ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 115 Nr kol. 1045

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI
Instytut Elektrotechniki
Teoretycznej i Przemysłowej
Politechniki Śląskiej

ANALIZA BEZINERCYJNYCH SIECI OSOBLIWYCH METODĄ FORMUŁ BOOLOWSKICH

Streszczenie. W pracy pokazano opis sieci zawierających elementy osobliwe (nullator, norator, przerwę i zwarcie) za pomocą algebry Boole'a. Wprowadzono transformację (1) odwzorowującą zbiór liczb rzeczywistych w zbiór dwuelementowy. Dwójnik osobliwy opisano za pomocą formuły boolowskiej (2). Przedstawiono twierdzenia umożliwiające szukanie dwójnika zastępczego równoważnego danej sieci osobliwej szeregowo-równoległej. Wykazano istnienie dla dwójników osobliwych reguły rozdzielności połączenia równoległego względem szeregowego oraz rozdzielności szeregowego względem równoległego. Pokazano możliwość analizy sieci osobliwych nieszeregowo-równoległych poprzez sprowadzanie ich do równoważnych im sieci szeregowo-równoległych. Przykłady obliczeń z zastosowaniem formuł boolowskich przedstawiono na końcu pracy w pięciopunktowym dodatku.

1. Wprowadzenie

W roku 1961 Carlin i Youla [4] wprowadzili do teorii obwodów pojęcie elementów osobliwych nullatora i noratora zwanych także patologicznymi, zdegenerowanymi lub singularnymi, w których wartości prądów i napięć określa się jako zerowe lub dowolne. Podali także teoretyczne modele tych elementów z wykorzystaniem żyratorów lub cyrkulatorów. W roku 1967 Davies [8] zalicza do elementów osobliwych także zwarcie oraz przerwę. Na bazie tych elementów wielu autorów w latach sześćdziesiątych i później wyprowadza modele podstawowych czwórników stosowanych w syntezie układów aktywnych, takich jak źródła sterowane [7] , inwertory [2] , żyratory [3] oraz inwertory dodatnioimpedancyjne [17] , dla których w realizacjach praktycznych pary nullator-norator zastępowane są tranzystorem a następnie wzmacniaczem operacyjnym. Ważną rolę w układach aktywnych odegrał także czwórnik osobliwy nazwany nullorem, będący nierozłączną parą nullator-norator. Pierwszy raz był opisany w pracach Carlina [4] , [5] , a jego szersze zastosowania przedstawił Martinelli [12] , [13] , natomiast najbardziej zbliżony do teoretycznego model fizyczny nullora w postaci układu scalonego przedstawiono w pracy [11] . W roku 1967 Chua [6] zauważa, że pojęcie elementu osobliwego można uogólnić na szeroką klasę dwójników, których charakterystyki na płaszczyźnie prąd-napięcie zawierają oprócz linii krzywej także obszary ciągłe płaszczyzny lub izolowane jej punkty. W pracy [21] autor przedstawia możliwość dołączenia do zbioru elementów osobliwych idealne źródła autonomiczne jako przesunięte przerwy i zwarcia, oraz elementu o charakterystyce punktowej w dowolnym miejscu płaszczyzny u-i, jako przesuniętego nullatora nazwanego źródlatorem i pokazuje jego występowanie w układach fizycznych. Podobnie w pracy [22] zaliczono do zbioru elementów osobliwych idealne układy diodowe, pokazano teoretyczne istnienie elementu będącego albo przerwą, albo zwarciem lecz niejednocześnie, który w wersji przesuniętej może się pojawić w obwodach nieliniowych z analogowymi układami mnożącymi [25] .

W niniejszej pracy oraz w [27] w odróżnieniu od analizy układów dynamicznych zawierających osobliwości [1] , [19] , [26] , przedstawiono koncepcję analizy i syntezy bezinercyjnych obwodów zawierających podstawowy zbiór elementów osobliwych nullator, norator, przerwę i zwarcie z zastosowaniem algebry Boole'a. Ten sposób opisu sieci osobliwych pozwolił na jednolite ujęcie opisu teorii elementów osobliwych oraz umożliwił uzyskanie pewnych nowych wyników. Ilustracją tego mogą być układy przedstawione w pracy [27] , a będące uzupełnieniem klasycznych połączeń dwójników i czwórników elektrycznych. Jak wynika z dotychczasowych badań autora, możliwe jest rozszerzenie metody opisu sieci osobliwych poprzez formuły boolowskie na sieci zawierające diodowe elementy osobliwe i źródła autonomiczne oraz w sposób przybliżony na dowolne obszary osobliwe na płaszczyźnie u-i. Natomiast przez wprowadzenie pojęcia macierzowych formuł boolowskich [23] można usprawnić tę metodę rachunkowo.

2. Podstawowy zbiór elementów osobliwych w ujęciu algebry Boole'a

Zakłada się, że do zbioru Θ elementów osobliwych będą należeć dwójniki, w których zmienne zaciskowe mogą przyjmować wartości tylko zerowe lub dowolne rzeczywiste, będą to zatem nullator, norator, przerwa i zwarcie.

