematycznie równaniu ogólnemu, a który fizycznie opisuje łańcuch przetworników, z których każdy realizuje bądź przetwarzanie statyczne, bądź dynamiczne.

Przykład 1

Dla równania ogólnego

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + y = g(x, w_1, \dots, w_r), \quad (7)$$

gdzie  $w_1, \dots, w_r$  są wielkościami wpływającymi, po sprowadzeniu pochodnych do zera otrzymuje się równanie statyczne

$$y = g(x, w_1, \dots, w_r). \quad (8)$$

Oznaczając teraz

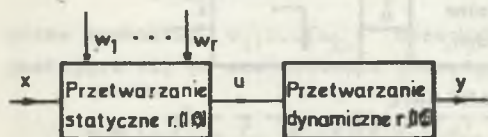
$$u = g(x, w_1, \dots, w_r), \quad (9)$$

otrzymuje się układ równań:

$$u = g(x, w_1, \dots, w_r), \quad (10)$$

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + y = u, \quad (11)$$

który można przedstawić graficznie (rys.2) jako szeregowo połączenie dwóch przetworników, realizujących kolejno przetwarzanie statyczne (10) i dynamiczne (11).



Rys. 2. Graficzna interpretacja rozdzielonych własności statycznych i dynamicznych przetwornika z przykładu 1

Fig. 2. Graphic interpretation of splitted - static and dynamic - properties of the transducer considered in example 1

Przykład 2

Dla równania ogólnego

$$\dot{y} + y^2 = x, \quad (12)$$

po wyeliminowaniu pochodnej, otrzymuje się

$$y^2 = x. \quad (13)$$

Kładąc teraz

$$u = y^2 \quad (14)$$

i wprowadzając równanie (14) do (12) otrzymuje się:

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} \dot{u} + u = x, \quad (15)$$

$$y^2 = u, \quad (16)$$

którego postać wskazuje, że zarówno statyczne, jak i dynamiczne własności przetwornika, opisanego ogólnie równaniem (12), są nieliniowe.

Przykład 3

Równanie ogólne

$$\dot{y} + y^2 = x^2 + \dot{x}, \quad (17)$$

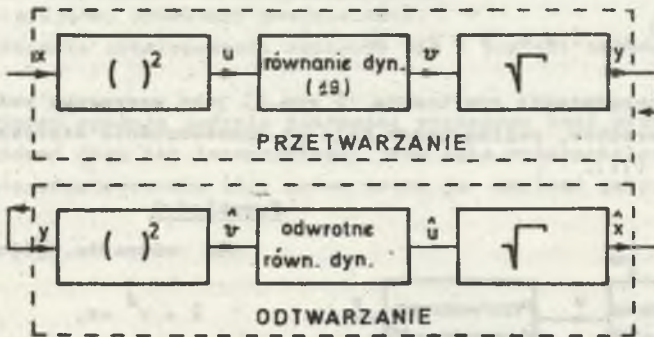
stosując postępowanie takie jak w przykładzie 2, można przedstawić w postaci układu trzech równań

$$u = x^2, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} \dot{u} + u = \frac{1}{2\sqrt{v}} \dot{v} + v, \quad (19)$$

$$\sqrt{v} = y, \quad (20)$$

który można przedstawić graficznie w postaci łańcucha przetworników pokazanych w górnym fragmencie rys. 3.



Rys. 3. Etapy przetwarzania i odtwarzania dla przetwornika z przykładu 3

Fig. 3. Stages of signal processing and reconstructing for the transducer described in example 3

#### 4. Odtwarzanie jako łańcuch korekcji wydzielonych źródeł błędów systematycznych

Zgodnie z przyjętą definicją odtwarzanie jest procedurą rozwiązywania odwrotnego równania przetwarzania. W rozważanej sytuacji oznacza to wyznaczanie oceny  $\hat{x}$  wielkości mierzonej zgodnie z zależnością (2). Biorąc to pod uwagę, że odtwarzanie może być również traktowane jako proces przetwarzania (w rozważanej sytuacji - programowego), błąd systematyczny odtwarzania można zapisać, zgodnie z przyjętą definicją, jako:

$$\delta_0 = \hat{x} - y. \quad (21)$$

Suma błędów systematycznych przetwarzania analogowego i odtwarzania ma zgodnie ze wzorami (2), (5), (7) postać

