

Krzysztof SIMEK

Konrad Wojciechowski

ZAGADNIENIE JEDNOZNACZNOŚCI WYZNACZANIA PARAMETRÓW
RUCHU W PRZESTRZENI TRÓJWYMIAROWEJ^{x)}

Streszczenie. W artykule prezentowany jest problem wyznaczenia parametrów ruchu na podstawie sekwencji obrazów. Analizowane są równania ruchu otrzymane przy założeniu małych kątów obrotu. Sformułowano i udowodniono warunek wystarczający istnienia jednoznacznego rozwiązania tych równań.

1. Wprowadzenie

Problem wyznaczenia parametrów ruchu na podstawie informacji wizyjnej jest szeroko rozważany w literaturze [1] - [7]. Prezentowane są różnorodne sposoby formułowania problemu i metody rozwiązania. Analizuje się dwa kolejne obrazy z kamery [1] - [4] lub ich dłuższe sekwencje [7], [5]. Tworzone są różne modele matematyczne opisujące ruch, np. [1], [5], [6].

W przedstawionym artykule rozważa się problem jednoznaczności wyznaczenia parametrów ruchu z przybliżonych nieliniowych równań ruchu, otrzymanych w pracy [1], przy założeniu małych kątów obrotu. Analizowane są odpowiadające sobie punkty sceny uzyskane na dwóch kolejnych obrazach z poruszającej się kamery i na tej podstawie wyznaczonych jest pięć nieznanymi parametrów charakteryzujących ruch. Tak z teoretycznego, jak i z praktycznego punktu widzenia interesująca jest zależność jednoznaczności wyznaczenia parametrów ruchu od liczby analizowanych par punktów. Ze względu na duży nakład pracy poświęcony na ich odszukiwanie i przyporządkowywanie sobie oraz wynikające stąd błędy oślowe jest zmniejszanie liczby tych punktów. Z drugiej strony niemożliwość uzyskania jednoznacznego rozwiązania problemu dla dowolnych pięciu par punktów powoduje konieczność zwiększenia ich liczby, wprowadzenia funkcji celu i stosowanie metod minimalizacji, np. metody najmniejszych kwadratów.

Taki właśnie sposób rozwiązania problemu prezentowany jest w [2]. W stosunku do [2] w niniejszym artykule podano inną postać macierzy rotacji, a następnie pokazano jej równoważność z macierzą stosowaną w [2].

^{x)} Praca finansowana z Centralnego Programu Badań Podstawowych CPBP 02.13
"Układy ze sztuczną inteligencją do maszyn roboczych i pojazdów"

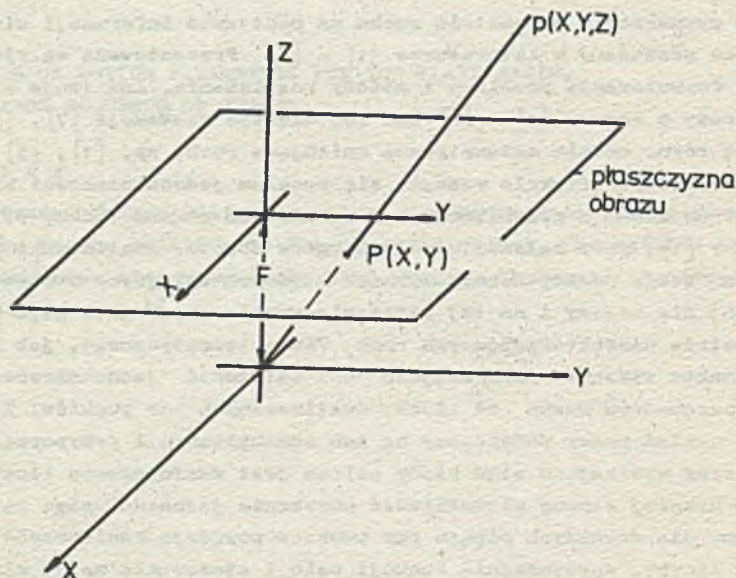
Przedstawiono dodatkowo rozwiązanie problemu dla szczególnego przypadku ruchu, przy założeniu nieistnienia obrotu. Zmodyfikowano również sposób rozumowania i pewne przekształcenia formalne prowadzące do udowodnienia twierdzenia o jednoznaczności.

2. Sformułowanie problemu

2.1. Transformacja perspektywiczna

Rozważmy sytuację przedstawioną na rys. 1.

Niech układ współrzędnych $Oxyz$ będzie układem związanym z kamerą. Zakładamy, że jego początek znajduje się w ognisku soczewki tej kamery, a oś oz pokrywa się z osią optyczną soczewki. Płaszczyznę o równaniu $z = F$, gdzie F - ogniskowa soczewki, nazwiemy płaszczyzną obrazu. Na płaszczyźnie tej określony jest układ współrzędnych OXY posiadający początek O w punkcie przebicia płaszczyzny przez oś oz , a którego osie są równoległe do odpowiadających osi układu $Oxyz$, tzn. $OX \parallel ox$, $OY \parallel oy$.



