ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1989

Seria: ELEKTRYKA z.108 Nr kol. 947

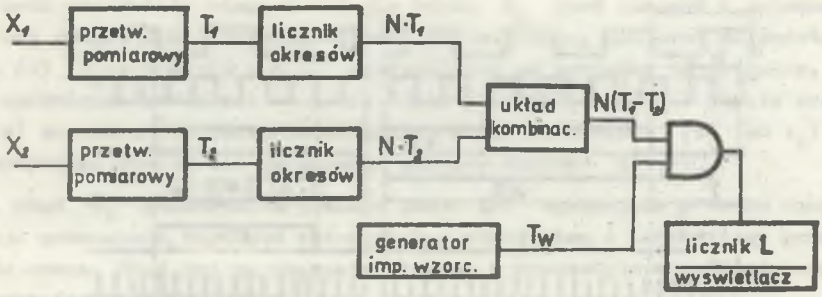
Henryk URZĘDNICZOK

BŁĄD KWANTOWANIA PRZY POMIARZE METODĄ RÓŻNICOWĄ

Streszczenie. W artykule opisano cyfrową metodę bezpośredniego pomiaru różnicy przemieszczeń liniowych przy zastosowaniu w torze pomiarowym przetworników o wyjściu częstotliwościowym z czujnikami pojemnościowymi. Dokonano analizy niedokładności pomiaru metodą różnicową ze względu na powstające w układzie błędy kwantowania; określono odpowiadający im rozkład prawdopodobieństwa wypadkowego błędu wyniku pomiaru. Wykazano, że niedokładność skrajna pomiaru różnicy przemieszczeń nie zależy od wartości tej różnicy, a zależy od wartości mierzonych przemieszczeń. Podano także zależność skrajnej niedokładności pomiaru od stosunku liczby mierzonych okresów sygnałów generowanych przez przetworniki pomiarowe do pojemności licznika impulsów wzorcowych.

1. Cyfrowa metoda różnicowa

Przy pomiarze różnicy przemieszczeń liniowych w układzie pomiarowym z czujnikami pojemnościowymi zachodzi konieczność określenia różnicy okresów dwóch generatorów. Można tego dokonać przez oddzielne zmierzenie obu okresów, a następnie arytmetyczne odjęcie wyników lub metodą różnicową przez bezpośredni cyfrowy pomiar różnicy okresów w układzie pomiarowym przedstawionym schematem blokowym na rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu do pomiaru cyfrową metodą różnicową

Fig. 1. Diagram of the system for the digital differential method measurement

Przetworniki pomiarowe są multiwibratorami, których okres zależny jest liniowo od pojemności czujnika pojemnościowego, a ta z kolei zależna jest od przemieszczenia X. Równanie przetwarzania ma postać:

$$T = f(X) = k\,X + T_o, \tag{1}$$

gdzie:

T_o - okres odpowiadający $X = 0$,

k - czułość przetwornika.

Na wyjściu liczników 1 i 2 w każdym cyklu pomiarowym generowany jest impuls o czasie trwania równym odpowiednio N okresów T_1 i T_2. Układ kombinacyjny wytwarza impuls o początku w chwili t_3 (zakończenie zliczania w liczniku w tym torze, w którym okres jest krótszy), a końcu w chwili t_4 (zakończenie zliczania w torze, w którym okres jest dłuższy). Czas trwania tego impulsu $\Delta T = N(T_1-T_2)$ jest mierzony cyfrowo przez zliczanie impulsów generatora wzorcowego w liczniku L. Liczba L_{wsk} zawarta w liczniku po zakończeniu zliczania odpowiada różnicy przemieszczeń:

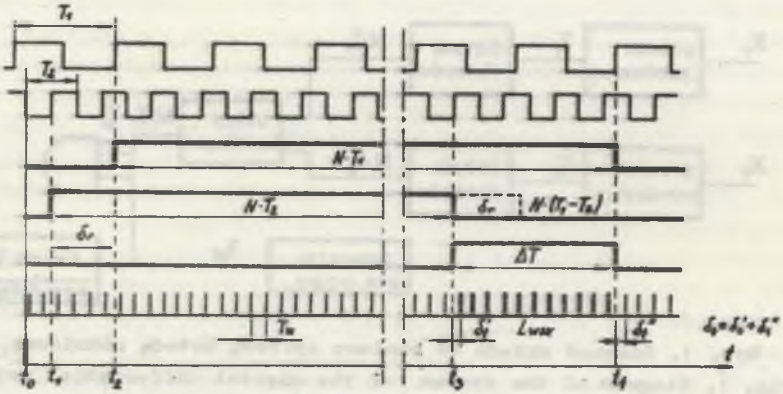
$$X_1 - X_2 = \frac{\Delta T}{k\,N} = \frac{T_w\,L_{wsk}}{k\,N}, \tag{2}$$

gdzie:

N - liczba mierzonych okresów (dowolna liczba naturalna),

T_w - okres generatora wzorcowego.

