Seria : AUTOMATYKA z.98

Nr. Kol. 1042

Maria WRZUSZCZAK

ANALIZA DYNAMICZNYCH WŁASNOŚCI FILTRÓW AKTYWNYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono analizę dynamicznych własności filtrów na podstawie odpowiedzi układu na skok jednostkowy napięcia wejściowego. Na przykładzie filtru dolnoprzepustowego rzędu drugiego porównano odpowiedzi na skok jednostkowy uzyskane metodą całkowania iteracyjnego wg algorytmu Eulera oraz ze pomocą programu komputerowego wykorzystującego szybką transformatę Fouriera. Przedstawiono wyniki obliczeń dla układu z idealnym wzmacniaczem operacyjnym oraz z uwzględnieniem niektórych parametrów wzmacniacza operacyjnego.

## 1. WSTEP

W pewnym miejscu łańcucha przepływu informacji przez system pomiarowy powstaje konieczność zastosowania filtrów w celu wytłumienia przebiegów o nicpożądanych częstotliwościach, selektywnego wzmocnienia bądź wytłumienia, czy też ograniczenia szerokości pasma przenoszenia. Rozwój systemów cyfrowego przetwarzania wyników pomiarów wymaga doboru odpowiedniego filtru w torze sygnału analogowego (rys.1) 11.



Rys. 1. Przykład systemu zbierania danych

Przy wyborze typu filtru oprócz charakterystyki amplitudowej i fazowej należy brać pod uwagę wnoszone przez filtr zniekształcenia opóźnieniowe oraz własności dynamiczne. Sygnałem testującym w dziedzinie czasu jest na ogół funkcja skoku jednostkowego. Na podstawie odpowiedzi filtru na skok jednostkowy można określić (rys.2):

- opóźnienie filtru;
- czas narastania;



116

- wielkość przeregulowania A,;
- pulsację ω;
- współczynnik tłumienia & lub dobroć filtru Q = 1



Fig.2. Characteristic parameters of a response to a unit step function according to 1 (the steady state level is assumed as 1).

#### Rys.2. Parametry charakterystyczne odpowiedzi na skok jednostkowy wg [1] przy założeniu, że wartość ustalona jest równa jedności.

Obecnie najlepszym i najtańszym sposobem zbadania przydatności filtru zaprojektowanego jest symulacja komputerowa.

## 2. OBLICZANIE ODPOWIEDZI FILTRU NA SKOK JEDNOSTKOWY

Jednym ze sposobów uzyskiwania odpowiedzi filtru na skok jednostkowy jest obliczanie metodą całkowania numerycznego. Elementy gromadzące energię zastępuje się ich dyskretnymi modelami - dwójnikami aktywnymi [2] składającymi się z rezystancji i źródła prądu lub napięcia stałego (rys.3). Parametry modeli przyjmują wartości dyskretne, różne w kolejnych krokach h procesu iteracyjnego.



Fig.3. Discrete models of energy storing elements with current source or equivalent voltage source

Rys.3. Modele dyskretne elementów gromadzących energię ze źródłem prądowym lub równoważnym źródłem napięciowym; I<sub>n</sub>, U<sub>n</sub> - wydajności źródeł prądowych i napięciowych obliczone w poprzednim kroku.

#### Analiza dynamicznych własności ....

W zależności od użytego algorytnu całkowania numerycznego otrzymuje się odmienne wyrażenia na wielkości elektryczne modeli pojemności (tabela 1).

Zestawienie modeli pojemności dla różnych algorytmów całkowania numerycznego



Jest oczywiste, że jeśli w układzie występują tylko pojemności liniowe i zastąpimy je dyskretnymi modelami stowarzyszonymi z jedną z metod iteracyjnych, to otrzymamy układ czysto rezystanoyjny. Napięcie na zaciskach dwójnika zastępczego (rys.3) odpowiadającego pojemności C<sub>1</sub> w kroku n-tym, czyli w chwili t = n h można obliczyć np. metodą potencjałów węzłowych. Napięcie wyjściowe układu obliczane jest dla każdej chwili t = n h. Dokładność tak uzyskanej odpowiedzi zależy więc od wielkości kroku iteracyjnego h, którego wartość maksymalna określona jest warunkiem zbieżności i stabilności algorytmu ([2] rozdział 12,13). W dal-Bzej części przedstawiono odpowiedzi filtru o schemacie jak na rys.4, obliczone wg algorytmu Eulera i porównano je z odpowiedzią tego samego filtru, wyznaczoną metodą odwrotnego przekształcenia Laplace a wykorzystującego szybką transformatę Fouriera [3].