Aby do opisu sieci osobliwych złożonych z dwójników zbioru Θ zastosować algebrę Boole'a, należy wprowadzić "transformację" (relację) odwzorującą zbiór liczb rzeczywistych R w zbiór dwuelementowy $B = \{0,1\}$, o postaci:

Definicja 1

$$Nx = \bar{x} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \in R \text{ i jest równe tylko } 0, \\ 1, & \text{gdy } x \in R \text{ i jest dowolne.} \end{cases} \tag{1}$$

Stąd można też w oczywisty sposób określić relację N^{-1} odwrotną do N przekształcającą zbiór $\{0,1\}$ w zbiór liczb rzeczywistych.

Definicja 1a

$$N^{-1}\tilde{x} = \begin{cases} 0, \text{ gdy } \tilde{x} \in \{0,1\} & \text{i jest równe } 0, \\ R, \text{ gdy } \tilde{x} \in \{0,1\} & \text{i jest równe } 1. \end{cases} \tag{2}$$

Twierdzenie 1

Tak utworzony zbiór $\tilde{X} = \{0,1\}$ jest zbiorem algebry Boole'a określonej jako system $\langle \tilde{X}, +, ., 0,1 \rangle$, gdyż spełnia on aksjomaty:

$\bigwedge a, b, c \in \tilde{X}$

1^* $a+b \in \tilde{X}$	1^{**} $a.b \in \tilde{X}$
2^* $a+b = b+a$	2^{**} $a.b = b.a$
3^* $a.(b+c) = a.b+a.c$	3^{**} $a+(b.c) = (a+b)(a+c)$
4^* $a+0 = a$	4^{**} $a.1 = a$

$\bigwedge a \in \tilde{X} \bigvee \bar{a} \in X$, że

5^* $a+\bar{a} = 1$	5^{**} $a.\bar{a} = 0$

Dowód

Zgodnie z relacją (1) działania "+" i "." odpowiadają działaniom na zbiorach 0 i R, zatem zachodzi:

1^*	1
$1 + 1 = 1 \Longleftrightarrow R \cup R = R$	$1 \cdot 1 = 1 \Longleftrightarrow R \cap R = R$
$1 + 0 = 1 \Longleftrightarrow R \cup 0 = R$	$1 \cdot 0 = 0 \Longleftrightarrow R \cap 0 = 0$
$0 + 1 = 1 \Longleftrightarrow 0 \cup R = R$	$0 \cdot 1 = 0 \Longleftrightarrow 0 \cap R = 0$
$0 + 0 = 0 \Longleftrightarrow 0 \cup 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0 \Longleftrightarrow 0 \cap 0 = 0$

gdzie $\cup$ i $\cap$ oznaczają odpowiednio działania sumy i iloczynu zbiorów.

Zatem wyniki obu działań na elementach ze zbioru X należą także do tego zbioru. Punkty 2^* i 2^{**} spełnione są na podstawie drugiej i trzeciej linijki dowodu punktów 1^* i 1^{**} jako działania na zbiorach. Punkty 3^* i 3^{**} można wykazać za pomocą tablic podobnie jak dla punktów 1^* i 1^{**}. Punkt 4^* wynika z 2 i 3 linijki dowodu punktu 1^* , a punkt 4^{**} z 2 i 3 linijki dowodu punktu 1^* .

Jeżeli:

$a = 1, \quad \bar{a} = 0 \Longleftrightarrow \bar{R} = 0,$ natomiast

$a = 0, \quad \bar{a} = 1 \Longleftrightarrow \bar{0} = R,$ wtedy:

punkt 5^* spełniony na podstawie linijek 2 i 3 w dowodzie punktu 1^* , a punkt 5^{**} na podstawie linijek 2 i 3 w dowodzie punktu 1^{**}. Zatem wykazano prawdziwość twierdzenia 1.

Definicja 2

Formułę boolowską wiążącą transformacje N prądu i napięcia na zaciskach dwójnika osobliwego ze zbioru Θ przyjmuje się o postaci:

$$(A \odot \tilde{i}) + (B \odot \tilde{u}) = 0, \tag{2}$$

w której:

$\tilde{i}$, $\tilde{u}$ - transformacje N prądu i napięcia

$\odot$ - działanie równoważności zdefiniowane jako:

$$\bigwedge_{a,b \in \{0,1\}} \quad a \odot b = \bar{a}\bar{b} + ab$$

A,B - operatory ("współczynniki") należące do zbioru $\{0,1\}$.

Równoważną do niej jest formuła:

$$(A \oplus \tilde{i}) \cdot (B \oplus \tilde{u}) = 1, \tag{3}$$

w której $\oplus$ jest działaniem suma modulo 2 zdefiniowane jako:

$$\bigwedge_{a,b \in \{0,1\}} \quad a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}.$$

Formułę (3) otrzymuje się z formuły (2) poprzez zanegowanie obustronne. (Dodatek 1).