Rys. 1. Transformacja perspektywiczna punktu $p(x, y, z)$
 Fig. 1. Perspective transformation of the point $p(x, y, z)$

Wybermy dowolny punkt przestrzeni $p(x, y, z)$. Obrazem punktu P w transformacji perspektywicznej jest punkt $P(X, Y)$ leżący na płaszczyźnie OXY . Powstaje on jako punkt przecięcia płaszczyzny obrazu przez prostą op . Jego współrzędne na płaszczyźnie obrazu możemy obliczyć z następujących wzorów:

$$X = F \cdot \frac{x}{z} \quad (1)$$

$$Y = F \cdot \frac{y}{z}$$

Łatwo zauważyć, że obraz dowolnego punktu prostej op pokrywa się z obrazem punktu p .

Bardzo często równanie (1), określające transformację perspektywną, zapisuje się w inny sposób z użyciem tzw. współrzędnych jednorodnych (X, Y, Z, W) :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & & & \\ & F & & \\ & & 0 & F \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1A)$$

Współrzędne kartezjańskie punktów na płaszczyźnie obrazu oznaczone we wzorze (1) jako (X, Y) , dla współrzędnych jednorodnych równają się odpowiednio $\left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}\right)$.

2.2. Ruch w przestrzeni

Rozpatrzmy dowolny rodzaj ruchu w przestrzeni trójwymiarowej. Ruch taki można uzyskać w wyniku złożenia dwóch szczególnych rodzajów ruchu: obrotu (rotacji) oraz przesunięcia (translacji). Fakt ten można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie:

R - macierz rotacji,
 $(x_t, y_t, z_t)^T$ - wektor translacji.

Każdą macierz $R = [r_{ij}]$, opisującą obrót w przestrzeni, można przedstawić w postaci iloczynu trzech macierzy [5]:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad - \text{macierz obrotu o kąt } \alpha \text{ wokół osi } ox$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad - \text{macierz obrotu o kąt } \beta \text{ wokół osi } oy$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{macierz obrotu o kąt } \gamma \text{ wokół osi } oz$$

Zatem:

$$R = R_1(\alpha) \cdot R_2(\beta) \cdot R_3(\gamma) = R_{123}(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma, & -\cos \beta \sin \gamma, & \sin \beta \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \gamma, & -\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma, & -\sin \alpha \cdot \cos \beta \\ -\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma, & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma + \sin \alpha \cdot \cos \gamma, & \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{bmatrix} = r_{ij}, \quad (3)$$

gdzie kąty α, β, γ są nazywane kątami Eulera.

Możliwe jest również przedstawienie macierzy R w postaci [2]:

$$R = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1-n_1^2) \cos \theta, & n_1 n_2 (1-\cos \theta) - n_3 \sin \theta, & n_1 n_3 (1-\cos \theta) + n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1-\cos \theta) + n_3 \sin \theta, & n_2^2 + (1-n_2^2) \cos \theta, & n_2 n_3 (1-\cos \theta) - n_1 \sin \theta \\ n_1 n_3 (1-\cos \theta) - n_2 \sin \theta, & n_2 n_3 (1-\cos \theta) + n_1 \sin \theta, & n_3^2 + (1-n_3^2) \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3A)$$

gdzie:

n_1, n_2, n_3 - cosinusy kierunkowe osi obrotu:

$$n_1^2 = n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (4)$$

θ - kąt obrotu względem tej osi.

Kąt obrotu θ oraz cosinusy n_1, n_2, n_3 określone są wzorami:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [\text{Tr } r(R) - 1] = \frac{1}{2} (r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)$$

$$n_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \sin \theta}$$

$$n_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{2 \sin \theta}$$

$$n_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \sin \theta}$$

gdzie: r_{ij} są elementami macierzy R .

W dalszej części pracy będziemy korzystali z macierzy rotacji opisanej równaniem (3A).

Rozkładając funkcje trygonometryczne $\sin \theta$ i $\cos \theta$ w szereg Taylora, macierz (3A) można przekształcić dalej do postaci:

$$R = (I + dR) + \theta^2 E = \left(I + \frac{d}{d\theta} r_{ij} \Big|_{\theta=0} \right) \cdot \theta + \theta^2 E = R^x + \theta^2 E, \quad (5)$$

gdzie:

$$R^x = \begin{bmatrix} 1 & -n_3 \theta & n_2 \theta \\ n_3 \theta & 1 & -n_1 \theta \\ -n_2 \theta & n_1 \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

E -macierz dążąca do macierzy stałej, gdy θ dąży do zera.

Tak więc zakładając, że kąt obrotu θ jest dostatecznie mały, możemy w równaniu (2) wykorzystywać macierz R^x zamiast macierzy R .

2.3. Równanie ruchu

Załóżmy, że kamera umieszczona jest na poruszającym się obiekcie i wykonuje zdjęcia nieruchomej sceny (rys. 2).

Niech układ współrzędnych $\bar{o} \bar{x} \bar{y} \bar{z}$ będzie nieruchomym układem związanym ze sceną, a układy $o x y z$ oraz $o'x'y'z'$ układami związanymi z kamerą w kolejnych chwilach czasu t_1, t_2 .