3. ANALIZA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH NA PREYKŁADZIE FILTRU DOLNOPRZEPUSTOWEGO



Tabala 1

Rozpatrzny filtr dolnoprzepustowy o schemacie jak na rys.4. Macierz admitancyjna układu jest następująca:

	1	2	3	4	5
1	¥ <sub>1</sub>	- X <sub>1</sub>	0	0	0
2	- ¥ <sub>1</sub>	Y,+Y2+8C1	- ¥2	- sC <sub>1</sub>	0
3	O	- Y <sub>2</sub>	Y <sub>2</sub> +sC <sub>2</sub> +y <sub>1</sub>	0	- y <sub>i</sub>
4	0	- eC <sub>1</sub>	- у <sub>ш</sub>	<sup>sC</sup> 1 <sup>+Y</sup> f <sup>+y</sup> o	- Y <sub>f</sub> +y <sub>m</sub>
5	0	0	- y <sub>i</sub>	- Y <sub>f</sub>	Y <sub>f</sub> +y <sub>i</sub>

gdzie:

$$X_1 = \frac{1}{R_1}$$
  $X_2 = \frac{1}{R_2}$   $Y_f = \frac{1}{R_f}$ 

uwzględniono parametry wzmacniacza operacyjnego:

$y_{\pm} = \frac{1}{R_{\pm}}$	R <sub>r</sub> - rezystancja różnicowa
$y_m = \frac{kuro}{R_r}$	kuro = wzmocnienie wzmacniacza bez sprzężenia zwrotnego
$y_0 = \frac{1}{R_0}$	R <sub>o</sub> - rezystancja wyjściowa .

Transmitancja napięciowa dla układu ze wzmacniaczem operacyjnym idealnym wyraża się wzorem:

$$f_{U \ id}(B) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{B^2 + B \frac{(R_1 + R_2) C_2}{C_1 C_2 R_1 R_2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

(1)

Analiza dynamicznych własności ....

a oznaczając

$$\omega_{n} = \frac{1}{\sqrt{C_{1}C_{2}R_{1}R_{2}}}$$
(2)
$$\xi = \frac{(R_{1}+R_{2})C_{2}\omega_{n}}{2}$$
(3)

wzór (1) przyjmuje postać:

$$K_{U id}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s \cdot 2\xi \omega_n + \omega_n^2}$$
 (4)

gdzie w<sub>n</sub> - pulsacja graniczna, Ę - współczynnik tłumienia.

Po podstawieniu wartości rezystancji i pojemności takich jak podano na rys.4, transmitancja filtru

$$K_{U id}(s) = \frac{100786,1}{s^2+317,4763s+100786,1}$$
 (5)

an itemationers of publics (8) before studying at seal course !

 $\omega_{n id} = 317,4683$ 

$$\xi_{id} = 0,5000126$$

Transmitancja ta (wzór (1)) nie zależy od rezystancji R.

Transmitancja napięciowa uwzględniejąca parametry wzmacniacza operacyjnego jest funkcją wymierną postaci:

$$K_{U}(s) = \frac{B_{2}s^{2} + B_{1}s + B_{0}}{A_{2}s^{2} + A_{1}s + A_{0}}, \qquad (6)$$

gdzie:

$$A_{2} = C_{1}C_{2} \{ [Y_{f}(y_{0}+y_{1}+y_{m}) + y_{0}y_{1}] + (Y_{1}+Y_{2})(Y_{f}+y_{1}) \}$$

$$A_{1} = C_{1}(Y_{1}+y_{0}) [Y_{f}(Y_{2}+y_{1}) + y_{1}Y_{2}] + C_{2}(Y_{1}+Y_{2}) [Y_{f}(y_{0}+y_{1}+y_{m}) + y_{0}y_{1}]$$

$$A_{0} = Y_{1}Y_{2} [Y_{f}(y_{0}+y_{1}+y_{m}) + y_{0}y_{1}] + y_{1}y_{0}Y_{f}(Y_{1}+Y_{2})$$

$$B_{2} = Y_{1}C_{1}C_{2}(Y_{f} + y_{i})$$
$$B_{1} = Y_{1}C_{1}[Y_{2}(Y_{f} + y_{i}) + Y_{f}y_{i}]$$

$$B_{o} = Y_{1}Y_{2}Y_{f}(y_{m} = y_{1})$$

a pulsacja W, wyraża się wzorem

$$\omega_{n}^{2} = \frac{1}{c_{1}c_{2}R_{1}R_{2}} \cdot \frac{y_{0} + y_{1} + y_{m} + y_{0}y_{1}(R_{f} + R_{1} + R_{2})}{y_{0} + y_{1} + y_{m} + y_{0}y_{1}R_{f} + (\frac{1}{R_{1}} + \frac{1}{R_{2}})(1 + y_{1}R_{f})}$$
(7)