Diagram czasowy na rys. 2 ilustruje zasadę pomiaru różnicy okresów.



Rys. 2. Diagram czasowy sygnałów w układzie przedstawionym na rys.1

Fig. 2. Time diagram of the signals in the system shown in fig. 1

2. Błędy kwantowania

Realizacja pomiaru cyfrową metodą różnicową w opisanym wyżej układzie prowadzi do błędów o charakterze losowym. Na rys. 2 zaznaczono źródła tych błędów.

1. Błąd δ_r określenia różnicy N okresów wynikający z braku synchronizacji początków zliczania okresów w obu torach pomiarowych. Generatory w obu torach pracują asynchronicznie, niezależnie od siebie, a zliczanie w każdym z torów rozpoczyna się w momencie wystąpienia pierwszego po impulsie wyzwalającym narastającego zbocza sygnału z tych generatorów. Odcinek czasu ΔT nie jest zatem równy $N(T_1-T_2)$. Błąd ten można określić jako:

$$\delta_r = \Delta T - N(T_1 - T_2) \tag{3}$$

Ma on charakter losowy o prostokątnym rozkładzie prawdopodobieństwa, ponieważ jest jednakowo prawdopodobne każde z przesunięć czasowych chwili t_2 (rys. 2) względem chwili t_1 w obrębie jednego (większego) z dwu okresów T_1 i T_2. Można zapisać:

$$p(\delta_r) = \begin{cases} \frac{1}{T_m} & \delta_r \in (\frac{T_m}{2} \cdot \frac{T_m}{2}) \text{ - przedział niepewności} \\ 0 & \text{poza tym przedziałem.} \end{cases} \tag{4}$$

gdzie:

$T_m = \max(T_1, T_2)$,

δ_r - błąd bezwzględny określenia różnicy N okresów.

Szerokość przedziału niepewności dla błędu δ_r jest zmienna i zależna od wartości przesunięć, których różnica jest mierzona, ponieważ na podstawie wzoru (1) $T_m = k \max(X_1, X_2)$, a niezależna od wartości tej różnicy. Czas opóźnienia od chwili otwarcia torów pomiarowych (t_0 - impuls wyzwalający) do chwili rozpoczęcia zliczania w jednym z torów (t_1 lub t_2) nie wpływa na dokładność określenia różnicy okresów $N(T_1-T_2)$.

2. Błąd δ_t kwantowania pomiaru czasu ΔT wynikający z braku synchronizacji generatora impulsów wzorcowych z początkiem i końcem tego przedziału czasu. Błąd ten ma charakter losowy o prostokątnym rozkładzie prawdopodobieństwa [1].

$$p(\delta_t) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot T_w} & \delta_t \in (-T_w \cdot T_w) \text{ - przedział niepewności} \\ 0 & \text{poza tym przedziałem} \end{cases} \tag{5}$$

gdzie:

T_w - okres generatora impulsów wzorcowych,

δ_t - błąd bezwzględny pomiaru różnicy N okresów.

Szerokość przedziału niepewności dla tego błędu jest stała i równa $2T_w$.

Wynik pomiaru różnicy $N(T_1-T_2)$ obarczony jest zarówno błędem określenia tej różnicy, jak i błędem jej pomiaru. Błąd wypadkowy wynosi [1]:

$$\delta_w = \delta_r + \delta_t. \tag{6}$$

Ma on także charakter losowy o rozkładzie prawdopodobieństwa, który wynika ze złożenia rozkładów błędów δ_r i δ_t. Ponieważ zmienne losowe, którymi są błędy δ_t i δ_r; są niezależne, postać tego rozkładu można określić przez obliczenie splotu rozkładów (4) i (5) [2]:

$$p(\delta_w) = p(\delta_t) * p(\delta_r) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\delta_t)\, p(\delta_w-\delta_r)\, d\delta_t \tag{7}$$

po przeliczeniu otrzymamy:

$$p(\delta_w)=\begin{cases} \frac{1}{2T_wT_m}\left(\delta_w + T_w + \frac{T_m}{2}\right); & \delta_w \in \left(-T_w - \frac{T_m}{2}\right) \cup \left(-T_w + \frac{T_m}{2}\right) \\ \frac{1}{2T_w}; & \delta_w \in \left(-T_w + \frac{T_m}{2}\right) \cup \left(T_w - \frac{T_m}{2}\right) \\ \frac{1}{2T_wT_m}\left(-\delta_w + T_w + \frac{T_m}{2}\right); & \delta_w \in \left(T_w - \frac{T_m}{2}\right) \cup \left(T_w + \frac{T_m}{2}\right) \\ 0; & \text{poza tymi przedziałami} \end{cases} \tag{8}$$

Wykres $p(\delta_w)$ dla różnych wartości T_m (co odpowiada różnym przesunięciom X_1 i X_2) przedstawia rysunek 3.

