

Piotr URBANSKI

Instytut Chemii i Techniki Jądrowej, 03-195 Warszawa, ul. Dorodna 18.

MODELE STATYSTYCZNE PROCEDUR WZORCOWANIA ORAZ BŁĘDÓW RADIOIZOTOPOWYCH PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH

Streszczenie. Przedstawiono zależności matematyczne pomiędzy parametrami modeli jedno i wielowymiarowych a wartością średnią i wariancją błędu podstawowego. Wyprowadzone zależności były wykorzystane do oceny modeli kilku radioizotopowych przyrządów pomiarowych, takich jak izotopowa waga taśmociągowa, analizatory fluorescencyjne i mierniki grubości powłok.

1. WSTĘP

Rozwój elektroniki, a zwłaszcza pojawienie się tanich mikrokomputerów i zastosowanie ich w radioizotopowej aparaturze pomiarowej wpłynął w istotny sposób na rozszerzenie jej możliwości pomiarowych. Skomputeryzowana aparatura pozwala na wykorzystanie w większym stopniu informacji zawartej w sygnale z detektora promieniowania (przetwarzanie widm, stabilizacja i rozdzielanie pików itp.), co z jednej strony powoduje poprawianie parametrów metrologicznych i eksploatacyjnych aparatury, a z drugiej zaś prowadzi do większej złożoności modelu matematycznego systemów pomiarowych opartych na czujnikach radioizotopowych. Współcześnie wymaga się, aby model przeważnie przedstawiony w postaci formuły matematycznej, wprowadzić do pamięci a wszystkie obliczenia związane z przetworzeniem sygnału pomiarowego na wartość mierzonej wielkości wykonać automatycznie. Przy takim podejściu do problemu wzorcowania urządzeń pomiarowych powstaje natychmiast pytanie: czy, a jeżeli tak to w jakim stopniu postać funkcyjna modelu procedury wzorcowania wpływać może na błąd pomiaru urządzenia.

W niniejszej pracy podjęto próbę odpowiedzi na to pytanie analizując wartości średnie i wariancje błędów dla najczęściej spotykanych w praktyce modeli matematycznych procedur wzorcowania radioizotopowych przyrządów pomiarowych: modelu liniowego, nieliniowego wielomianowego, nieliniowego logarytmicznego i liniowego wielowymiarowego. Otrzymane wyniki zostały przedyskutowane na konkretnych przykładach przyrządów opracowanych w latach ubiegłych.

2. SCHEMAT STRUKTURALNY RADIOIZOTOPOWEGO PRZYRZĄDU POMIAROWEGO

Analiza schematów funkcjonalnych radioizotopowych przyrządów pomiarowych publikowanych w literaturze [1-3] prowadzi do wniosku, że

działanie każdego z takich przyrządów można opisać za pomocą uniwersalnego schematu strukturalnego pokazanego na Rys 1. Jak wynika z przedstawionego schematu, łańcuch pomiarowy radioizotopowego przyrządu pomiarowego składa się z trzech podstawowych przetworników: przetwornika przetwarzającego wielkość mierzona Z^* na natężenie promieniowania J_R , przetwornika przetwarzającego natężenie promieniowania na sygnał elektryczny J oraz przetwornika wskazującego wynik pomiaru, który stanowi ostatni element łańcucha.

Funkcja przetwarzania pierwszego przetwornika $J_R = H(Z^*)$ modeluje zjawisko fizyczne, na którym oparta jest zasada działania rozpatrywanego przyrządu radioizotopowego (np. absorpcja czy rozpraszanie promieniowania), natomiast w drugim przetworniku zawierającym wszystkie elementy instrumentalne łącznie z detektorem promieniowania, zachodzi przetwarzanie sygnału radiometrycznego J_R na sygnał elektryczny $J = GJ_R$. Te dwa pierwsze człony schematu strukturalnego reprezentują przyrząd pomiarowy przed wzorcowaniem, tzn. przed nadaniem wskazaniom przyrządu miary wielkości mierzonej.

Doprowadzając do przyrządu zamiast wielkości mierzonej Z^* wielkość wzorcowa Z_{wi} wyznacza się w warunkach odniesienia procedurę wzorcowania $Z = f(J)$, którą utrwała się poprzez naniesienie odpowiedniej podziałki, zapis w pamięci czy też w innej formie. Tak utrwaloną charakterystykę traktuje się jako ostatni stopień przetwarzania przyrządu pomiarowego.

Model matematyczny jest to przybliżony opis zjawisk fizycznych zachodzących w systemie pomiarowym wyrażony językiem matematycznym i składający się z dwóch części [4]:

1. równania przetwarzania (charakterystyki statycznej), 1/

$$J = F(Z^*)$$
2. procedury wzorcowania 2/

$$Z = f(J)$$

Zachodzące w systemie pomiarowym zjawiska fizyczne można opisać tylko za pomocą równania przetwarzania. Procedura wzorcowania, będąca odwzorowaniem do dziedziny wielkości mierzonej, ma z kolei podstawowe znaczenie dla oceny własności metrologicznych systemu pomiarowego, gdyż w tej dziedzinie wyrażane są błędy pomiaru. Należy zwrócić uwagę, że procedura wzorcowania nie opisuje żadnych zjawisk fizycznych, a jest tylko operacją matematyczną.