Załóżmy dodatkowo, że na otrzymanych w chwilach t_1, t_2 obrazach potrafimy wyróżnić pewną liczbę odpowiadających sobie punktów. Wybieramy spośród nich punkt $\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Przyjmując oznaczenia:

(X, Y) - współrzędne punktu \bar{p} na płaszczyźnie obrazu w chwili t_1 ,

(X', Y') - współrzędne punktu \bar{p} na płaszczyźnie obrazu w chwili t_2 ,

możemy równanie (2) napisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{z'}{F'} \cdot X' \\ \frac{z'}{F'} \cdot Y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \frac{z}{F} \cdot X \\ \frac{z}{F} \cdot Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad (7)$$

Zakładając mały kąt obrotu θ na mocy (5)(6) mamy:

$$\begin{bmatrix} \frac{z'}{F'} \cdot X' \\ \frac{z'}{F'} \cdot Y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 1 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z}{F} \cdot X \\ \frac{z}{F} \cdot Y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \quad (8)$$

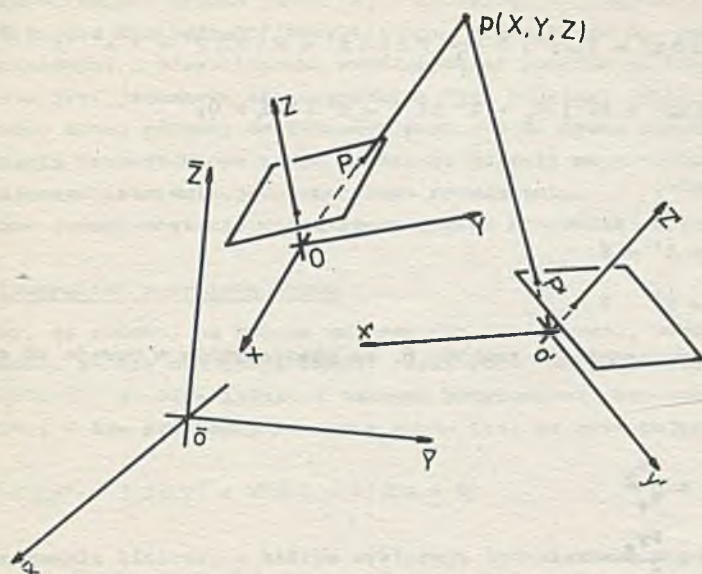
gdzie:

$$\varphi_1 = n_1 \theta$$

$$\varphi_2 = n_2 \theta$$

$$\varphi_3 = n_3 \theta$$

Równanie (8) opisujące dowolny ruch w przestrzeni, przy założeniu małego kąta obrotu, zawiera poszukiwane parametry ruchu ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x_t, y_t, z_t$), współrzędne płaszczyźnie obrazu $(X, Y), (X', Y')$, które są wyznaczone z dwóch kolejnych obrazów, współrzędną z oraz z' punktu w przestrzeni. Zgodnie z uwagą poczynioną w rozdziale 2.1 odnośnie do niejednoznaczności transformacji perspektywicznej, jest oczywiste, że na podstawie obrazu nie jesteśmy w stanie nic powiedzieć o wartości z oraz z' . Niemożliwe jest również jednoznaczne wyznaczenie trzeciej składowej z_t wektora translacji.



Rys. 2. Zmiana położenia rzutu punktu $p(x, y, z)$ na płaszczyznę obrazu w wyniku ruchu kamery

Fig. 2. Displacement of the point $p(x, y, z)$ projection on the image surface resulting of the camera motion

Przejdźmy więc równanie (7) w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{z'}{z_t} \cdot X' \\ \frac{z'}{z_t} \cdot Y' \\ \frac{z'}{z_t} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \frac{z}{z_t} \cdot X \\ \frac{z}{z_t} \cdot Y \\ \frac{z}{z_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{F x_t}{z_t} \\ \frac{F y_t}{z_t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_t \neq 0 \quad (10)$$

gdzie: $\frac{z}{z_t}$ oraz $\frac{z'}{z_t}$ możemy interpretować jako względną odległość analizowanego punktu od kamery w chwili t_1, t_2 .

Powyższe równanie macierzowe jest równoważne układowi trzech równań. Eliminując z układu nieznanne wielkości $\frac{z}{z_t}$, $\frac{z'}{z_t}$ dostajemy jedno równanie:

$$\begin{aligned}
 & (- (F^2 + YY') \Delta x' + X'Y \cdot \Delta y') \varphi_1 + (XY' \Delta x' - (F^2 + XX') \Delta y') \varphi_2 + \\
 & + (X \Delta x' + Y \Delta y') F \varphi_3 - F \Delta Y \Delta x' + F \Delta X \Delta y' + F^2 X' \varphi_1 + F^2 Y' \varphi_2 - \\
 & - F (XX' + YY') \varphi_3 + X' \Delta Y F - Y' \Delta X F = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie zmienne:

$$\begin{aligned}
 \Delta X &= X' - X \\
 \Delta Y &= Y' - Y
 \end{aligned} \tag{12}$$

oznaczają przesunięcia punktu \bar{p} na płaszczyźnie w czasie od chwili t_1 do t_2 oraz:

$$\begin{aligned}
 \Delta x' &= \frac{F x_t}{z_t} \\
 \Delta y' &= \frac{F y_t}{z_t}
 \end{aligned}$$

Postać $\Delta x'$ i $\Delta y'$ oznacza, że wektor translacji zostanie wyznaczony z dokładnością do stałego współczynnika skali. Wynika to, jak już wyżej stwierdzono, z nieznaności współrzędnych z, z' , tj. odległości punktu sceny od kamery w chwilach t_1, t_2 .