Po podstawieniu wartości elementów oraz parametrów wzmacniacza operacyjnego  $\mu$ A 741C (y<sub>i</sub> = 0,5 $\mu$ S, y<sub>m</sub> = 2570 S, y<sub>o</sub> = 13,34 mS) obliczono wapółczynniki transmitancji (6)(po podzieleniu licznika i mianownika przez A<sub>o</sub>):

$$K_{U}(a) = \frac{9.59 \cdot 10^{-9} a^{2} + 8.81 \cdot 10^{-6} a + 100785.6}{a^{2} + 317.481 \text{ S} + 100786.2} \approx \frac{100785.6}{a^{2} + 317.481 \text{ S} + 100786.2}$$
(8)

Współczynniki przy s<sup>2</sup> oraz s w liczniku są pomijalnie małe i transmitancja przyjmuje postać (8) zbliżoną do transmitancji ze wzmacniaczem operacyjnym idealnym - wzór (5).

Pulsacja i współczynnik tłumienia dla transmitancji (8) wynoszą

$$\omega_n = 317,4684 \frac{rad}{8}, \xi = 0,5000201.$$

Zmiana pulsacji granicznej i współczynnika tłumienia po uwzględnieniu parametrów wznacniacza operacyjnego jest niewielka (zależność (9),(10)), zupełnie niezzuważalna w odpowiedzi układu na skok napięcia wejściowego:

$$\frac{(\omega_n - \omega_{n-1d}) \ 100\%}{\omega_{n-1d}} = 0,00003\%$$
(9)

(10)

$$\frac{(\xi - \xi_{id}) \ 100\%}{\xi_{id}} = 0,0015\%$$

Wyniki tego samego rzędu((9), (10)) uzyskano dla innych wartości rezystan

## Analiza dynamicznych własności ....

cji  $R_1, R_2, R_1$ . Nie popełnia się więc praktycznie błędu pomijając parametry wzmacniacza operacyjnego. We wzorze (6) na transmitancję napięciową występuje admitancja  $Y_f = \frac{1}{R_1}$ , ale cdpowiedź na skok jednostkowy praktycznie nie zależy od  $R_f$  przy<sup>2</sup>zmianach  $R_f$  od 0,1 L do 100 k Lzgodnie s oczekiwaniami.



Rys.5. Odpowiedź układu na skok napięcia wejściowego  $\omega_n = 317,4684 \frac{rad}{s}, \xi = 0,5$ 

Na rys.5 przedstawiono odpowiedź układu z rys.4, o transmitancji danej wzorem (8), uzyskaną metodą odwrotnego przekształcenia Laplace'a, z wykorzystaniem szybkiej transformaty Fouriera.

```
<sup>2</sup> wykresu można odczytać:
czas narastania: 5 ms
czas opóźnienia: 4 ms
czas ustalania: 37 ms
przeregulowanie: 0,15 V.
```

Wielkości te, i pozostałe opisane w pkt.1, można dokładniej określić na podstawie wydruków liczbowych.

Rys.6 przedstawia odpowiedzi filtru dla różnych wartości współczynnika tłumienia  $\xi$ , zmienionego poprzez R<sub>1</sub> (równoczesna zmiana pulsacji granicznej $\omega_n$ ).





## Rys.6. Odpowiedź układu na skok jednostkowy dlaz a $\xi = 0.47$ $\omega_n = 454.54$ R = 20 k.Ω b $\xi = 0.5$ $\omega_n = 317.47$ R = 41 k.0

ъ	5=	0,5	ω,"		317,47	R	20	41 1	R
G	ξ=	0,62	ω'n	=	203,27	R	-	100	kΩ

Dla tego samego układu obliczono odpowiedź na skok jednostkowy metodą całkowania numerycznego wg algorytmu Eulera ( $h = 10^{-4}$ s). Uzyskano bardzo podobne przebiegi (rys.7, tabela 2). Dla porównania obliczono również odpowiedź układu o transmitancji (5)korzystając z tablicy transformat (kolumna II, tabela 2).

Tabela 2.