Modele matematyczne radioizotopowych przyrządów pomiarowych identyfikuje się najczęściej metoda analizy regresji.

W zależności od tego czy zmienne losowe J i Z są jednowymiarowe czy też wielowymiarowe mówimy o jedno lub wielowymiarowych modelach procedur wzorcowania.

Jeżeli na wejście ostatniego przetwornika (procedury wzorcowania, Rys 1) przychodzi sygnał J , to można przedstawić go w postaci:

$$J = J^* + \Delta J \quad 3/$$

gdzie J^* jest sygnałem idealnym, a ΔJ błędem powstałym w poprzednich członach łańcucha pomiarowego. Idealny sygnał wyjściowy Z^* powinien zależeć tylko od idealnego sygnału wejściowego, tak więc błąd podstawowy na wyjściu jest równy

$$\Delta Z = Z - Z^* \quad /4/$$

Wartość oczekiwana błędu podstawowego (składowa systematyczna) $\overline{\Delta Z}$ oraz wariancja (składowa przypadkowa) $\sigma_{\Delta Z}^2$ będą wynosić:

$$\overline{\Delta Z} = \overline{Z - Z^*} \quad /5/$$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \sigma_Z^2 + \sigma_{Z^*}^2 - 2\text{cov}(Z, Z^*) \quad /6/$$

Jeżeli znana jest charakterystyka statyczna $J = F(Z^*)$ oraz procedura wzorcowania $Z = f(J)$, to wielkości $\overline{\Delta Z}$ i $\sigma_{\Delta Z}^2$ można wyrazić jako funkcję błędu wejściowego ΔJ i wielkości wyjściowej Z [5].

3. MODELE MATEMATYCZNE PROCEDUR WZORCOWANIA I ICH BŁĘDY

Z przeprowadzonej analizy modeli matematycznych radioizotopowych przyrządów pomiarowych [6] wynika, że najczęściej stosowane są modele jednowymiarowe liniowe, nieliniowe wielomianowe lub logarytmiczne oraz wielowymiarowe modele liniowe. Dla tych przypadków obliczono wartości $\overline{\Delta Z}$ i $\sigma_{\Delta Z}^2$ przyjmując następujące założenia:

- Sygnał wejściowy J jest statystycznie niezależny od współczynników modelu regresyjnego.
- Błąd ΔJ ma rozkład normalny i jest statystycznie niezależny od sygnału wejściowego J^* .
- Pod pojęciem sygnał idealny rozumie się taki sygnał, którego wartość średnia jest równa wartości średniej sygnału rzeczywistego, natomiast jego wariancja jest znacznie mniejsza od wariancji błędu wejściowego $\sigma_{\Delta J}^2$.

Wynika stąd, że :

$$J^* = J; \quad \sigma_{J^*}^2 \ll \sigma_J^2 \quad \text{a} \quad \overline{\Delta J} = 0$$

W tabelicy I zestawiono [6] wyrażenia na wartość średnią $\overline{\Delta Z}$ oraz wariancję $\sigma_{\Delta Z}^2$ błędu podstawowego ΔZ , a poniżej przedstawiono znaczenie użytych tam symboli:

S - wariancja resztowa modelu regresyjnego $Z_{W1} = B_0 + B_1 J_{W1}$,

n - liczba wzorców użytych w procesie kalibracji,

$$\bar{Z}_W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{W1}$$

$$S_{Z_W}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_{W1} - \bar{Z}_W)^2; \quad \delta(\Delta J) = \frac{\sigma_{\Delta J}}{J}$$

C - macierz kowariancji współczynników B_1

$$F_1 = \left[1, F(Z^*), F^2(Z^*), \dots, F^m(Z^*) \right]$$

Tablica 1

Wartość średnia $\overline{\Delta Z}$ oraz wariancja $\sigma_{\Delta Z}^2$ będą podstawowe dla różnych modeli procedury wzorcowania.

1. Model liniowy $Z = B_0 + B_1 J$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \boxed{B_1^2 \sigma_{\Delta J}^2} + \sigma_{B_0}^2 + J^2 \sigma_{B_1}^2 + 2J \text{cov}(B_0, B_1)$$

$\overline{\Delta Z} = 0$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \boxed{B_1^2 \sigma_{\Delta J}^2} + \frac{S^2}{n} \left[1 + \left(\frac{\overline{Z_w} - Z}{S_{zw}} \right)^2 \right]$$

2. Model wielomianowy $Z = \sum_{i=0}^m B_i J^i$

$$\overline{\Delta Z} = Z - \sum_{i=1}^m B_i F^i(Z^*)$$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \boxed{\sigma^2(\Delta J) F^2(Z^*) \left\{ \frac{dZ}{dJ} \right\}^2} + F_1 C F_1^T$$

3. Model logarytmiczny $Z = B_0 + B_1 \ln|1 - J|$

$$\overline{\Delta Z} = -\frac{1}{2} B_1 \left\{ \frac{F(Z^*)}{1 - F(Z^*)} \right\}^2 \sigma(\Delta J)$$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \boxed{B_1^2 \left\{ \frac{F(Z^*)}{1 - F(Z^*)} \right\}^2 \sigma^2(\Delta J)} + \sigma_{B_0}^2 + M^2 \sigma_{B_1}^2 + 2M \text{cov}(B_0, B_1)$$