Spełnienie tych formuł dla określonych wartości transformacji N prądu i napięcia wymaga, aby operatory A i B przyjęły określone wartości ze zbioru $\{0,1\}$, a zatem określają one jednoznacznie rodzaj elementu osobliwego opisywanego tymi formułami.

Dla zbioru Θ przedstawione są one w tablicy 1.

Tablica 1

A	B	Rodzaj elementu
1	1	nullator
0	0	norator
1	0	przerwa
0	1	zwarcie

Istotnym wnioskiem wynikającym z tak zdefiniowanych formuł (2) i (3) jest:

Twierdzenie 2

Dla każdego dwójnika osobliwego ze zbioru Θ opisywanego formułami (2) lub (3) operatory (A,B) opisujące go wynoszą:

$$A = \bar{\tilde{i}}, \qquad B = \bar{\tilde{u}} \tag{4}$$

Dowód. Aby formuła (2) była spełniona, z własności działania "+" wynika

$$A \odot \tilde{i} = 0 \quad \text{i} \quad B \odot \tilde{u} = 0,$$

co na podstawie własności równoważności daje natychmiast równanie (4).

3. Łączenie elementów osobliwych

Przez łączenie elementów osobliwych rozumiane będzie poszukiwanie elementu osobliwego o dwu zaciskach równoważnego n elementom osobliwym połączonym w określony sposób względem tych zacisków. Aby móc to wykonać, należy wprowadzić następujące określenie:

Definicja 3

Dwa dwójniki osobliwe opisane formułami boolowskimi:

$$(A_1 \odot \tilde{i}_1) + (B_1 \odot \tilde{u}_1) = 0 \quad \text{oraz}$$
$$(A_2 \odot \tilde{i}_2) + (B_2 \odot \tilde{u}_2) = 0$$

są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 = A_2 \quad \text{i} \quad B_1 = B_2. \tag{5}$$

Podstawowych połączeń szeregowego i równoległego dotyczą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3

Przy połączeniu szeregowym elementów osobliwych d_1 i d_2 opisanych formułami boolowskimi typu (2) o postaci:

$$(A_1 \odot \tilde{i}_1) + (B_1 \odot \tilde{u}_1) = 0, \qquad (A_2 \odot \tilde{i}_2) + (B_2 \odot \tilde{u}_2) = 0$$

dwójnik osobliwy zastępczy opisuje formuła $(A \odot \tilde{i}) + (B \odot \tilde{u}) = 0$, w której:

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 \cdot B_2 \tag{6}$$

Dowód. Przy połączeniu szeregowym dla prądów i napięć oraz ich transformacji N zachodzi:

a) Aby było spełnione $i = i_1 = i_2$, to na podstawie własności działania "." (punkt 1^{**} dowodu tw. 1) musi być $\tilde{i} = \tilde{i}_1 \cdot \tilde{i}_2$, stąd na podstawie wzoru (4)

$$A = \bar{\tilde{i}} = \overline{\tilde{i}_1 \cdot \tilde{i}_2} = \bar{\tilde{i}}_1 + \bar{\tilde{i}}_2 = A_1 + A_2.$$

Natomiast

b) Aby było spełnione $u = u_1 + u_2$, to na podstawie własności działania "+" (punkt 1* dowodu tw. 1) musi być $u = u_1 + u_2$, stąd na podstawie wzoru (4)

$$B = \bar{\tilde{u}} = \overline{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2} = \bar{\tilde{u}}_1 \, \bar{\tilde{u}}_2 = B_1 \, B_2.$$

Przykład połączenia szeregowego podano w dodatku 2.

Twierdzenie 4

Przy połączeniu równoległym elementów osobliwych d_1 i d_2 opisanych formułami takimi jak w twierdzeniu 3, dwójnik osobliwy zastępczy opisuje formuła, w której operatory A i B wynoszą:

$$A = A_1 \, A_2, \qquad B = B_1 + B_2. \tag{7}$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3 dla połączenia równoległego zachodzi:

a) $i = i_1 + i_2 \longrightarrow \tilde{i} = \tilde{i}_1 + \tilde{i}_2$, czyli

$$A = \bar{\tilde{i}} = \overline{\tilde{i}_1 + \tilde{i}_2} = \bar{\tilde{i}}_1 \, \bar{\tilde{i}}_2 = A_1 \, A_2,$$

b) $u = u_1 = u_2 \longrightarrow \tilde{u} = \tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2$, czyli

$$B = \bar{\tilde{u}} = \overline{\tilde{u}_1 \, \tilde{u}_2} = \bar{\tilde{u}}_1 + \bar{\tilde{u}}_2 = B = B_1 + B_2.$$

Przykład połączenia równoległego podano w dodatku 3.

Twierdzenia 3 i 4 można uogólnić na przypadki n dwójników osobliwych połączonych szeregowo lub równolegle.