Zestawienie odpowiedzi filtru obliczonych różnymi metodami :  $U_{ny1}(t) - wg$  tablicy transformat Laplace'a ;  $U_{ny2}(t) - wg$  algorytmu Eulera ;  $U_{ny3}(t) - za pomocą programu "LAPLAC"$ 

t	U <sub>NCY</sub> 1 (t) [V]	U <sub>Wy2</sub> (t)[V]	U <sub>WV3</sub> (t)[V]
[ms]	8	þ	C
		3	
1 2 3 4 5 6 7	0,049 0,163 0,318 0,472 0,657 0,806 0,936	0,048 0,164 0,317 0,486 0,652 0,801 0,926	0,052 0,166 0,322 0,4936 0,663 0,815 0,943

YET 18-	element spectromy	See	c.d.	tabeli 2
8 9 10 11 11,6 12 13 14 15 16 17 18 20	1,034 1,103 1,143 1,161 1,163 1,162 1,145 1,122 1,095 1,068 1,041 1,019 1,000 0,987	1,022 1,090 1,132 1,151 1,154 1,152 1,141 1,152 1,141 1,095 1,069 1,069 1,044 1,023 1,005 0,992	1,041 1,109 1,151 1,167 1,170 1,168 1,153 1,130 1,102 1,074 1,074 1,048 1,026 1,007 0,994	

Wyniki te, przedstawione na rys.7 pozwalają stwierdzić przydatność wszystkich trzech opisanych metod do wyznaczania odpowiedzi czasowych układów. Rysunek 8 przedstawia fragment rys.7 w powiększeniu.



Rys.7. Przebieg Uwy1(t), Uwy2(t), Uwy3(t) wg tabeli 2 .

123



Napiecie U wy (t) (rys.7; tabela 2) zapisane dla transmitancji 1 na podstawie tablicy transformat, wyraża się wzorem:

$$U_{wy}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \arctan tg \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2}}) + 1 \quad (11)$$

Można wyprowadzić wzory na pulsację graniczną filtru oraz współczynnik tłumienia:

$$\omega_{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{A_{1}}{A_{2}}\right)^{2}} \quad (12) \qquad \xi_{j} = \frac{\frac{1}{2\pi} \ln \frac{A_{1}}{A_{2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{A_{1}}{A_{2}}\right)^{2}}} \quad (13)$$

gdzie: A<sub>1</sub>,A<sub>2</sub> - dwa kolejne maksymalne przeregulowania, T - czas między dwoma kolejnymi przeregulowaniami.

Można więc te wielkości obliczyć na podstawie odpowiedzi czasowej filtru drugiego rzędu, nie znając analitycznego wzoru transmitancji. 4. WNIOSKI

Odpowiedzi czasowe filtru obliczone trzema różnymi sposobami różnią się niewiele. Jeżeli przyjąć przebieg U<sub>wy1</sub>(t) jako wzorcowy, to napięcie U<sub>wy3</sub>(t) różni się maksymalnie o 0,6%, a napięcie U<sub>wy2</sub>(t) o 1%. Kolejne przeregulowania występują dla tych samych chwil czasu t = 11,5395 ms. Uwzględnienie parametrów wzmacniacza operacyjnego nie wpływa na odpowiedź filtru. inaliza dynamicznych własności ....

#### LI TERATURA

- 1 "Podręcznik metrologii" pod redakcją P.H. Sydenhama, WKŁ, Warszawa 1988, rozdz.9.
- 2 L.O Chua, Pen-Min Lin "Komputerowa analiza układów elektronicznych" WNT, Warszawa 1981.
- 3 C.F.Chen.R.F.Chin "Evaluation of irrational and transcendental transfer functions via the fast Fourier transform". Int.I.Electronics 1973, vol.35 no.2, pp.267-276.

#### ANALYSIS OF DYNAMICAL PROPERTIES OF ACTIVE FILTERS

## Summary

The analysis of dynamic properties of filters is presented in the paper performed basing on the circuit response to input unit step function. For an example of a second-order low-pass filter the responses obtained using iterative integrating method based on Euler algorithm and using FFT-calculating computer program are compared. The results calculated for a case of an ideal and non-ideal amplifier are discussed.

# АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АКТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

## Резрме

В работе представлен анализ динамических свойств фильтров на основании ответов на единичный скачок напряжения ( Хевисайда ). На примере нихнечастотного фильтра показаны результаты сравнения ответа системы на возмущающие воздействия, получены методом численного интегрирования по алгоритму Эйлера и программу о Быстрым Преобразование Фурье. Представлены результаты для системы с идеальным операционным усилителем а также для схемы с некоторыми параметрами операционного усилителя.