Miarą niedokładności pomiaru metodą różnicową jest niepewność wynikająca z rozkładu prawdopodobieństwa wypadkowego błędu kwantowania. Jeżeli przyjąć poziom ufności p=1, to przedział niepewności wyniku jest sumą tych przedziałów w zależności (8), w których wartość prawdopodobieństwa jest niezerowa, a niepewność bezwzględna wyniku pomiaru różnicy okresów wynosi:

$$\Delta_w = \pm \left(T_w + \frac{T_m}{2}\right) \quad [s] \tag{9}$$

lub po uwzględnieniu zależności (2) niepewność bezwzględna wyniku pomiaru różnicy przemieszczeń wynosi:

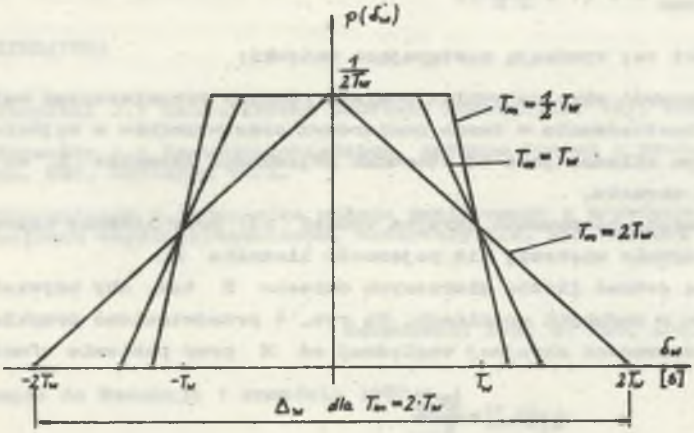
$$\Delta_w = \pm \frac{1}{k\,N}\left(T_w + \frac{T_m}{2}\right) \quad [m] \tag{10}$$

Oznacza to, że wynik pomiaru może być różny od wartości rzeczywistej co najwyżej o Δ_w.
Ponieważ liczbę L_{wsk} zawartą w liczniku po zakończeniu zliczania impulsów wzorcowych w czasie $N(T_1 - T_2)$ można obliczyć jako:

$$L_{wsk} = \frac{N\,(T_1 - T_2)}{T_w}, \tag{11}$$

stąd niepewność wyrażona w jednostkach bezwymiarowych (jako liczba jednostek licznika) może być obliczona następująco:

$$\Delta_{wL} = \pm\left(\frac{T_w + T_m/2}{T_w}\right) = \pm\left(1 + \frac{T_m}{2 \cdot T_w}\right) \tag{12}$$



Rys. 3. Rozkład prawdopodobieństwa wypadkowego błędu kwantowania przy pomiarze przemieszczenia cyfrową metodą różnicową

Fig. 3. Probability distribution of the resultant quantization error by measuring in digital differential method

3. Wnioski

Ze względu na wypadkowy błąd kwantowania przy metodzie różnicowej uzyskany wynik pomiaru nie jest stały przy stałej wartości różnicy przesunięć i może się wahać wokół wartości określonej zależnością (11) w granicach $\pm\Delta_{wL}$. Szerokość tego przedziału zależy od wartości przesunięć, których różnicę mierzymy, a nie zależy od wartości tej różnicy. Maksymalne wartości niepewności Δ_{wL} występują przy maksymalnych wartościach przesunięć, ponieważ wtedy T_m osiąga największą wartość.