4. Model liniowy wielowymiarowy $Z = B_0 + \sum_{i=1}^m B_i J^i = I_1$

$\overline{\Delta Z} = 0$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \boxed{\sum_{i=1}^m B_i^2 \sigma_{\Delta J}^2} + F_m C F_m^T$$

$$\sigma_{\Delta Z}^2 = \boxed{\sigma_{\Delta Z0}^2} + \sigma_{\Delta Zw}^2$$

$$F_m = \left[1, F_1(Z^*), F_2(Z^*), \dots, F_m(Z^*) \right]$$

$$M = \ln \left\{ 1 - FC(Z^*) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{FC(Z^*)}{1 - FC(Z^*)} \delta(\Delta J) \right\}^2$$

4. DYSKUSJA

Z przedstawionych zależności widać, że wariancję błędu podstawowego można rozpatrywać jako sumę dwóch składników: wariancję błędu przenieszonego przez model ($\sigma_{\Delta Z_0}^2$) oraz wariancję błędu procedury wzorcowania $\sigma_{\Delta Z_w}^2$. Występowanie składowej $\sigma_{\Delta Z_w}^2$ wynika wyłącznie ze statystycznego charakteru modelu, bowiem gdyby model procedury wzorcowania miał charakter deterministyczny, to wówczas zarówno wariancje wszystkich współczynników modelu B_i (elementy macierzy C), jak i wartość składowej $\sigma_{\Delta Z_w}^2$ byłyby równe zeru. Dla modelu liniowego, (Tabl. I poz. 1.) wartość wariancji błędu procedury wzorcowania zależy od wartości wariancji resztowej S^2 , ilości próbek wzorcowych na podstawie, których wyznaczono model oraz rozkładu wartości próbek wzorcowych reprezentowanego przez wariancję wielkości Z_{w1} . Im wartości Z_{w1} są bardziej skupione wokół średniej, tym mniejsza będzie wartość wariancji $S_{Z_w}^2$ i większa wariancja błędu procedury wzorcowania. Można przypuszczać, że powyższe uwagi będą słuszne również dla jednowymiarowych modeli wielomianowych i logarytmicznych.

Dla zobrazowania wpływu postaci funkcyjnej modelu na wartość wariancji błędów przypadkowych przeprowadzono obliczenia liczbowe dla dwóch radioizotopowych przyrządów pomiarowych o różnych charakterystykach statycznych, a mianowicie, dla wagi radioizotopowej, której charakterystyka tylko w niewielkim stopniu odbiega od liniowej, oraz dla fluorescencyjnego miernika grubości powłok chromu na miedzi, o silnie nieliniowej charakterystyce "nasycającej" się przy określonej wartości natężenia promieniowania. Na Rys. 2 i 3 przedstawiono zależności wariancji błędu procedury wzorcowania $\sigma_{\Delta Z_w}^2$ oraz błędu przenieszonego $\sigma_{\Delta Z_0}^2$ od wartości wielkości mierzonej dla różnych wartości względnego błędu wejściowego $\delta(\Delta J)$ przyjmując cztery różne modele procedur wzorcowania: liniowy, wielomian drugiego stopnia, wielomian trzeciego stopnia i logarytmiczny. Przebieg wariancji procedury wzorcowania dla wszystkich modeli ma w zasadzie ten sam charakter, z tym, że w przypadku modeli wielomianowych drugiego i trzeciego stopnia widoczne są niewielkie lokalne ekstrema, występowanie których można tłumaczyć uproszczeniami poczynionymi w trakcie wyprowadzania zależności zestawionych w Tabelicy I. Z przedstawionych wykresów widać, że przyjęcie określonej postaci funkcyjnej modelu procedury wzorcowania determinuje wartość i przebieg

błędu przenieszonego przez model. Jest to bardzo istotny problem, z którego trzeba sobie zdać sprawę przy doborze modelu, gdyż w ten sam sposób przenosić się będą błędy dodatkowe powstające w różnych członach łańcucha pomiarowego.

W odróżnieniu od modeli liniowych, modele nieliniowe procedur wzorcowania powodują powstawanie błędów systematycznych. Na Rys. 4 przedstawiono zależnościilorazu składowej systematycznej i przypadkowej błędu podstawowego w funkcji wartości mierzonej wielkości Z dla różnych wartości wariancji błędu przenieszonego $\sigma_{\Delta Z_0}^2$. Generalnie należy stwierdzić, że wartość składowej systematycznej jest stosunkowo niewielka i stanowi w najgorszym przypadku zaledwie kilka procent wariancji składowej przypadkowej. Wyraźnie natomiast widać, że wartość składowej systematycznej silnie zależy od wartości błędu wejściowego $\delta(\Delta J)$, oraz od krzywizny charakterystyki statycznej. Dla wagi izotopowej, której charakterystyka jest zbliżona do prostej, wartość składowej systematycznej jest blisko o rząd wielkości mniejsza niż dla fluorescencyjnego grubościomierza powłok, którego charakterystyka jest bardzo nieliniowa.

