ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: GÓRNICTWO z. 122 Nr kol. 742

Jan KOSZELSKI

POŁUDNIKOWE SIŁY UOGÓLNIONE W PŁASZCZU WIELOLINOWEGO KOŁA PĘDNEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono znane metody wyznaczania południkowych momentów zginających i południkowych sił błonowych. Podano przykład liczbowy i porównano różne wyniki obliczeń teoretycznych oraz porównano wyniki teoretyczne z wynikami doświadczalnymi. Uproszczono równanie na obliczanie południkowych sił błonowych.

1. WSTĘP

Pierwsze teoretyczne prace na temat sił uogólnionych występujących w płaszczu wielolinowego koła pędnego opublikował O. Popowicz [3], determinując równoleżnikowe momenty zginające okręgi. Na określenie momentów południkowych zginających tworzące płaszcza przyjęto równania Timoshenki wyprowadzone dla obciążenia kołowo-liniowego. Promieniowe żebra usztywniające płaszcz uwzględniono w obliczeniach przez przyjęcie grubości zastępczej wynikającej z zależności momentów bezwładności płaszcza i żeber.

Wyniki prac teoretycznych wymagały weryfikacji poprzez badania modelowe, które były prowadzone w Instytucie Mechanizacji Górnictwa Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Analiza wyników doświadczalnych i ich porównanie z wynikami teoretycznymi wykazuje wystarczającą słuszność równań teoretycznych oraz występowanie w płaszczu równoleżnikowych sił błonowych o kierunku stycznym do okręgów [2].

W roku 1971 ukazała się publikacja F.L. Ševčenki [5] na temat przybliżonego obliczania płaszcza koła maszyny wyciągowej MK-3,25 x 4. W tej pracy określone są siły uogólnione, które bierze się pod uwagę w obliczeniach stereomechanicznych płaszcza. Odnośnie do żeber promieniowych przyjęto podział obciążenia na część przenoszoną przez żebra i na część przenoszoną przez płaszcz. Podział jest wynikiem zależności geometrycznej płaszcza i przekroju żebra.

Pod względem modelu statycznego - płaszcz koła przyjmuje się jako powłokę walcową. Przyjęta terminologia jest wyjaśniona w pracy [2].

Celem pracy jest przedstawienie metody Popowicza i Ševčenki oraz porównanie tych metod na przykładzie obliczeniowym i na podstawie wyników badań na modelach.

2. MOMENTY POŁUDNIKOWE

Momenty południkowe M_p, które zginają tworzące gładkiej walcowej powłoki, przy równomiernym i liniowym obciążeniu na obwodzie okręgu oraz dostatecznie oddalonym od krawędzi podparcia, opisał Timoshenko [4].

$$M_p = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos\beta x - \sin\beta x), \tag{1}$$

gdzie:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\vartheta^2)}{g^2 R^2}}, \tag{2}$$

ϑ - liczba Poissone'a,
e - podstawa logarytmów naturalnych,
g - grubość powłoki,
$P = \frac{Z}{R}$,
R - promień podziałowy powłoki,
x - odległość od siły skupionej,
Z - naciąg liny.

Dla x = 0, moment przyjmuje wartość maksymalną

$$M_{pm} = \frac{P}{4\beta} \tag{3}$$

W warunkach pracy wielolinowego koła pędnego założenie dostatecznej odległości liny od krawędzi podparcia jest spełnione. Natomiast obciążenie przeważnie jest nierównomiernie rozłożone na łuku opasania płaszcza liną, jak również jest nierównomiernie rozłożone na odcinku tworzącej, równym szerokości wykładziny.

Sprawdzenia adekwatności wyników otrzymanych przy korzystaniu z równań (1-3) dla warunków pracy płaszcza wieloliniowego koła pędnego było celem pracy [2].

Wyniki badań wykazywały wystarczające podobieństwo charakterystyk naprężeń południkowych wyznaczonych doświadczalnie w porównaniu z charakterystykami obliczonymi przy skorzystaniu z równań (1-3), oczywiście w jednakowych warunkach. Jednakże w wartościach maksymalnych naprężeń w wynikach doświadczalnych otrzymano zawsze zaniżenie rzędu 20-30 % w odniesieniu do wartości rzeczywistej.