$$\delta_p + \delta_0 = f(x) - x + f^{-1}(y) - y \equiv 0. \quad (22)$$

Wniosek płynący z przeprowadzonego rozumowania jest istotny: dowodzi ono, że błąd systematyczny przetwarzania analogowego, zdefiniowany wyrażeniem (5), na skutek zastosowania procedury odtwarzania zostaje wyeliminowany z wyniku końcowego. Tradycyjnie taka operacja nazywana jest korekcją błędów systematycznych, można zatem określić odtwarzanie jako korekcję błędów systematycznych drogą rozwiązywania odwrotnego równania przetwarzania.

Rozdzielenie własności przetwornika analogowego powoduje, że jest on traktowany jako łańcuch przetworników, z których każdy realizuje elementarne przetwarzanie statyczne lub dynamiczne. Łańcuch przetworzeń może być zatem opisany ogólnie ciągiem I równań

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x), \\ u_2 &= f_2(u_1), \\ &\vdots \\ y &= f_I(u_{I-1}), \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie symbolami  $u_1, \dots, u_{I-1}$  oznaczono kolejne wielkości pomocnicze, pojawiające się po zastosowaniu procedury rozdzielania. Zachodzi przy tym:

$$y = f_I \left\{ \dots f_2 \left[ f_1(x) \right] \right\} = f(x). \quad (24)$$

Określimy teraz procedurę odtwarzania jako rozwiązywanie równań odwrotnych do odpowiednich równań łańcucha (23) - kolejno od równania ostatniego do pierwszego. Działania te prowadzą do wyznaczania ocen kolejnych wielkości pośrednich, tj.  $\hat{u}_{I-1}, \dots, \hat{u}_1$ , a w końcowym kroku do wyznaczania oceny  $\hat{x}$  wielkości mierzonej. Zatem procedurę odtwarzania można zapisać jako ciąg działań realizowanych zgodnie z układem równań:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{I-1} &= f_I^{-1}(y), \\ \hat{u}_{I-2} &= f_{I-1}^{-1}(\hat{u}_{I-1}), \\ &\vdots \\ \hat{x} &= f_1^{-1}(\hat{u}_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Zasadność tak sformułowanej procedury odtwarzania można wykazać następująco. Ciąg równań (25) może być zapisany w postaci:

$$\hat{x} = f_1^{-1} \left\{ \dots f_{I-1}^{-1} \left[ f_I^{-1}(y) \right] \right\} \quad (26)$$

skąd po uwzględnieniu wyrażenia (24) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= f_1^{-1} \left\{ \dots f_{I-1}^{-1} \left[ f_I^{-1} \left( F_I \left\{ \dots f_2 \left[ f_1(x) \right] \right\} \right) \right] \right\} = \\ &= f_1^{-1} \left\{ \dots f_{I-2}^{-1} \left[ f_{I-1}^{-1} \left( f_{I-1} \left\{ \dots f_2 \left[ f_1(x) \right] \right\} \right) \right] \right\} = \dots = x. \end{aligned} \quad (27)$$

Zatem po I krokach redukcji funkcji wzajemnie odwrotnych otrzymuje się zależność

$$\hat{x} = x, \quad (28)$$

co oznacza, że w wyniku opisanego ciągu działań przetwarzania analogowego i odtwarzania otrzymuje się ocenę  $\hat{x}$  wielkości wejściowej pozbawioną systematycznych błędów przetwarzania.

#### Przykład 4

Układ równań (18), (19), (20) modeluje przetwarzanie, w którym dają się wydzielić 3 źródła błędów systematycznych, występujące w kolejności zgodnej z kolejnością tych równań. Odtwarzanie przebiegu wielkości wejściowej składa się zatem z 3 kroków, z których każdy realizuje korekcję poszczególnych błędów drogą rozwiązywania odpowiedniego równania odwrotnego - w kolejności odwrotnej do przetwarzania.