Stąd:

Twierdzenie 5

Dla n dwójników osobliwych opisanych formułami boolowskimi:

$$(A_1 \odot \tilde{i}_1) + (B_1 \odot \tilde{u}_1) = 0$$

$$(A_2 \odot \tilde{i}_2) + (B_2 \odot \tilde{u}_2) = 0$$

$$(A_n \odot \tilde{i}_n) + (B_n \odot \tilde{i}_n) = 0$$

dwójnik osobliwy równoważny opisuje formuła boolowska typu (2), dla której przy połączeniu szeregowym zachodzi

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \qquad B = \prod_{k=1}^{n} B_k, \tag{8}$$

natomiast dla połączenia równoległego

$$A = \prod_{k=1}^{n} A_k, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} B_k, \tag{9}$$

gdzie symbole $\sum$ i $\prod$ oznaczają wielokrotne wykonanie działań "+" i ".".

Dowód twierdzenia 5 wynika z n-krotnego stosowania twierdzeń 3 i 4.

Z twierdzenia 7 wynikają następujące:

Twierdzenie 6

N-krotne połączenie szeregowe lub równoległe dwójnika osobliwego formułą $(A_1 \odot \tilde{i}_1) + (B_1 \odot \tilde{u}_1) = 0$ jest równoważne jemu samemu.

Dowód

Dla połączenia szeregowego z twierdzenia 6 wynika:

$A = \underbrace{A_1 + A_1 + \dots A_1}_{n} = A_1$ na podstawie (n-1)-krotnego stosowania reguły

$A_1 + A_1 = A_1$ wynikającej z własności działania "+"

$B = \underbrace{B_1\, B_1 \dots B_1}_{n} = B_1$ na podstawie (n-1)-krotnego stosowania reguły

$B_1 \cdot B_1 = B_1$ wynikającej z własności działania ".".

Analogicznie można udowodnić twierdzenie 8 dla połączenia równoległego.

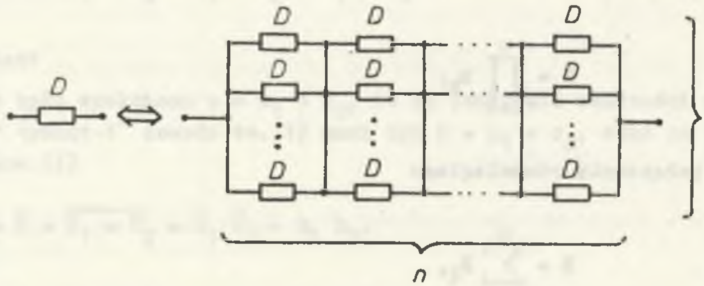
Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 7

Każdy dwójnik osobliwy można przedstawić w postaci równoległego lub szeregowego połączenia n równoważnych mu dwójników osobliwych.

Wynika z niego także prawdziwość równoważności dwójników przedstawionych na rys. 1.

Z własności 3^* i 3^{**} twierdzenia 1 wynikają następujące możliwości połączeń dwójników osobliwych przedstawione w postaci twierdzeń 8 i 9 oraz na rysunkach 2 i 3.



Rys. 1

Twierdzenie 8

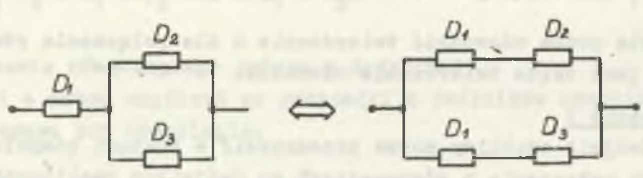
Połączenie szeregowe dwójnika osobliwego D_1 z dwoma różnymi dwójnikami D_2 i D_3 połączonymi równolegle jest równoważne połączeniu równoległemu dwu gałęzi o szeregowych połączeniach D_1 z D_2 i D_1 z D_3. (rys. 2) i odwrotnie.

Dowód

Niech D_1 opisują operatory (A_1,B_1), $D_2(A_2,B_2)$ i $D_3(A_3,B_3)$, stąd:

$$A = A_1 + A_2 A_3 = (A_1 + A_2)(A_1 + A_3) \quad \text{-z własności } 3^{**},$$

$$B = B_1 (B_2 + B_3) = B_1 B_2 + B_1 B_3 \quad \text{-z własności } 3^{*}.$$



Rys. 2

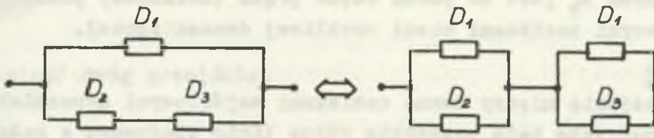
Twierdzenie 9

Połączenie równoległe dwójnika osobliwego D_1 z dwoma różnymi dwójnikami D_2 i D_3 połączonymi szeregowo jest równoważne połączeniu szeregowemu dwu równoległych układów elementów D_1 z D_2 i D_1 z D_3, (rys. 3) i odwrotnie.