5. OPTIMALIZACJA MODELU A MINIMALNY BŁĄD PODSTAWOWY

Postać funkcyjną modeli procedur wzorcowania radioizotopowych przyrządów pomiarowych wyznacza się metodą analizy regresji, a więc jest ona dobrana w taki sposób, aby wariancja resztowa S^2 , a co za tym idzie wariancja błędu procedury wzorcowania była jak najmniejsza. Ponieważ jest ona tylko jednym ze składników błędu podstawowego, aktualne staje się zagadnienie korekcji wyznaczonego modelu w taki sposób, aby doprowadziła ona do minimalizacji wariancji błędu podstawowego.

Jeżeli wariancja błędu przenieszonego będzie znacznie mniejsza od wariancji błędu procedury wzorcowania ($\sigma_{\Delta Z_0}^2 \ll \sigma_{\Delta Z_w}^2$), to minimalizacja błędu procedury wzorcowania będzie równoznaczna z minimalizacją błędu podstawowego i w takim przypadku żadna korekcja modelu nie jest wymagana. Jednakże nader często w praktyce pomiarowej zdarzają się przypadki, gdy nie można zapewnić wystarczająco małej wartości wariancji błędu wejściowego. Z drugiej strony, w pewnych przypadkach stosunkowo nieznaczna zmiana postaci funkcyjnej modelu może prowadzić do istotnej zmiany wartości wariancji błędu przenieszonego $\sigma_{\Delta Z_0}^2$.

Dobłą ilustracją takiego przypadku jest pokazana na Rys. 5 zależność wariancji błędów przenieszonego $\sigma_{\Delta Z_0}^2$ i procedury wzorcowania $\sigma_{\Delta Z_w}^2$ obliczonych dla modelu wielowymiarowego wyznaczonego przy fluorescencyjnym pomiarze cyny w kąpeli galwanicznej. Model I zapewnia minimalną wartość wariancji błędu procedury wzorcowania, natomiast Model II daje znacznie mniejszą wartość wariancji błędu przenieszonego przy nieznacznym tylko zwiększeniu wariancji błędu procedury wzorcowania.

Jak widać z pokazanego wyżej przykładu, w radioizotopowej aparaturze

spotyka się modele dające w określonych warunkach mniejszą wartość błędu podstawowego niż modele optymalne. W grupie przyrządów, których modele są rozpatrywane w niniejszej pracy, oprócz analizatora fluorescencyjnego przeznaczonego do oznaczania stężenia ołowiu i cyny w kapielach, podobny problem występuje dla modelu liniowego i logarytmicznego wagi izotopowej. Można sobie wyobrazić, że również dla niektórych modeli liniowych zmniejszenie wartości współczynnika B_1 może prowadzić do zmniejszenia wariancji błędu podstawowego przy niezmiennym tylko wzroście wariancji błędu procedury wzorcowania.

Ze względu na brak ogólnej metody wyszukiwania modeli dających minimalną wartość wariancji błędu podstawowego, w przypadku gdy wariancja błędu przeniesionego $\sigma_{\Delta Z_0}^2$ jest porównywalna z wartością wariancji błędu procedury wzorcowania $\sigma_{\Delta Z_w}^2$, należy zbadać, w jaki sposób dany model wyznaczony metodą analizy regresji "przenosi" błąd wielkości wejściowej ΔJ i odpowiednio go skorygować.

6. WNIOSKI

Składową przypadkową błędu podstawowego na wyjściu modelu procedury wzorcowania można przedstawić w postaci sumy dwóch składników: wariancji błędu powstającego w członach łańcucha pomiarowego poprzedzających procedurę wzorcowania i przeniesionej przez model na jego wyjście oraz wariancji błędu procedury wzorcowania spowodowanej przez statystyczny charakter modelu. Obliczono, że dla modelu liniowego (względem zmiennych) wariancja błędu procedury wzorcowania zależy od trzech parametrów:

- wariancji resztowej modelu regresyjnego,
- liczby wzorców wykorzystywanych do wyznaczania modelu procedury wzorcowania,
- estymatora wariancji zbioru wartości próbek wzorcowych.

W przypadku modeli nieliniowych (względem zmiennych) pojawia się zawsze składowa systematyczna błędu podstawowego, niezależnie od tego czy błąd wejściowy miał składową systematyczną, czy też nie. Wartość składowej systematycznej jest tym większa, im większa jest wartość wariancji błędu wejściowego oraz im bardziej jest nieliniowy model procedury wzorcowania.

Wyznaczenie modelu procedury wzorcowania metodą analizy regresji prowadzi do optymalizacji tylko jednego ze składników wariancji błędu podstawowego. W związku z tym, gdy wartość wariancji błędu przeniesionego przez model jest porównywalna z wartością wariancji błędu procedury wzorcowania, konieczna staje się korekcja wyznaczonego modelu w taki sposób, aby prowadziła do minimalizacji wariancji błędu podstawowego a nie tylko jednej z jego składowych. Zagadnienie to występuje szczególnie wyraźnie w wielowymiarowych modelach procedur wzorcowania.