Jeżeli dodatkowo dysponowalibyśmy informacją o tych odległościach, wyznaczenie pełnego wektora przesunięcia byłoby możliwe. Otrzymane równanie (11) jest równaniem nieliniowym. Podaje ono związek pomiędzy parametrami ruchu ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Delta x', \Delta y'$) traktowanymi jako niewiadome, a współrzędnymi na płaszczyźnie obrazu wyznaczonymi dla dowolnego punktu \bar{p} sceny w chwilach t_1 oraz t_2 .

W dalszej części pracy równanie (11) będzie wykorzystywane jako równanie podstawowe do wyznaczenia parametrów ruchu.

3. Jednoznaczność rozwiązania równania ruchu

Jak stwierdziliśmy, równanie ruchu (11) jest równaniem nieliniowym, w którym występuje pięć nieznanych parametrów. Ze względu na to wybór pięciu dowolnych, odpowiadających sobie na kolejnych obrazach, par punktów nie musi zapewniać jednoznaczności rozwiązania powstałego układu równań.

Wybranie większej liczby para punktów zwiększa nakład pracy na ich odszukiwanie i przyporządkowywanie sobie na kolejnych obrazach.

Z drugiej strony może prowadzić również ze względu na błędy pomiarowe do układu sprzecznego. Inną przyczyną prowadzącą do układu sprzecznego jest użycie przybliżonych równań ruchu (2) z macierzą (6). Sprzeczność ta wynika z faktu, że "dokładność" przybliżenia, rozumianego np. jako błąd pomiędzy dokładnymi a przybliżonymi współrzędnymi punktów na płaszczyźnie obrazu, nie jest jednakowa dla wszystkich tych punktów. Dobór punktów o stosunkowo dużej różnicy dokładności prowadzi do braku rozwiązania.

Rozważania przedstawione w tym rozdziale pozwolą na podanie warunku wystarczającego istnienia jednoznacznego rozwiązania.

Najpierw jednak zostanie rozpatrzony pewien przypadek szczególny.

3.1. Szczególny przypadek ruchu

Założmy, że obiekt, na którym umieszczona jest kamera, porusza się w ten sposób, że nie następuje obrót, czyli ruch ten jest przesunięciem. Macierz rotacji R odpowiadająca takiemu przypadkowi jest macierzą jednostkową. W tym przypadku równanie ruchu (11) ma następującą postać:

$$-\Delta Y \Delta x' + \Delta X \Delta y' + X' \Delta X - Y' \Delta X = 0 \quad (13)$$

Jest to równanie liniowe, w którym występują dwa nieznanne parametry ruchu.

Jeżeli wybierzemy dwie pary, odpowiadających sobie na kolejnych obrazach punktów, dostaniemy układ:

$$\begin{aligned} -\Delta Y_1 \Delta x' + \Delta X_1 \Delta y' + X'_1 \Delta Y_1 - Y'_1 \Delta X_1 &= 0 \\ -\Delta Y_2 \Delta x' + \Delta X_2 \Delta y' + X'_2 \Delta Y_2 - Y'_2 \Delta X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Rozwiązanie układu (14) ma postać:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{W_1}{W^x} = \frac{F_x t}{z_t} \\ y' &= \frac{W_2}{W^x} = \frac{F_y t}{z_t}, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie:

$$W^x = \begin{vmatrix} -\Delta Y_1 & \Delta X_1 \\ -\Delta Y_2 & -\Delta X_2 \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} Y'_1 \Delta X_1 - X'_1 \Delta Y_1, & \Delta X_1 \\ Y'_2 \Delta X_2 - X'_2 \Delta Y_2, & -\Delta X_2 \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} -\Delta Y_1, & Y'_1 \Delta X_1 - X'_1 \Delta Y_1 \\ -\Delta Y_2, & Y'_2 \Delta X_2 - X'_2 \Delta Y_2 \end{vmatrix}$$

Możemy zatem stwierdzić, że w przypadku translacji wystarczy wybór dwóch punktów sceny, by uzyskać rozwiązanie jednoznaczne. Rozwiązanie to odpowiada oczywiście rzeczywistym parametrom ruchu.

3.2. Przypadek ogólny dla małych kątów obrotu θ

Wyniki zamieszczone w tym punkcie i zastosowane podejście oparte na pracy [2].

Wykorzystując równanie (1A), opisujące transformację wizerunku we współrzędnych jednorodnych, możemy równanie ruchu (11) zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & -(F^2 W W' + Y Y') \Delta x' \varphi_1 + X' Y \Delta y' \varphi_1 + X Y' \Delta x' \Delta \varphi_2 - (F^2 W W' + X X') \Delta y' \varphi_2 + \\ & + X F W' \Delta x' \varphi_3 + Y F W' \Delta y' \varphi_3 - (F Y' W - F Y W') \Delta x' - (F X W' - F X' W) \Delta y' + \\ & + X F^2 W \varphi_1 + F^2 Y' W \varphi_2 - F (X X' + Y Y') \varphi_3 - X' X F + Y' X F = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

lub macierzowo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Delta y' \varphi_2 - F \varphi_3 & \Delta x' \varphi_2 + F & F \Delta x' \varphi_3 - F \Delta y' \\ \Delta y' \varphi_1 - F & -\Delta x' \varphi_1 - F \varphi_3 & F \Delta y' \varphi_3 + F \Delta x' \\ F \Delta y' + F^2 \varphi_1 & -F \Delta x' + F^2 \varphi_2 & -F^2 \Delta x' \varphi_1 - F^2 \Delta y' \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ W' \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

We wzorach (16), (17) oznaczenia X, Y, X', Y' odnoszą się do zmiennych jednorodnych zdefiniowanych w (1A).