Zaniżenie wartości doświadczalnych wyjaśnia się następująco:

- w badaniach modelowych stosowano tensometry, których długość bazy pomiarowej decyduje o systematycznym błędzie pomiarowym wynikającym z ostrego nachylenia charakterystyki naprężeń południkowych w otoczeniu wierzchołka,
- do obliczeń przyjmuje się siłę skupioną, natomiast w przeprowadzonych badaniach obciążenie było nierównomiernie rozłożone na odcinku styku liny z powłoką wzdłuż tworzących, powoduje tym samym zmniejszenie naprężenia maksymalnego,
- podczas badań lub przy montażu może wystąpić przesunięcie między osią liny a osią tensometru, odpowiednio do tego przesunięcia zmniejsza się wartość zmierzonych naprężeń w porównaniu do występujących naprężeń rzeczywistych.

Przyjmując do obliczeń obciążenie równomierne rozłożone wzdłuż tworzącej na odcinku odpowiadającym naciskowi na płaszcz, zamiast obciążenia skupionego, można dokładniej wyznaczyć maksymalny moment południkowy [2]:

$$M_{pm} = \frac{q}{2\beta^2} e^{-\beta S/2} \sin \beta S/2, \tag{4}$$

gdzie:

$q = \frac{P}{S}$,

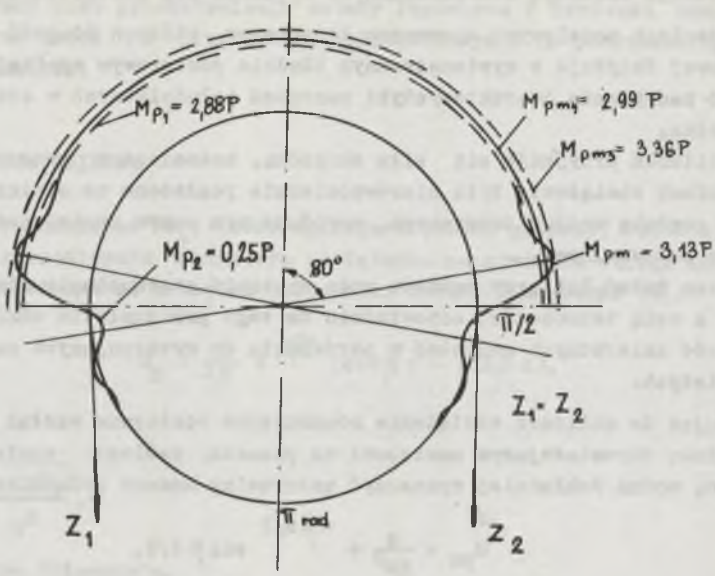
S - odcinek styku liny z płaszczem.

Obliczona wartość, przy zastosowaniu równania (4), jest około 7% mniejsza od wyniku otrzymanego przy korzystaniu z równania (3) dla S = 0,098 m [2], przy czym o wielkości tej różnicy decyduje długość odcinka S. Biorąc pod uwagę wykładzinę cierną przenoszącą obciążenie lin na płaszcz, zauważamy, że wpływ wykładziny na rozkład obciążenia będzie zależny od modułu sprężystości i szerokości S tej wykładziny.

3. MOMENTY POŁUDNIKOWE WEDŁUG ŠEVČENKI

Według przykładu podanego w pracy [5] maksymalny moment południkowy pod liną jest wypadkowy i składa się z momentu rozłożonego równomiernie na łuku obciążenia i z momentu o charakterystyce cosinusoidy zanikającej, przy założonym równomiernym rozkładzie obciążenia na łuku opasania koła liną. Maksymalna wartość fali występująca w otoczeniu skoku obciążenia, to jest przy kącie 80°, superponuje się z wartością momentu rozłożonego równomiernie, co przedstawiono na rys. 1.

Momenty południkowe rozłożone równomiernie na łuku opasania powłoki liną [5].



Rys. 1. Maksymalne momenty południkowe

$$M_{p1}(\xi) = -\frac{PR}{\gamma}\,(k_1\tilde{\Phi}_1 + k_2\tilde{\Phi}_2); \tag{5}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{\Phi_1\Phi_3^* - \Phi_3\Phi_1^*}{\Phi_1\Phi_2 + 4\Phi_3\Phi_4}; \tag{6}$$

$$k_2 = \frac{\Phi_2\Phi_1^* + 4\Phi_4\Phi_3^*}{\Phi_1\Phi_2 + 4\Phi_3\Phi_4}, \tag{7}$$

$$\gamma = 1{,}31\sqrt{\frac{R}{g}}, \tag{8}$$

Φ_{1-4} - funkcje Kryłowa [1].