Dowód

$$A = A_1(A_2+A_3) = A_1A_2 + A_1A_3,$$

$$B = B_1 + B_2B_3 = (B_1+B_2)(B_1+B_3).$$



Rys. 3

Twierdzenia 8 i 9 opisują zasady połączeń, które można nazwać regułą rozdzielczości połączenia równoległego względem szeregowego dwójnika osobliwego oraz regułą rozdzielczości połączenia szeregowego względem równoległego dwójnika osobliwego.
Ogólnie dla dwuzaciskowej sieci szeregowo-równoległej złożonej z n elementów osobliwych D_1, D_2 ... D_n można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 10

Dwójnikiem równoważnym do dwuzaciskowej sieci szeregowo-równoległej złożonej z n elementów osobliwych jest dwójnik osobliwy, którego operatory opisujące A i B są funkcjami boolowskimi nie zawierającymi negacji operatorów A_1 ... A_n i B_1 ... B_n opisujących elementy składowe, czyli:

$$\left[f(A_1,A_2...A_n) \odot \tilde{i}\right] + \left[\varphi(B_1,B_2...B_n) \odot \tilde{u}\right] = 0. \qquad (10)$$

Dowód twierdzenia 12 wynika z twierdzeń 3,4 i 5, gdyż na ich podstawie operatory A i B powstają przez działania alternatywy i koniunkcji na operatorach $A_1...A_n$ i $B_1...B_n$. Nie zawierają one negacji, gdyż nie znana jest jej obwodowa realizacja na którymkolwiek z operatorów opisujących dwójnik osobliwy.

Przykład obliczenia dwójnika równoważnego do dwuzaciskowej sieci szeregowo-równoległej podano w dodatku 4.

4. Analiza sieci osobliwych nieszeregowo-równoległych

W celu umożliwienia znajdowania dwójnika równoważnego do dwuzaciskowej sieci nie będącej szeregowo-równoległym połączeniem dwójników osobliwych należy wprowadzić i zdefiniować pojęcie strugi prądowej i drogi przejścia.

Definicja 3

Struga prądowa S_k jest to pewna część prądu (składowa) przepływającego między wejściowymi zaciskami sieci osobliwej dwuzaciskowej.

Definicja 4

Drogami przejścia między dwoma zaciskami wejściowymi dwuzaciskowej sieci osobliwej nazywane będą wszystkie różne linie zbudowane z gałęzi łączących te zaciski, a nie zawierające pętli zamkniętych.

Dla sieci dwuzaciskowej o k węzłach maksymalna ilość dróg przejścia p między zaciskami wejściowymi wyraża się wzorem:

$$p = 1 + \sum_{l=1}^{k-2} W_{k-2}^{l}, \tag{11}$$

w którym:

$$W_{k-2}^{l} = \prod_{i=(k-2)-l+1}^{l} i , \tag{11b}$$

gdzie W_{k-2}^{l} jest ilością wariacji z liczby wszystkich węzłów sieci oprócz wejściowych.

Przy braku pewnych gałęzi w sieci ilość dróg przejścia zmniejsza się o te elementy wariacji, które zawierają pary liczb będących oznaczeniami końców brakujących gałęzi.

Twierdzenie 11

Ilość strug prądowych przepływających między zaciskami wejściowymi sieci dwuzaciskowej jest równa ilość p wszystkich dróg przejścia między tymi zaciskami.

Dowód

Można go przeprowadzić metodą nie wprost. Zakłada się istnienie p + 1 strug prądowych, co oznacza, że jedna z nich musi przepływać drogą zawierającą pętlę. Po odrzuceniu części gałęzi tworzących pętlę, pozostałe część jest równa jednej z dróg przejścia zgodnej z definicją, a zatem struga p + 1 jest jedną ze strug o numerach od 1 do p.

Twierdzenie 12

Prąd przepływający między wejściowymi zaciskami 1 i 2 sieci dwuzaciskowej jest równy sumie wszystkich strug prądowych między tymi zaciskami, czyli:

$$i_{12} = \sum_{k=1}^{p} S_k,$$

gdzie p - ilość dróg przejścia.

Dowód

Wynika bezpośrednio z definicji 3 oraz twierdzenia 11. Z twierdzenia 12 na podstawie definicji 1 wynika:

$$Ni_{12} = \tilde{i}_{12} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \ldots + \tilde{S}_p. \tag{12}$$

Jeżeli przez daną gałąź m sieci przepływa więcej niż jedna struga prądowa, to każda z nich na podstawie twierdzenia 7 związana jest niezależnie od siebie ze znajdującym się w tej gałęzi elementem osobliwym D_m przez operator A_m, gdyż element D_m można przedstawić jako tyle jemu równych połączonych równolegle, ile przepływa przez niego strug prądowych. Zatem dla k-tej strugi i m-tej gałęzi można zapisać formułę boolowską:

$$(A_m \odot \tilde{S}_k) + (B_m \odot \tilde{u}_m) = 0 , \tag{13}$$

w której $\tilde{u}_m$ jest transformacją N napięcia gałęziowego u_m na gałęzi m.

Twierdzenie 13

Suma napięć gałęziowych w każdej k-tej drodze łączącej zaciski wejściowe sieci 1 i 2, z przepływającą ją k-tą strugą prądową S_k jest równa napięciu między tymi zaciskami, czyli:

$$u_{12} = \sum_{m=1}^{l_k} u_m ,$$

gdzie l_k ilość gałęzi w k-tej drodze przejścia.