Będą one obowiązywać od tego punktu do końca pracy.

Można pokazać, że jeżeli dowolny rodzaj ruchu w przestrzeni zostanie opisany w sposób przybliżony przy zastosowaniu macierzy rotacji w postaci:

$$\bar{R}^x = R^x \begin{vmatrix} \bar{n}_1 \cdot \theta = \bar{n}_1 \bar{\theta} = \bar{\varphi}_1 \end{vmatrix}$$

zamiast macierzy dokładnej:

$$\bar{R} = R \left| \begin{array}{l} n_1 = \bar{n}_1 \\ \theta = \bar{\theta} \end{array} \right.$$

gdzie macierze R^x i R są zdefiniowane odpowiednio w (6) i (3), to istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (17), spełniające je niezależnie od wyboru punktu przestrzeni. Postać tego rozwiązania określają zależności:

$$\varphi_1 = \bar{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_2, \quad \varphi_3 = \bar{\varphi}_3, \quad \Delta x' = \frac{F x_t}{z_t}, \quad \Delta y' = \frac{F y_t}{z_t}.$$

Ponieważ współrzędna jednorodna Z nie występuje w równaniu (17), możemy ją wyeliminować z równania (1A) i napisać:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & & \\ & F & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

oraz:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & & \\ & F & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & & \\ & F & \\ & & 1 \end{bmatrix} \left\{ \bar{R}^x \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

Wykorzystując powyższe zależności równanie (17) można przekształcić następująco:

$$x^T \Lambda (\bar{R}^x x + x_t) = 0, \quad (19)$$

gdzie:

$$x^T = (x \ y \ z),$$

$$x_t^T = (x_t \ y_t \ z_t)$$

$$\Lambda = F^2 \begin{bmatrix} 1 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -F & \Delta y' \\ F & 0 & -\Delta x' \\ -\Delta y' & \Delta x' & 0 \end{bmatrix} = F^2 \bar{R}^x{}^T G$$

Jeżeli równanie (19) jest spełnione dla każdego punktu x , to jest ono równoważne dwom równaniom:

$$x^T A x_t = 0 \quad (20)$$

oraz

$$x^T A \bar{R}^x x = 0 \quad (21)$$

Rozpatrzmy pierwsze z nich. Uwzględniając oznaczenie przyjęte w (19) ma ono postać:

$$x^T F^2 \bar{R}^{xT} G x_t = 0 \quad (22)$$

Ponieważ na podstawie (4) i (9):

$$\det R^x = 1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1 + \theta^2 \neq 0,$$

a więc z (22) uzyskujemy:

$$G x_t = 0$$

lub:

$$-F y_t + \Delta y' z_t = 0$$

$$F x_t - \Delta x' z_t = 0$$

$$-\Delta y' x_t + \Delta x' y_t = 0$$

Uzyskany układ ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$x' = \frac{F x_t}{z_t} \quad y' = \frac{F y_t}{z_t} \quad (23)$$

W celu wykorzystania (21) wstawmy do niego pewne szczególne wartości wektora x . Otrzymamy w ten sposób następujący układ równań:

$$x^T = (1, 0, 0) : \quad A_{1.} \bar{R}_{.1}^x = 0$$

$$x^T = (0 \ 1 \ 0) : \quad A_{2.} \bar{R}_{.2}^x = 0$$

$$x^T = (0 \ 0 \ 1) : \quad A_{3.} \bar{R}_{.3}^x = 0$$

$$\mathbf{x}^T = (1 \ 1 \ 0) : A_{1.} \bar{R}_{.2}^x + A_{2.} \bar{R}_{.1}^x = 0$$

$$\mathbf{x}^T = (1, 0, 1) : A_{1.} \bar{R}_{.3}^x + A_{3.} \bar{R}_{.1}^x = 0$$

$$\mathbf{x}^T = (0 \ 1 \ 1) : A_{2.} \bar{R}_{.3}^x + A_{3.} \bar{R}_{.2}^x = 0,$$

gdzie: "i." oraz ".j" oznaczają odpowiednio i-ty wiersz i j-tą kolumnę macierzy.