Wyprowadzone zależności na wariancję i wartości średnie błędów

mogą być wykorzystane do dokonywania oceny i porównywania modeli radioizotopowej aparatury pomiarowej. Można je również stosować do oceny wpływu błędów dodatkowych.

LITERATURA

- [1] Cameron J.F., Clayton C.G. Przemysłowe przyrządy radioizotopowe. ROINTE Energetyki i Energii Atomowej, Warszawa 1978, 6.
- [2] Кленнер К.С., Чередниченко И.М. Вероятностный анализ при проектировании радиоизотопных приборов. Атомиздат, Москва 1971, 76.
- [3] Пугачев А.В., Сахаров Э.В., Долинин В.А. Радиоизотопные приборы технологического контроля. Атомиздат, Москва 1980, 30.
- [4] Piotrowski J. Teoria pomiarów. PWN, Warszawa 1986, 69.
- [5] Kawalerow G.J., Mandelstam S.M. Wprowadzenie do teorii pomiarów. PWN, Warszawa 1983, 82.
- [6] Urbański P. Analiza modeli matematycznych radioizotopowej aparatury pomiarowej. Raport INCT 2064/III/D/B, Warszawa 1988, 26-52.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕДУР КАЛИБРОВКИ И ПОГРЕШНОСТИ РАДИОИЗОТОПНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ.

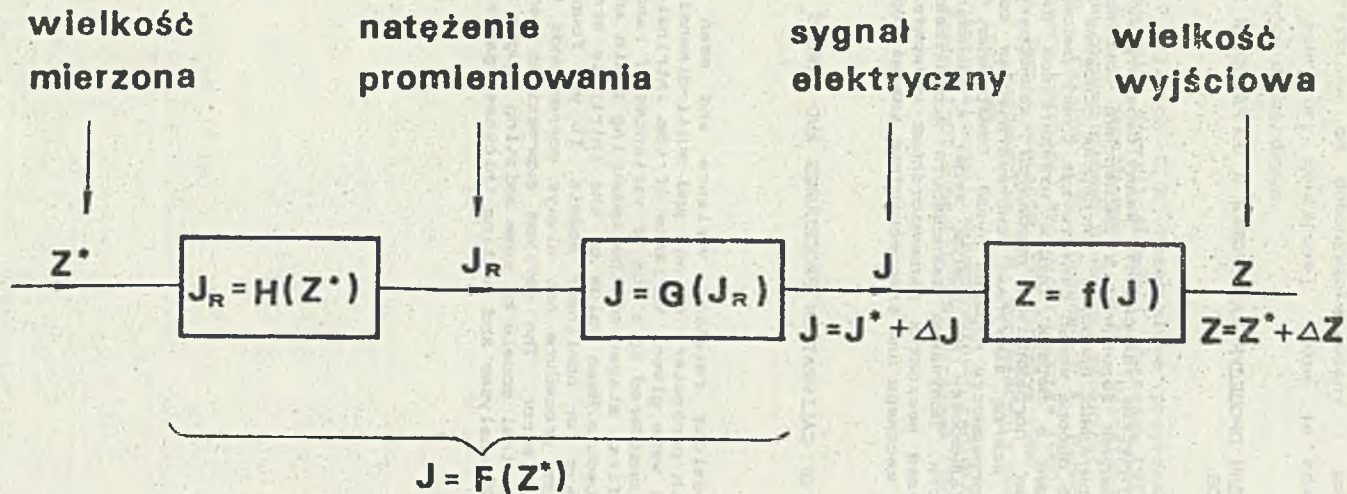
Резюме

Представлены математические зависимости между параметрами моделей одно- и многомерных а средней величиной и дисперсией основной погрешности радиоизотопных измерительных приборов. Дисперсию основной погрешности на выходе измерительного прибора можно считать как сумму дисперсии случайной погрешности возникшей в первых членах измерительной цепи, а также дисперсии случайной погрешности процедуры калибровки. В случае нелинейных моделей всегда выступает систематическая ошибка (средняя величина основной погрешности не равна нулю). Обнаружено, что оптимальная модель процедуры калибровки не всегда ведет к минимальной величине случайной погрешности. Полученные зависимости использовано для оценки математических моделей нескольких радиоизотопных измерительных приборов, таких как изотопные весомеры или флуоресцентные анализаторы и измерители толщины покрытия.

STATISTICAL MODELS OF CALIBRATION PROCEDURES AND ERRORS OF RADIOMETRIC GAUGES.