Dowód

Wynika z prawa Kirchoffa i definicji drogi przejścia jako zbioru gałęzi łączącego zaciski 1 i 2.

Z twierdzenia 13 na podstawie definicji 1 wynika:

$$Nu_{12} = \tilde{u}_n = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \ldots + \tilde{u}_{l_k}. \tag{14}$$

Zatem na podstawie relacji (13) i (14) dwójnik osobliwy zastępujący k-tą drogę przejścia z przepływającą przez nią strugą prądową S_k jest równoważny szeregowemu połączeniu dwójników gałęziowych tej drogi, czyli opisuje go formuła boolowska:

$$\left[(A_{1_k} + A_{2_k} + \dots A_{l_k}) \odot \tilde{S}_k\right] + \left[(B_{1_k}\, B_{2_k} \dots B_{l_k}) \odot \tilde{u}_{12}\right] = 0\,. \tag{15}$$

Dwójniki osobliwe równoważne k-tej drodze przejścia można uważać na podstawie twierdzenia 12 za połączone równolegle, zatem można sformułować wniosek:

Wniosek 1

Każda dwuzaciskowa sieć złożona z elementów osobliwych jest równoważna sieci osobliwej szeregowo-równoległej złożonej z p gałęzi równoległych zawierających połączone szeregowo elementy ze wszystkich gałęzi danej drogi. Sieć tę opisuje formuła boolowska:

$$\left[\prod_{k=1}^{p}(A_{1_k} + A_{2_k} + \dots + A_{l_k}) \odot \tilde{i}_{12}\right] + \left[\sum_{k=1}^{p}(B_{1_k}\, B_{2_k} \dots B_{l_k}) \odot \tilde{u}_{12}\right] = 0, \tag{16}$$

w której:

p - ilość gałęzi równoległych równa ilości dróg przejścia,
l_k - ilość gałęzi szeregowych w k-tej drodze przejścia,
1, 2 - numery węzłów zaciskowych wejściowych całej sieci:

Przykład podano w dodatku 5.

Dodatek 1

Obustronna negacja formuły (2) ma postać:

$$\overline{(A \odot \tilde{i}) + (B \odot \tilde{u})} = \bar{0}. \tag{1.D.1}$$

Na podstawie prawa de Morgana

$$\overline{(A \odot \tilde{i})} \cdot \overline{(B \odot \tilde{u})} = 1. \tag{2.D.1}$$

Każdy z czynników lewej strony można przekształcić następująco: (na podstawie definicji działania $\odot$)

$$\overline{(A \odot \tilde{i})} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{\tilde{i}} + A \cdot \tilde{i}} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{\tilde{i}}} \cdot \overline{A \cdot \tilde{i}} = (\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{\tilde{i}}}) \cdot (\bar{A} + \bar{\tilde{i}}) = (A + \tilde{i}) \cdot (\bar{A} + \bar{\tilde{i}}) =$$

$$= A\,\bar{A} + \tilde{i}\,\bar{A} + A\,\bar{\tilde{i}} + \tilde{i}\,\bar{\tilde{i}} = \bar{A}\,\tilde{i} + A\,\bar{\tilde{i}} \tag{3.D.1}$$

gdyż $A\bar{A} = 0$ oraz $\tilde{i}\,\bar{\tilde{i}} = 0$.

Postać (3.D.1) jest równoważna definicji działania suma modulo 2, czyli:

$$\overline{(A \odot \tilde{i})} = A \oplus \tilde{i}\,. \tag{4.D.1}$$

Podobnie można przekształcić czynnik $\overline{B \odot \tilde{u}}$.

Zatem formuła (1.D.1) jest równoważna postaci:

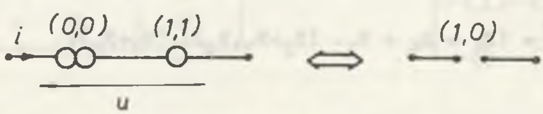
$$(A \oplus \tilde{i}) \cdot (B \oplus \tilde{u}) = 1. \tag{5.D.2}$$

Dodatek 2

Dany jest nullator i norator połączone szeregowo. Znaleźć dwójnik zastępczy równoważny do nich. Zgodnie z tabelą 1 i twierdzeniem 3 otrzymuje się:

$$(1 + 0)\odot\tilde{i} + (1 \cdot 0)\odot\tilde{u} = 0.$$

Zatem dwójnik równoważny opisuje para operatorów (A, B) = (1, 0), co oznacza, że jest on równy przerwie (rys. 4).