Uwzględniając macierze użyte w (19) oraz wynik (23) można ten układ zapisać w postaci:

$$G \tilde{\varphi} = 0, \quad (24)$$

gdzie:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & y_t - x_t \bar{\varphi}_3 & z_t + x_t \bar{\varphi}_2 \\ +y_t \bar{\varphi}_3 + x_t & 0 & z_t - y_t \bar{\varphi}_1 \\ -z_t \bar{\varphi}_2 + x_t & y_t + z_t \bar{\varphi}_1 & 0 \\ y_t - x_t \bar{\varphi}_3 & x_t + y_t \bar{\varphi}_3 & -y_t \bar{\varphi}_2 + x_t \bar{\varphi}_1 \\ z_t + x_t \bar{\varphi}_2 & -x_t \bar{\varphi}_1 + z_t \bar{\varphi}_3 & x_t - z_t \bar{\varphi}_2 \\ -z_t \bar{\varphi}_3 + y_t \bar{\varphi}_2 & z_t - y_t \bar{\varphi}_1 & y_t + z_t \bar{\varphi}_1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 - \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2 - \bar{\varphi}_2 \\ \varphi_3 - \bar{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$

Układ (24) jest jednorodnym układem sześciu równań liniowych z trzema niewiadomymi. Jeżeli macierz G ma rząd maksymalny, to układ ten ma tylko zerowe rozwiązanie: $\varphi_1 = \bar{\varphi}_1$. Po uwzględnieniu (23) oznacza to, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie wyjściowego równania (19).

Aby udowodnić, że $\text{rz } G = 3$, obliczmy najpierw wyznacznik D złożony z ostatnich trzech wierszy macierzy G :

$$D = \begin{vmatrix} y_t & x_t & 0 & 1 & \bar{\varphi}_3 & -\bar{\varphi}_2 \\ x_t & 0 & x_t & -\bar{\varphi}_3 & 1 & \bar{\varphi}_1 \\ 0 & x_t & y_t & \bar{\varphi}_2 & -\bar{\varphi}_1 & 1 \end{vmatrix} = -2x_t y_t x_t (1 + \bar{\varphi}_1^2 + \bar{\varphi}_2^2 + \bar{\varphi}_3^2)$$

Otrzymane wyrażenia zerują się tylko wtedy, gdy $x_t = 0$ lub $y_t = 0$, lub jednocześnie $x_t = y_t = 0$. Istnieje jednakże w tych przypadkach niezeraowy wyznacznik o wymiarach 3×3 .

Dla dwóch pierwszych przypadków można to pokazać wybierając odpowiednie wyznaczniki składające się z pierwszych osterech wierszy macierzy G.

W ostatnim przypadku, tzn. $x_t = y_t = 0$, rozważmy wyznacznik złożony z 1, 5 oraz 6 wiersza macierzy G.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_t \\ x_t & x_t \bar{\varphi}_3 & -x_t \bar{\varphi}_2 \\ -x_t \bar{\varphi}_3 & x_t & x_t \bar{\varphi}_1 \end{vmatrix} = x_t^3 (1 + \bar{\varphi}_3^2) \neq 0$$

Zauważenie powyższego faktu kończy rozumowanie uzasadniające sformułowane stwierdzenie.

Wykonując kolejny krok możemy powiedzieć, że jeżeli zostanie zastosowany przybliżony opis ruchu, podobnie jak poprzednio oraz dokonany zostanie wybór $N > 5$ punktów sceny w taki sposób, by rząd iloczynu $U B$ wynosił 5 niezależnie od wartości:

$$w = (-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3, \Delta x', \Delta y')^T,$$

gdzie:

$$U = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_n^2 & x_2 y_2 & x_2 z_2 & y_2 z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & x_n y_n & x_n z_n & y_n z_n & x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -(\Delta y' - \Delta x' \bar{\varphi}_3) & -\Delta x' \bar{\varphi}_2 - F \\ -\Delta y' \bar{\varphi}_3 - \Delta x' & 0 & -(F - \Delta y' \bar{\varphi}_1) \\ (F \bar{\varphi}_2 - \Delta x') & -F \bar{\varphi}_1 - \Delta y' & 0 \\ \Delta y' - \Delta x' \bar{\varphi}_3 & \Delta x' + \Delta y' \bar{\varphi}_3 & -\Delta y' \bar{\varphi}_2 + \Delta x' \bar{\varphi}_1 \\ F + \Delta x' \bar{\varphi}_2 & -\Delta x' \bar{\varphi}_3 + F \bar{\varphi}_3 & \Delta x' - F \bar{\varphi}_2 \\ -F \bar{\varphi}_3 + \Delta y' \bar{\varphi}_2 & F - \Delta y' \bar{\varphi}_1 & \Delta y' + F \bar{\varphi}_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -(\varphi_3 z_t + \varphi_2 y_t) & z_t + \varphi_2 x_t \\ -z_t + \varphi_1 y_t & -\varphi_3 z_t + \varphi_1 x_t \\ \varphi_1 z_t + y_t & \varphi_2 z_t - x_t \end{bmatrix}$$

to rozwiązanie równania ruchu (17) odpowiadające temu zbiorowi punktów jest jednoznaczne i równe rzeczywistym parametrom ruchu.

Używając podobnej metody do tej jaką stosowaliśmy do uzyskania równania (24), możemy równanie (1) zapisać w postaci:

$$u B (w - \bar{w}) = 0, \quad (27)$$

gdzie:

$$u = (x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad xz \quad yz \quad x \quad y \quad z)$$

$$w = (-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3, \Delta x', \Delta y')^T \quad (28)$$

$$\bar{w} = (-\bar{\varphi}_1, -\bar{\varphi}_2, -\bar{\varphi}_3, \frac{F x_t}{z_t}, \frac{F y_t}{z_t})^T \quad (29)$$

B - macierz określona w (26).