I krok - wyznaczenie oceny wielkości pomocniczej  $\hat{v}$  na podstawie wyników pomiaru wielkości wyjściowej  $y$ , zgodnie z zależnością

$$\hat{v} = y^2, \quad (29)$$

II krok - rozwiązanie równania dynamicznego (19) ze względu na  $u$  dla znanych ocen  $\hat{v}$  - otrzymuje się ocenę wielkości pomocniczej  $\hat{u}$ ,

III krok - rozwiązywanie równania odwrotnego w stosunku do równania (18):

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{u}}. \quad (30)$$

Powyższy ciąg operacji jest równoważny rozwiązaniu równania ogólnego (17) ze względu na  $x$  dla znanych wartości  $y$ . Ciąg operacji przetwarzania analogowego i odtwarzania można przedstawić w kolejności podanej na rys. 3.



## 5. Uwagi końcowe

Przedstawioną procedurę wyznaczania dynamicznego przebiegu wejściowego nieliniowego przetwornika analogowego można scharakteryzować następująco. Przetwarzanie analogowe opisuje się ciągiem równań (23), z których każde opisuje elementarne ogniwo przetwarzania. Równania te mogą - zgodnie ze wzorem (5) - być podstawą opisu źródeł błędów systematycznych, wprowadzanych przez każde z tych ogniw. W tym ujęciu odtwarzanie może być interpretowane jako korekta błędów systematycznych, zawartych w wyniku pomiaru wielkości  $y$ , przeprowadzana w kolejności odwrotnej do ich wprowadzania. Wyeliminowanie każdego z błędów cząstkowych odbywa się drogą rozwiązania odpowiedniego równania odwrotnego (25). Cała procedura jest ciągiem kolejno po sobie następujących korekty cząstkowych błędów systematycznych - statycznych i dynamicznych.

Scharakteryzowany sposób odtwarzania ukierunkowany jest na zastosowania w układach programalnych. Sposób ten umożliwia budowę względnie prostych numerycznie, a zatem szybkich algorytmów korekty błędów statycznych i dynamicznych do pracy na bieżąco. Zastosowanie takich algorytmów umożliwia poprawę zarówno wypadkowej dokładności, jak i szybkości działania przetworników pomiarowych współpracujących z mikroprocesorem, czyli tzw. inteligentnych przetworników pomiarowych [3].

## LITERATURA

- [1] Głasko W.G.: Obratnyje zadaczi matematycznej fiziki. Izdat. MGU, 1984.
- [2] Hagel R., Zakrzewski J.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1984.
- [3] Jakubiec J.: Specificity of Measurement Problems of Intelligent Transducer. X-th IMEKO World Congress, Praha 1985, Vol.3.

Recenzent: Prof. mgr inż. Artur Metal

Wpłynęło do Redakcji 15 września 1987 r.

**МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ И КОРРЕКЦИИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ  
В ПРОЦЕССЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ**

**Р е з ю м е**

Преобразование динамических величин нелинейными, измерительными преобразователями связано с выступанием систематических погрешностей, которых значения могут превышать значения входной величины. Восстановление мгновенных значений измеряемой величины можно в этом случае осуществлять практически только в микропроцессорных приборах. В статье представляется метод решения этой задачи путём решения обратного уравнения преобразования. Общее уравнение, описывающее статические или динамические свойства преобразователя, представляется как цепь частных уравнений, моделирующих только один тип погрешностей. Коррекция погрешностей преобразования - статических или динамических - осуществлена как решение уравнений обратных к выделенным, частным уравнениям.

**A METHOD OF MODELLING AND CORRECTING SYSTEMATIC  
ERRORS IN RECONSTRUCTION PROCESS OF DYNAMIC INPUT  
SIGNAL OF NON-LINEAR TRANSDUCER**

**S u m m a r y**

One describes a method of modelling systematic errors of the transducer. The essence of the method consists in splitting from the general equation - describing both static and dynamic properties of the analog transducer - the partial equations, which model only one kind of these properties. The reconstruction is carried out as a process of solving the inverse partial equations.

Dynamic signal processing performed by a measuring transducer of highly non - linear characteristic is connected with arising systematic errors of the values that can exceed the measured value. The reproduction of input quantity function of such a transducer is a complicated problem realized in practical manner only in microprocessor systems.

An idea of this problem's solution by solving the equation inverse to the the equation describing the transducer properties has been presented in the paper.

One describes the way of modelling systematic errors of processing used to this purpose; the essence of the method consists in eliminating - from the general equation - partial descriptions of the transducer's static and dynamic properties in a form of the equation chain.

The reconstruction is carried out as a process of solving the equations inverse to the eliminated partial equations.