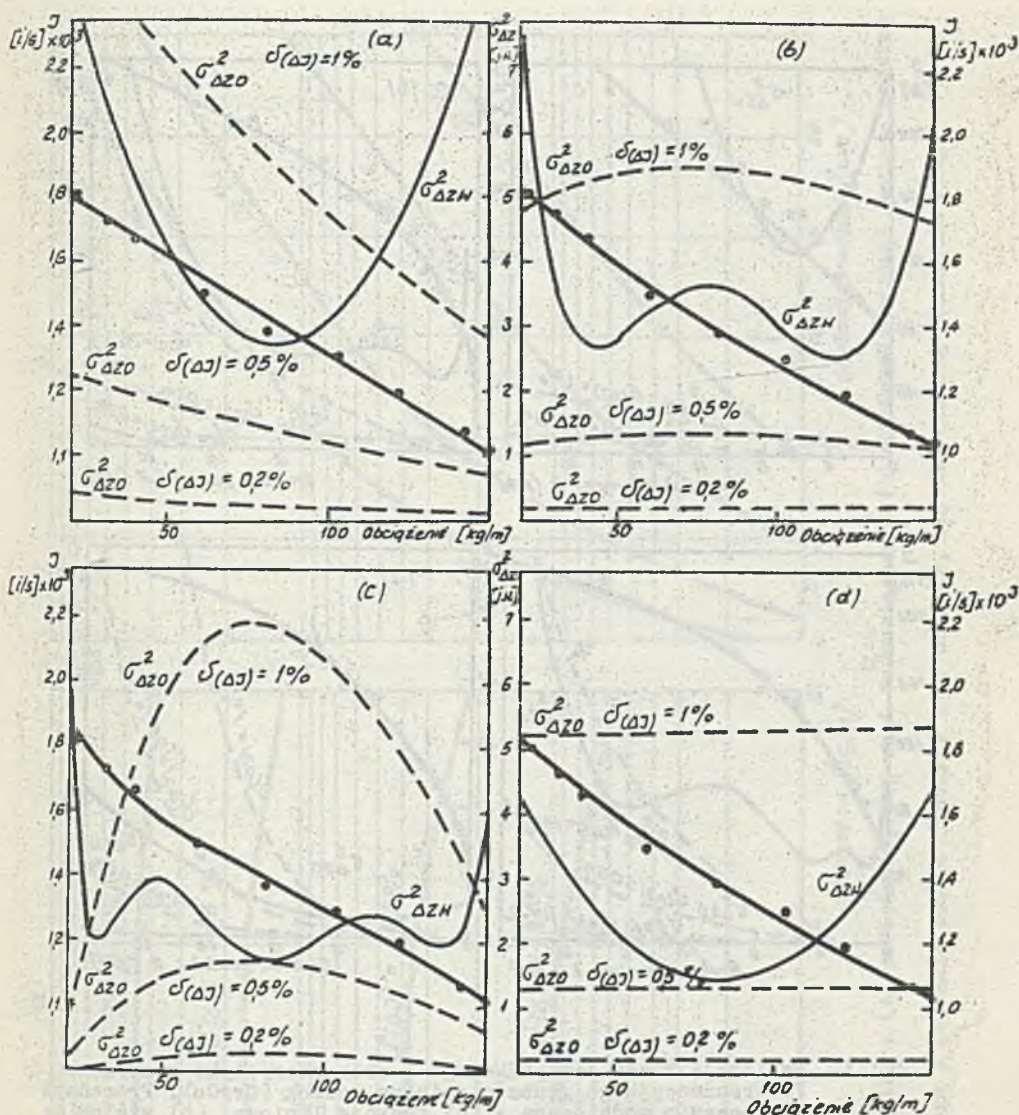
Summary

Mathematical expressions relating variance and mean value of the intrinsic error with parameters of one and multi-dimensional models of radioisotope gauges were given. Variance of the intrinsic error at the model's output is considered as a sum of variances of random error which is created in the first stages of the measuring chain and random error of calibration procedure. Mean value of the intrinsic error (systematic error) appears always for nonlinear models. It was found that optimal model of calibration procedure not always corresponds to the minimal value of intrinsic error. The derived expressions were applied for assesment of mathematical models of some existing gauges as radioisotope belt weigher and XRF analyser and coating thickness gauge.



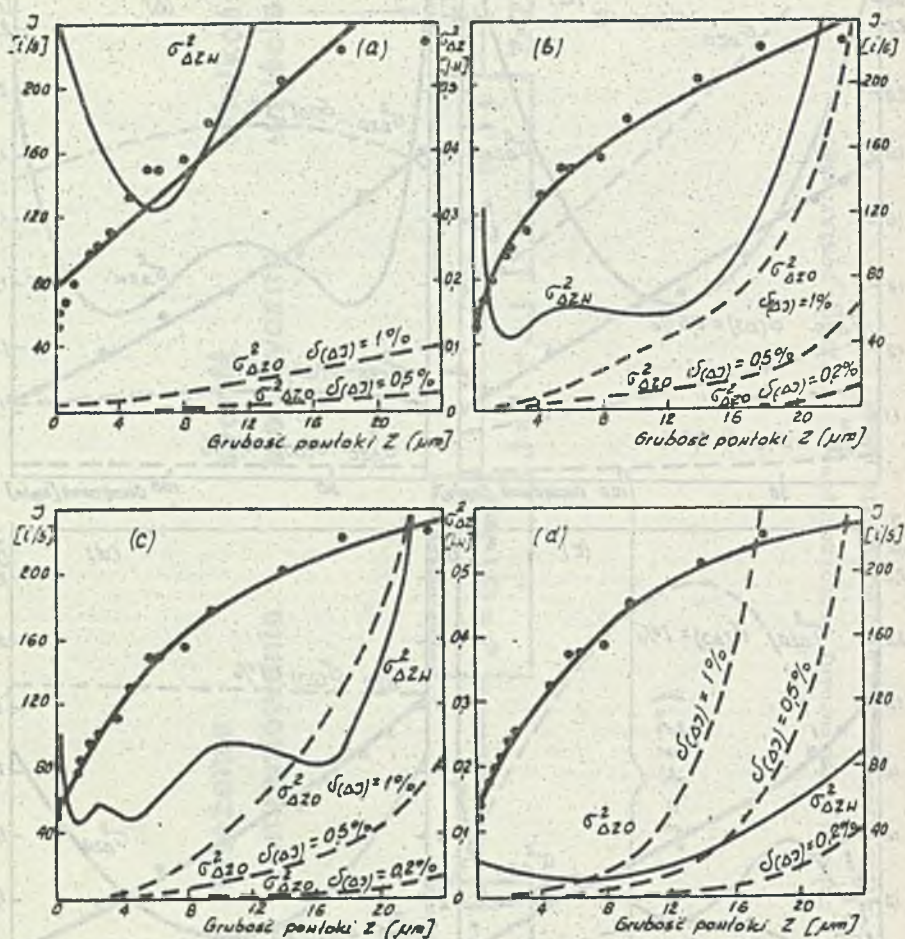
Rys.1. Schemat strukturalny radioizotopowego przyrządu pomiarowego