Dla zbioru N punktów dostajemy N równań o postaci (27).

Możemy je zapisać macierzowo:

$$U B (w - \bar{w}) = 0 \quad (30)$$

Ponieważ założyliśmy, że dla wybranych punktów rz UB = 5, układ (30) ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$w - \bar{w} = 0,$$

zatem

$$w = \bar{w}.$$

Przedstawione powyżej rozumowanie pozwoli w prosty sposób sformułować i udowodnić twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania przybliżonego równania ruchu. Niech:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Delta x', \Delta y') &= \\ &= -(F^2 w_1' w_1' + Y_1 Y_1') \Delta x' \varphi_1 + X_1' Y_1 \Delta y' \varphi_1 + X_1 Y_1' \Delta x' \varphi_2 \\ &\quad - (F^2 w_1' w_1' + X_1 X_1') \Delta y' \varphi_2 + X_1 F w_1' \Delta x' \varphi_3 + F Y_1 w_1' \Delta y' \varphi_3 \\ &\quad - (F Y_1' w_1 - F Y_1 w_1') \Delta x' - (F X_1 w_1 - F X_1' - F X_1 w_1') \Delta y' + X_1' F w_1 \varphi_1 \\ &\quad + F^2 Y_1' w_1 \varphi_2 - F(X_1 X_1' + Y_1 Y_1') \varphi_3 - X_1' Y_1 F + Y_1' X_1 F \end{aligned} \quad (30)$$

Łatwo zauważyć, że funkcje f_1 są równe lewej stronie równania (16) dla $X = X_1$, $Y = Y_1$, $X' = X_1'$, $Y' = Y_1'$.

Zdefiniujmy teraz funkcję:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Delta x', \Delta y') = \sum_{i=M}^N f_1^2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Delta x', y'), \quad N > 5 \quad (31)$$

Funkcję (31) poddamy minimalizacji metodą najmniejszych kwadratów, wyznaczając rozwiązanie optymalne.

Twierdzenie o jednoznaczności

Dla zbioru $N = 9$ punktów przestrzeni, wybranych w ten sposób, by nie leżały na powierzchni drugiego rzędu przechodzącej przez początek układu współrzędnych, różnica pomiędzy rozwiązaniem uzyskanym metodą najmniejszych kwadratów w^* i rzeczywistymi wartościami parametrów ruchu w wynosi:

$$\|w^* - \bar{w}\|_2 = o(\bar{\theta}^2),$$

gdzie $\bar{\theta}$ dąży do zera.

Dowód:

Wykorzystując (19), a następnie (5) mamy:

$$\begin{aligned}
 f_1(w) &= x_1^T A(w)(\bar{R}x_1 + x_t) = x_1^T A(w) ((\bar{R}^x + \theta^2 \bar{E})x_1 + x_t) = \\
 &= u_1 b(w) = u_1 (b^x(w) + \theta^2 e)
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$u_1 = (x_1^2 \ y_1^2 \ z_1^2 \ x_1 y_1 \ y_1 z_1 \ x_1 z_1 \ x_1 \ y_1 \ z_1)$$

$$b^x(w) = B(w) (w - \bar{w}) \tag{33}$$

$B(w)$ - macierz zdefiniowana równaniem (26).

Teraz funkcję ϕ określoną w (31) napisać możemy w postaci:

$$\phi(w) = \sum_{i=1}^N (u_i b(w))^2 = (U b(w))^T U b(w) = \|U b(w)\|_2^2 \tag{34}$$

Oznaczmy przez w^* rozwiązanie minimalizujące tak określoną funkcję.

A więc:

$$\phi(w^*) \leq \phi(w) = \|U b^*(\bar{w}) + \bar{\theta}^2 e\|_2^2 = \bar{\theta}^4 \|U e\|_2^2 \tag{35}$$

W związku z tym, że $U b(w) = U b^*(w) + \theta^2 U e(w)$,

to dla $w = w^*$ mamy:

$$U b^*(w^*) = U b(w^*) - \theta^{*2} U e(w^*).$$

Zgodnie z powyższym (33) przybiera postać:

$$\|U b(w^*)\|_2 = (\phi(w^*))^{\frac{1}{2}} \leq \bar{\theta}^{-2} \|U e\|_2$$

A więc otrzymujemy:

$$\|U b^*(w^*)\|_2 \leq \|U b(w)\|_2 + \theta^{*2} \|U e\|_2 \leq (\bar{\theta}^2 + \theta^{*2}) \|U e\|_2$$

lub wykorzystując definicję $b^*(w)$:

$$\|UB(w^*)(w^* - \bar{w})\|_2 \leq (\bar{\theta}^2 + \theta^{*2}) \|U e\|_2 \tag{36}$$

Zajmiemy się teraz pokazaniem, że macierz $U B(w)$ ma rząd zupełny, tzn. że macierz U jest nieosobliwa, a $\text{rz } B = 5$. Dla $N = 9$ macierz U zdefiniowana w (25) staje się macierzą kwadratową.

Pamiętając, że wiersze macierzy mają postać określoną w (33), oczywiste jest stwierdzenie, że macierz U jest nieosobliwa dla proponowanego wyboru punktów.