$\Phi_1 = \mathrm{Ch}\gamma\xi \cdot \cos\gamma\xi;$

$\Phi_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\gamma\xi \cdot \sin\gamma\xi + \mathrm{Sh}\gamma\xi \cdot \cos\gamma\xi);$

$\Phi_3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\gamma\xi \cdot \sin\gamma\xi;$

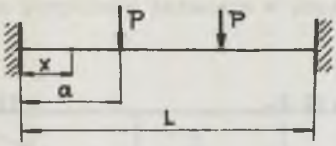
$\Phi_4 = \frac{1}{4}(\mathrm{Ch}\gamma\xi \cdot \sin\gamma\xi - \mathrm{Sh}\gamma\xi \cdot \cos\gamma\xi);$

Przebiegające według argumentu,

$$\xi = \frac{x}{R}$$

dla $\Phi^*_{1-3} - \xi = \frac{x-a}{R}$

x i a odległość od punktu podparcia płaszcza przedstawiona na rys. 2.



Rys. 2. Schemat obciążenia płaszcza wzdłuż tworzącej

Przykładowo dla płaszcza o parametrach zbliżonych do stosowanego w maszynie wyciągowej MK-3,25 x 4, przy $R = 1,5$ m, $g = 0,02$ m, i długości $L = 0,9$ m. Pod siłą skupioną, $a = 0,3$m, rys. 2, $\gamma = 11,35$, dla $\frac{L}{2}$

$$\gamma\xi = \gamma\frac{L}{2R} = 3,4,$$

funkcje Kryłowa

$$\Phi_1 = -14,50; \quad \Phi_2 = -9,15; \quad \Phi_3 = -1,91; \quad \Phi_4 = 2,66. \tag{9}$$

Dla $\gamma\frac{L}{6R} = 1,13$

$$\Phi_1^* = 0,725; \quad \Phi_2^* = 1,072; \quad \Phi_3^* = 0,632; \quad \Phi_4^* = 0,242. \tag{10}$$

$k_1 = -0,0692,$
$k_2 = 0,0005.$

Pod siłą skupioną, rys. 2.

$$\gamma x = 11,35\,\frac{30}{150} = 2,27;$$

$$\tilde{\Phi}_1 = -3,15; \quad \tilde{\Phi}_2 = 0,33; \quad \tilde{\Phi}_3 = 1,83; \quad \tilde{\Phi}_4 = 1,71. \tag{11}$$

Maksymalny moment południkowy po podstawieniu (9), (10) i (11) do wyrażeń (6), (7) i (5) oraz po wykonaniu działań arytmetycznych

$$M_{p1} = 2,88\ P.$$

Wyrażenie (6) i (7) można również wyznaczyć:

$$k_1 = V_{\gamma\xi_1} + V_{\gamma\xi_2} = -e^{-\gamma\xi_1}\sin\gamma\xi_1 - e^{-\gamma\xi_2}\sin\gamma\xi_2; \tag{12}$$

$$k_2 = e^{-\gamma\xi_1}(\cos\gamma\xi_1 + \sin\gamma\xi_1) + e^{-\gamma\xi_2}(\cos\gamma\xi_2 + \sin\gamma\xi_2); \tag{13}$$

Druga składowa M_{p2} momentów południkowych

$$M_{p2} = -\sum \frac{Rn^2}{4\gamma^4} N_p; \tag{14}$$

$$n = 2i + 1, \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3,4.....$$

n liczy się do 17;
N_p - siły południkowe, których wyznaczenie podano w punkcie 4 wzór (23).

Dla podanego w punkcie 2 przykładu:

$$M_{p2} = 0{,}25\ P.$$

$$M_{pm} = M_{p1} + M_{p2} = 3{,}13\ P. \tag{15}$$

Obliczając według (2) i (3) dla płaszcza stalowego przy $\nu = 0{,}29$,

$$M_{pm3} = 3{,}36\ P. \tag{16}$$

Korzystając z (4) dla $s = 0{,}03$ m,

$$M_{pm4} = 2{,}99. \tag{17}$$

Wartości maksymalnych momentów południkowych (15) obliczone metodą Ševčenki są około 7 % mniejsze od wartości momentów (16) obliczonych przy korzystaniu z równań Timoshenki. Natomiast wartości momentów (15) są około 5 % wyższe od momentów (17) obliczonych według wzoru (4) podanego przez autora. Wynik (17) jest najbardziej zbliżony do wyników otrzymanych drogą doświadczalną [2]. Na rys. 1 przedstawiono rozkłady momentów południkowych na okręgu płaszcza wyznaczone wyrażeniami: (3), (4), (5) i (14).