Fig.1. Structural diagram of radiometric gauge



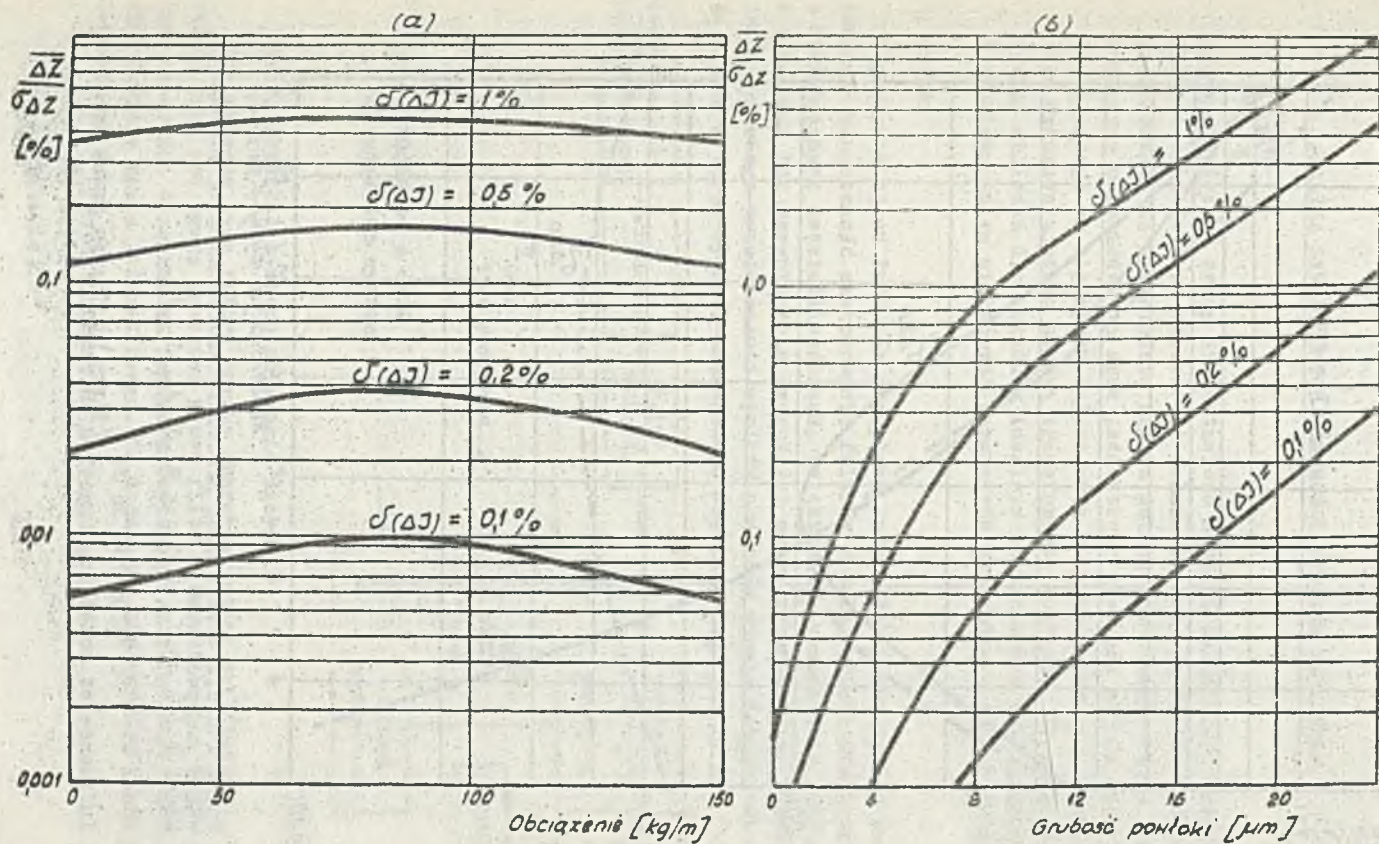
Rys.2. Wariancje błędów przypadkowych i charakterystyki statyczne radioizotopowej wagi taśmociągowej. Procedura wzorcowania modelowana: (a) funkcją liniową, (b) wielomianem 2-stopnia, (c) wielomianem 3-stopnia, (d) funkcją logarytmiczną

Fig.2. Variances of random errors and static characteristics of radioisotope conveyor belt weigher. Calibration procedure modelled by: (a) linear function, (b) polynomial of 2-degree, (c) polynomial of 3-degree, (d) logarithmic function.