Dowód, że $\text{rz } B = 5$ można podzielić na dwa kroki i udowodnić, że:

$$\text{rz } B_1 = 3 \quad (37)$$

oraz

$$\text{rz } B_2 = 2 \quad (38)$$

Prawdziwość (37) można wykazać metodą podobną do tej, którą przedstawiono wcześniej odnośnie do macierzy G określonej w (24). Dowód (38) jest mniej żmudny. Ponieważ

$$B_2(w) = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z_t \\ -z_t & 0 \\ y_t & -x_t \end{bmatrix},$$

to przy założeniu $z_t = 0$ zależność (38) jest oczywista.

W związku z tym, co zostało powiedziane możemy stwierdzić, że $\text{rz } UB = 5$.

Oznaczmy przez λ_{\min}^2 minimalną wartość własną macierzy

$$V = (UB(w))^T UB(w),$$

która zgodnie z rozważaniami o rzędzie UB jest macierzą nieosobliwą i dodatnio określoną.

Korzystając z tego oznaczenia oraz (36) mamy:

$$\|w^* - \bar{w}\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \|UB(w^*)(w^* - \bar{w})\|_2 \leq (\theta^2 + \theta^{*2}) \frac{\|Ue\|_2}{\lambda_{\min}} = k_1(\theta^2 + \theta^{*2}) \quad (39)$$

Niech:

$$w_1 = (-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3, 0, 0).$$

Korzystając z własności normy mamy:

$$\begin{aligned} |\theta^*| &= \|w_1^*\|_2 \leq \|\bar{w}_1\|_2 + \|w_1^* - \bar{w}_1\|_2 \leq |\bar{\theta}| + \|w_1^* - \bar{w}\|_2 \\ &\leq |\bar{\theta}| + k_1(\theta^2 + \theta^{*2}) \end{aligned}$$

Rozwiązując uzyskaną nierówność dostajemy:

$$|\theta^*| \leq |\bar{\theta}| + k_2 \bar{\theta}^2 \quad (40)$$

Wstawiając uzyskany wynik (40) do (39) dostajemy:

$$\|w^* - \bar{w}\|_2 \leq k_3 \bar{\theta}^2$$

lub w innej postaci:

$$\|w^* - \bar{w}\| = o(\bar{\theta}^2)$$

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono analizę problemu jednoznaczności rozwiązania przybliżonych równań ruchu ze względu na pięć nieznanymi parametrów. Wyznacza się trzy parametry ruchu związane z obrotem w przestrzeni oraz dwa parametry translacji, czyli trójwymiarowy wektor translacji zostaje wyznaczony z dokładnością do stałego współczynnika skali. Jest to wspólna cecha wszystkich rozwiązań nie zakładających dodatkowych informacji o odległości analizowanych punktów od kamery.

Rozwiązanie uzyskiwane jest w wyniku minimalizacji pewnej funkcji pięciu zmiennych. Zgodnie z przedstawionym twierdzeniem uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest poprawne i różni się od rozwiązania dokładnego o $o(\bar{\theta}^2)$.

LITERATURA

- [1] Huang T.S., Tsai R.Y.; Image sequence analysis Motion estimation, in Image Sequence Analysis T.S.Huang, Ed. Chap 1; Springer-Verlag, New York/Berlin, 1981.
- [2] Fang J.Q., Huang T.S.; Solving Three Dimensional Small-Rotation Motion Equations: Uniqueness, Algorithms, and Numerical Results, Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 26 1984, pp.183-206.
- [3] Tsai R.Y., Huang T.H., Wie-Le Zhu; Estimating three dimensional motion parameters of a rigid planar patch, II : Singular value decomposition, IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Processing, vol. ASSP-29, 1981, pp.1147-1152.
- [4] Tsai R.Y., Huang T.H.; Estimating three-dimensional motion parameters of a rigid planar patch, III : Finite Point correspondence and the three-view problem, IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Processing, vol. ASSP-32, 1984, pp.213-220.
- [5] Roach I.E., Aggarwal I.K.; Determining the movement of objects from a sequence of images, IEEE Trans. PAM I, 2, 1980, pp.554-562.

- [6] Ulman S.; The Interpretation of Visual Motion, MIT Press. 1979.
- [7] Świerniak A.; Wyznaczanie parametrów ruchu na podstawie długiego ciągu obrazów. Artykuł przygotowany do druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej.
- [8] Korn G.A., Korn T.M.: Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Comp London 1968.

Recenzent: Doc. dr inż. Bogdan Wołoś

Wpłynęło do Redakcji:

ПРОБЛЕМА ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р е з ю м е

В статье представляется проблема определения параметров движения на основе последовательности образов. Анализируются уравнения движения полученные при предположении небольших углов поворота. Дана формулировка и доказано достаточное условие существования однозначного решения этих уравнений.

A PROBLEM OF UNIQUENESS OF THE
MOTION PARAMETERS ESTIMATES IN 3-D SPACE

S u m m a r y

In the paper a problem of motion parameters estimations basing on the sequence of images is presented. Equations of motion are analyzed assuming infinitesimal rotation angles. A sufficient condition of existence and uniqueness of the solution to the equations is formulated and proved.