4. SIŁY POŁUDNIKOWE

Południkowe siły błonowe N_p dla gładkiej powłoki są zdeterminowane w pracach [3, 5].

Siły według Popowicza

$$M_{p(1/2)} = 0{,}42\ Z \sqrt{\frac{1}{gR}} \left[0{,}41 \sqrt{\frac{g}{R}}\, l \cos\varphi - \frac{\cos 3\varphi}{2{,}828} \Phi_{3(1/2)} + \frac{\cos 5\varphi}{4{,}89} \Phi_{5(1/2)} - \frac{\cos 7\varphi}{6{,}926} \Phi_{7(1/2)} + \cdots\cdots\cdots\right], \tag{18}$$

gdzie:

$$\Phi_{n(1/2)} = \frac{\mathrm{Sh}\, m_n l + \sin m_n l}{\mathrm{Ch}\, m_n l + \cos m_n l} \tag{19}$$

$$m_n = \frac{n}{2{,}63} \sqrt{\frac{(n^2 - 1)^2 g}{R}}$$

$$l = \frac{L}{R}$$

Dla przykładu podanego w punkcie 2, $m_m l$ i $\Phi_{n(1/2)}$ są podane w tablicy 1.

Tablica 1

n	3	5	7	9	11	13
$m_n l$	0,223	0,645	1,27	2,14	3,17	4,34
$\Phi_{n(1/2)}$	0,3659	0,6422	1,172	1,333	1,009	1,03

Wyrażenie zawarte w nawiasie klamrowym równania (18) składa się z iloczynów utworzonych z szeregów: funkcji położenia $\Phi_{n(1/2)}$ i trygonometrycznego. Uwaga ta nie dotyczy pierwszego wyrazu zawartego w nawiasie. Funkcja położenia jest szybko zbieżna do jedności i dla $n > 13$ może przyjąć jej wartość za stałą $\Phi_{n(1/2)} = c$ a 1,00.

Wyrazy szeregu trygonometrycznego:

$$-\frac{\cos 3\alpha}{2,828} + \frac{\cos 5\alpha}{4,89} - \frac{\cos 7\alpha}{6,926} \ldots\ldots \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{n^2 - 1}} \tag{20}$$

są niezależne od wymiarów geometrycznych płaszcza i tym samym wystarczy je obliczyć dla danego kąta α, a wówczas równanie (18) przyjmie postać:

$$N_{p(1/2)} = 0,42\, z\sqrt{\frac{1}{gR}}\left[0,41\sqrt{\frac{g}{R}}\, l \cos\alpha - \frac{\cos 3\alpha}{2,828}\Phi_{3(1/2)} + \right.$$

$$+ \frac{\cos 5\alpha}{4,89}\Phi_{5(1/2)} - \frac{\cos 7\alpha}{6,926}\Phi_{7(1/2)} + \frac{\cos 9\alpha}{8,99}\Phi_{9(1/2)} -$$