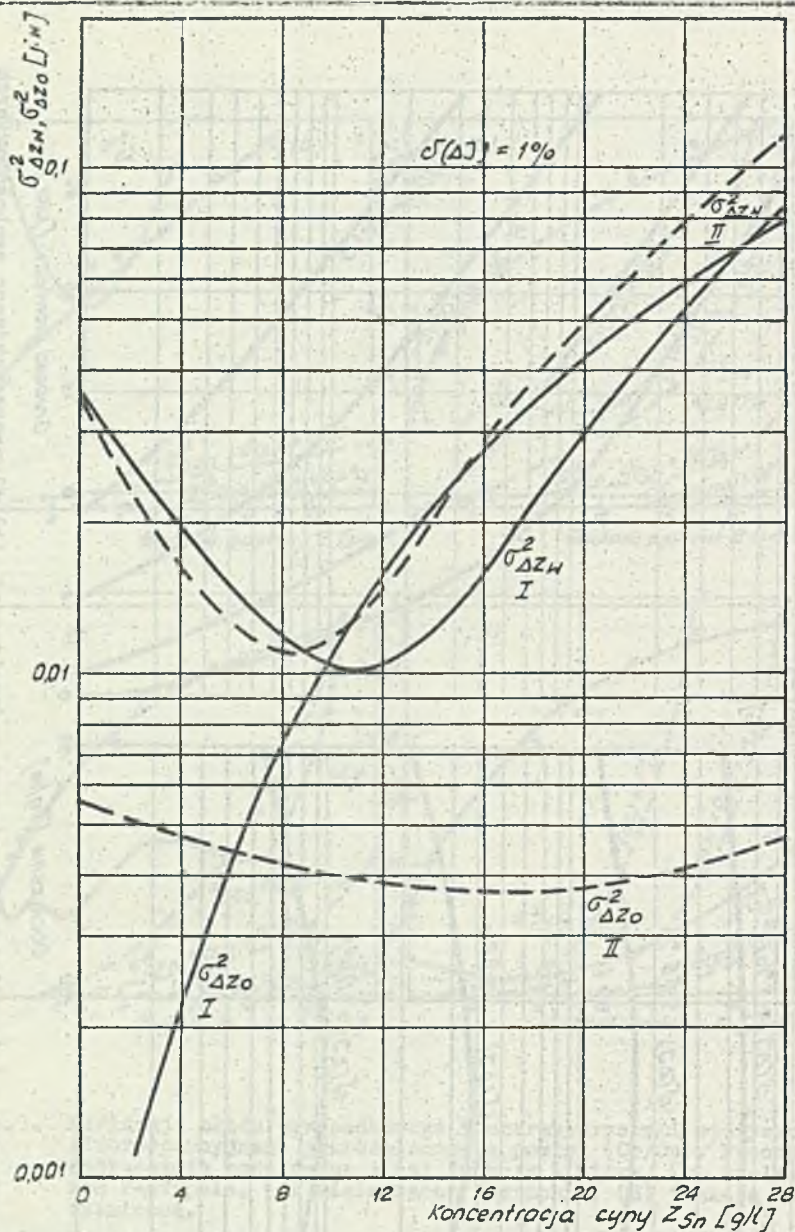
Rys.3. Wariancje błędów przypadkowych i charakterystyki statyczne fluorescencyjnego grubościomierza powłok (Cr/Cu). Procedura wzorcowania modelowana : (a) funkcją liniową, (b) wielomianem 2-stopnia, (c) wielomianem 3-stopnia, (d) funkcją logarytmiczną.

Fig.3. Variances of random errors and static characteristics of XRF coating thickness gauge (Cr/Cu). Calibration procedure modelled by : (a) linear function, (b) polynomial of 2-degree, (c) - polynomial of 3-degree, (d) - logarithmic function.



Rys.4. Błędy systematyczne : (a) radioizotopowej wagi taśmociągowej, (b) fluorescencyjnego grubościomierza powłok

Fig.4. Systematic errors : (a)radioisotope conveyer belt weigher, (b) XRF coating thickness gauge



Rys.5. Wpływ funkcji modelującej procedurę wzorcowania na wariancję błędów przypadkowych

$$\text{Model I : } B_0 + B_1 J_{Sn} + B_2 J_{Pb} + B_{12} J_{Sn} J_{Pb} + B_{22} J_{Pb}^2$$

$$\text{Model II : } B_0 + B_1 J_{Sn} + B_{12} J_{Sn} J_{Pb}$$

Fig.5. Influence of modelling function on random errors