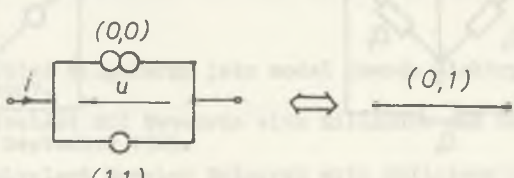
Rys. 4

Dodatek 3

Dane są nullator i norator połączone równolegle. Znaleźć dwójnik zastępczy równoważny im. Na podstawie tablicy 1 i twierdzenia 4 otrzymuje się:

$$(1 \cdot 0)\odot\tilde{i} + (0 + 1)\odot\tilde{u} = 0.$$

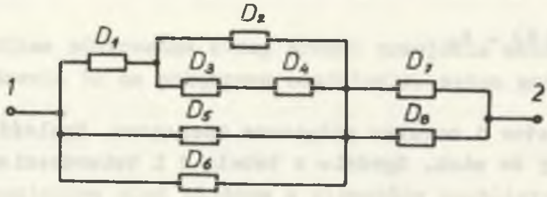
Zatem dwójnik równoważny opisuje para operatorów (A, B) = (0, 1), co oznacza, że jest on równy zwarciu (rys. 5).



Rys. 5

Dodatek 4

Dana jest sieć szeregowo-równoległa pokazana na rys. 6. Należy obliczyć operatory boolowskie A i B dwójnika osobliwego zastępczego równoważnego tej sieci na zaciskach 1 i 2.



Rys. 6

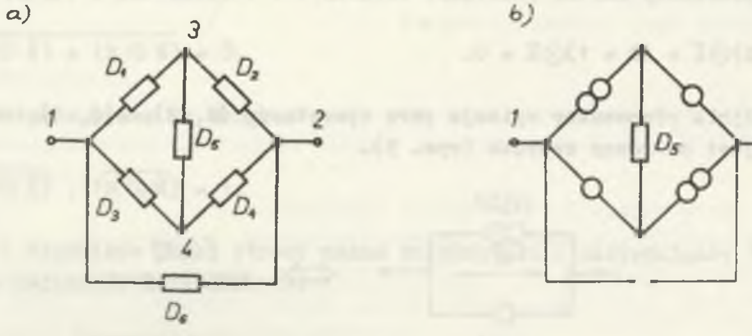
Na podstawie twierdzeń 3 i 4 operatory opisujące dwójnik zastępczy mają postać:

$$A = f(A_1 \ldots A_8) = A_5 \cdot A_6 \cdot (A_1 + A_2 \cdot (A_3 + A_4)) + A_7 \cdot A_8$$

$$B = \varphi(B_1 \ldots B_8) = (B_5 + B_6 + B_1 \cdot (B_2 + B_3 \cdot B_4)) \cdot (B_7 + B_8).$$

Dodatek 5

Dana jest sieć mostkowa pokazana na rys. 7a. Znaleźć równoważną jej dwuzaciskową sieć szeregowo-równoległą na zaciskach 1 i 2.

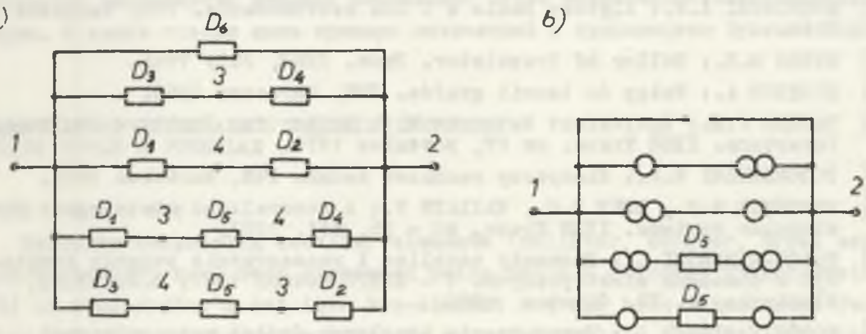


Rys. 7

Na podstawie relacji (1) i (11b) ilość dróg przejścia p tej sieci wynosi (sieć pełna czterowęzłowa):

$$p = 1 + \sum_{l=1}^{2} W_2^l = 1 + W_2^1 + W_2^2 = 1 + 2 + 2 = 5.$$

Drogi przejścia można opisać ciągami numerów węzłów, przez które przechodzą, czyli <1,2>, dla W_2^1 <1,3,2>, <1,4,2> i dla W_2^2 <1,3,4,2>, <1,4,3,2>. Przedstawiono je na rys. 8a.



Rys. 8

Niech dla przykładu sieć ta zawiera elementy pokazane na rys. 7b, czyli D_1 (0,0), D_2 (1,1), D_3 (1,1), D_4 (0,0) i D_6 (1,0), natomiast D_5 może być dowolny. Odpowiada jej wtedy sieć szeregowo-równoległa tak jak na rys. 8b. Równoważny jej dwójnik zastępczy jest na podstawie przykładu w dodatku 2 równy połączeniu dwójnika D_5 z samym sobą, co na podstawie twierdzenia 6 daje ostatecznie D_5.

LITERATURA

[1] BANASZAK A.: Układ singularny jako model obwodu elektrycznego. X - SPETO. Wisła 1987.

[2] BRAUN J.: Eguivalent NIC Networks with Nillators and Norators. IEEE Trans. on CT, September 1965.