Jeżeli L_{max} jest pojemnością licznika L, to aby zachodziła relacja $L_{max} \triangleq X_{max}$, należy dobrać okres generatora wzorcowego:

$$T_w = \frac{N}{L_{max}} \cdot T_{max}, \tag{13}$$

gdzie:

$$T_{max} = \max(T_m) = k\, X_{max} + T_o$$

na podstawie (12) można zatem skrajną niepewność wyniku pomiaru wyrazić jako:

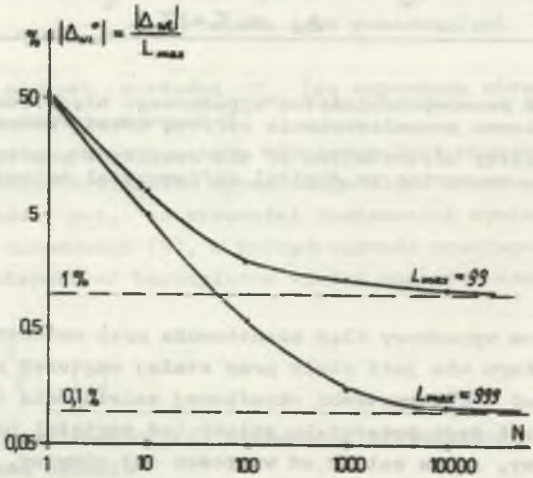
$$\Delta_{wL\,max} = +\left(1 + \frac{L_{max}}{2\,N}\right). \tag{14}$$

Z zależności tej wynikają następujące wnioski:

1. Niepewność skrajna wyniku pomiaru różnicy przemieszczeń metodą cyfrową przy zastosowaniu w torze pomiarowym przetworników o wyjściu częstotliwościowym zależna jest od stosunku pojemności licznika L do liczby mierzonych okresów.

2. Minimalna niepewność skrajna wynosi +1 przy liczbie mierzonych okresów znacznie większej niż pojemność licznika L.

3. Można dobrać liczbę mierzonych okresów N tak, aby uzyskać niepewność wyniku w zadanych granicach. Na rys. 4 przedstawiono przykładową zależność niepewności skrajnej względnej od N przy poziomie ufności p=1.



Rys. 4. Zależność skrajnej niepewności pomiaru różnicy przemieszczeń od ilości mierzonych okresów

Fig. 4. Dependence of the extreme unreliability of displacement difference measurement on the number of measured periods

Zwiększanie liczby mierzonych okresów zmniejszając niepewność, zwiększa dokładność statyczną, lecz wydłuża jednocześnie czas przetwarzania, co w przypadku pomiarów dynamicznych jest przyczyną błędu uśredniania i opóźnienia wyniku oraz błędu dynamicznego związanego z nieliniowością dynamiczną układu pomiarowego [3].

Jeżeli pomiar różnicy przemieszczeń byłby dokonany w układzie nieróżnicowym przez niezależny pomiar czasów $N T_1$ i $N T_2$ oraz arytmetyczne odjęcie, to niepewność skrajna wyniku wynosiłaby +2. Wynika to ze złożenia rozkładów błędów kwantowania przy pomiarze czasu metodą cyfrową - zależność (3). Niepewność ta byłaby stała (niezależna od wartości mierzonych ani od liczby mierzonych okresów), lecz jej wartość byłaby dwukrotnie większa niż minimalna wartość niepewności (przy doborze $N \gg L_{max}$) dla pomiaru różnicowego.

LITERATURA

[1] Jaworski J.: Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979.

[2] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.

[3] Urzędniczok H.: Dynamika układu pomiarowego z przetwornikiem przy wyjściu częstotliwościowym. Materiały XIX, MKM Rzeszów

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Stefan Kubisa

Wpłynęło do Redakcji 1 września 1987 r.

ПОГРЕШЕННОСТ КВАНТОВАНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Р е з ю м е

В статье излагается цифровой метод измерения разности смещения при использовании частотных преобразователей с емкостными датчиками. Представлен анализ неточности дифференциального метода измерения при рассмотрении возникающих погрешенностях квантирования. Определена соответствующая функция распределения суммарной погрешенности измерения. Доказано, что максимальная неточность измерения разности смещения независимая от значения этой разности, но зависимая от значения измеряемых смещении. Определена также зависимость максимальной неточности измерения от соотношения числа измеренных периодов сигналов генерированных в преобразователях к емкости счетчика часовых импульсов.

QUANTIZATION ERROR WHEN MEASURING BY MEANS OF DIFFERENTIAL METHOD

S u m m a r y

The dependence of extreme inaccuracy on the proportion the number of measured periods of signals from the transducers to the content of the clock pulse counter was specified too. A digital method of direct measurement of the linear displacement difference by using transducers of frequency output with capacitive sensors in the measuring chain has been described in the paper. An analysis of measurment inaccuracy in the differential method with regard to the quantization errors created in the system has been accomplished, the corresponding probability distribution of the measurement result resultant error has been specified. It has been probed that extreme inaccuracy ofthe displacement difference measurement does not depend on this difference value while it depends on the values of measured displacements. A dependence of the extreme inaccuracy on the ratio of measured signal periods generated by measuring transducers to the capacity of the standard impuls counter has also been given.