[3] BENDIK J.: Eguivalent Gyrator Networks with Nullators and Norators. IEEE Trans. on CT, March 1967.

[4] CARLIN H.J., YOULA D.C.: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, May 1961.

[5] CARLIN H.J.: Singular network elements. IEEE Trans. CT, Mar 19, 1964.

[6] CHUA L.O.: Analysis and Synthesis of Multivalued Memoryless Nonlinear Networks. IEEE Trans. CT, June 1967.

[7] DAVIES A.C.: Nullator - Norator Eguivalent Networks for Controlled Sources. Proc. IEEE May 1967.

[8] DAVIES A.C.: The Significance of Nullators, Norators and Nullors in Active - network Theory. The Radio and Electr. Engin. Nov. 1967.

[9] GUZICKI W., ZBIERSKI P.: Podstawy teorii mnogości. PWN, Warszawa 1978.

[10] GRZEGORCZYK A.: Zarys logiki matematycznej. PWN, Warszawa 1981.

[11] HUIJSING J.H., DEKORTE J.: Monolithic Nullor - A Universal Active Network Element. IEEE JSSC, Febr. 1977.

[12] MARTINELLI G.: On the nullor. Proc. IEEE, 3, 1965.

[13] MARTINELLI G.: Physical characterization of the nullor-model of the transistor. J.S.N.T. Belgrado 1 68.

[14] MOSTOWSKI A.W.: Algebry Boole a i ich zastosowania. PWN, Warszawa 1964.

[15] MYERS B.R.: Nullor of Transistor. Proc. IEEE, July 1965.

[16] OYSTEIN A.: Wstęp do teorii grafów. PWN, Warszawa 1966.

[17] PAUKER V.M.: Eguivalent Networks With Nullor for Positive Jmmittance Inverters. IEEE Trans. on CT, November 1970.

[18] POGORZELSKI W.A.: Klasyczny rachunek zadań. PWN, Warszawa 1975.

[19] VERGHESE G.C., LEVE B.C., KAILATH T.: A generalized state space for singular systems. IEEE Trans. AC - 26, 811, 1981.

[20] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V - SPETO Ustroń 1981. Z.N.Pol.Sl. Elektryka, z. 79, Gliwice 1982.

[21] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Wprowadzenie idealnych źródeł autonomicznych i źródlatora do zbioru elementów osobliwych. Z. N. Pol. Sl. Automatyka, z. 71, Gliwice 1983.

[22] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Diodowe elementy osobliwe. VI - SPETO Ustroń 1983. Z. N. Pol. Śl. Elektryka, z. 88, Gliwice 1984.

[23] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Analiza obwodów osobliwych metodą macierzowych formuł boolowskich. Z. N. Pol. Sl. Automatyka, z. 73, Gliwice 1984.

[24] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Połączenie elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi. VII - SPETO Ustroń 1984. Z. N. Pol. Śl. Elektryka, z. 95, Gliwice 1985.

[25] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Mnożniki impedancji. Z. N. Pol. Śl. Elektryka, z. 107, Gliwice 1989.

[26] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Pojawianie się elementów osobliwych w idealnych układach aktywnych. Z. N. Pol. Śl. Elektryka, z. 113, Gliwice 1989.

[27] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Synteza bezinercyjnych sieci osobliwych metodą formuł boolowskich. Z. N. Pol. Śl. Elektryka, z. 115, Gliwice (w druku).

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 marca 1989 r.

АНАЛИЗ НЕИНЕРТНЫХ АНОМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ

Р е з ю м е

В статье представлено описание цепей, содержащих аномальные элементы /нуллятор, норатор, разрыв и короткое замыкание/ при помощи булевой алгебры. Введена трансформация, отображающая множество действительных чисел в виде двухэлементного множества. Аномальный двухполюсник описан при помощи булевой формулы /2/. Представлены теоремы дающие возможность подборки замещающего двухполюсника эквивалентного данной последовательно-параллельной аномальной цепи. Показано для аномальных двухполюсников существование правила дистрибутивности параллельного соединения относительно последовательного, а также дистрибутивности последовательного относительно параллельного. Показана возможность анализа аномальных цепей непоследовательно-параллельные цепи. В конце статьи даны примеры вычислений с применением булевых формул.

ANALYSIS OF INERTIALESS PECULIAR NETWORKS USING BOOLE'S FORMULAE

S u m m a r y

Networks comprising peculiar elements (nullator, norator, break and short-circuit) have been presented using Boole's algebra. Transformation (1) of real number's set into two-element set has been introduced. Peculiar one-port has been described by means of Boole's formula (2). Theorems enabling searching for substitute one-port equivalent to the given peculiar in series-parallel network have been presented. Existence of divisibility rule for parallel connection in relation to in series connection for peculiar one-ports as well as divisibility rule for in series connection in relation to parallel connection has been proved. Possibility of the analysis of peculiar non-in series-parallel networks by transforming them into equivalent in series-parallel networks has been presented. Examples of calculations using Boole's formulae have been presented at the end of this paper in five-point appendix.