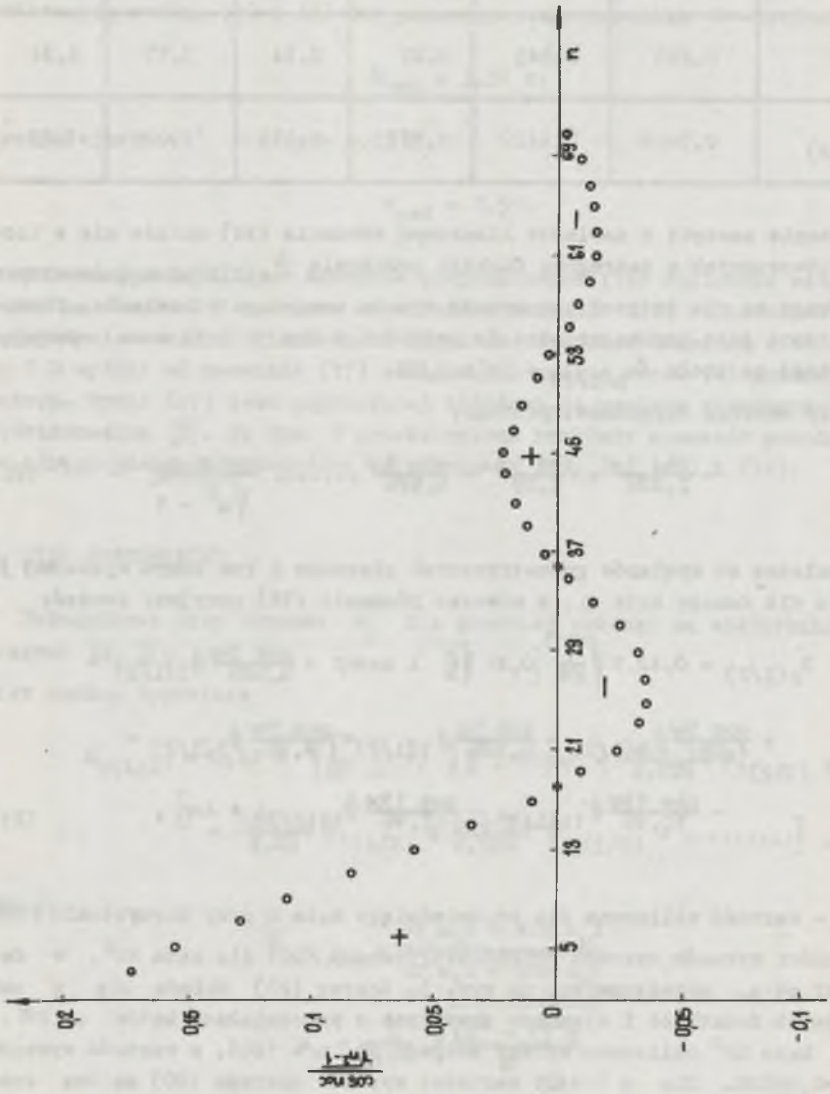
$$\left. - \frac{\cos 11\alpha}{10,95}\Phi_{11(1/2)} + \frac{\cos 13\alpha}{12,96}\Phi_{13(1/2)} + A\alpha\right], \tag{21}$$

gdzie:

$A\alpha$ - wartość obliczona dla odpowiedniego kąta α przy korzystaniu z (20).

Wartości wyrazów szeregu trygonometrycznego (20) dla kąta 80°, w zależności od n, przedstawiono na rys. 3. Szereg (20) składa się z sum cząstkowych dodatkich i ujemnych zawartych w przedziałach kątów n 2π.

Dla kąta 80° obliczono wyrazy szeregu do $n = 1401$, a wartość wyrazów $A\alpha = -0,09828$. Dla $n > 1401$ wartości wyrazów szeregu (20) są bez znaczenia praktycznego.



Rys. 3. Wartości wyrazów szeregu (20) dla kąta $\alpha = 80^{\circ}$

Przykładowo dla płaszcza o długości $L = 0{,}9$ m, promieniu $R = 1{,}5$ m i $g = 0{,}02$ m maksymalna siła

$$N_{pm} = 1{,}95\ P. \tag{22}$$

Siły południkowe według Ševčenki [4],

$$N_{p(\xi,\varphi)} = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2P}{\pi} \frac{n}{\delta} (K_1' \tilde{\Psi}_1 + K_2' \tilde{\Psi}_2) \cos n\varphi, \tag{23}$$

gdzie:

$$- \delta = \frac{n\sqrt{n^2 - 1}}{2};$$

$$K_1' = \frac{\Psi_1\Psi_3^* - \Psi_3\Psi_1^*}{\Psi_1\Psi_2 + 4\Psi_3\Psi_4};$$

$$K_2' = \frac{\Psi_2\Psi_1^* + 4\Psi_4\Psi_3^*}{\Psi_1\Psi_2 + 4\Psi_3\Psi_4};$$

$\Psi_1 - \Psi_4$ - funkcje Kryłowa dla $\delta\frac{L}{2R}$,

$\Psi_1^* - \Psi_3^*$ - " - - " - $\delta\frac{L}{6R}$,

$\tilde{\Psi}_1 - \tilde{\Psi}_2$ - " - - " - $\delta\frac{L}{3R}$.

Dla omawianego przykładu przy zastosowaniu równania (23), licząc n do 17 maksymalna siła południkowa

$$N_{pm} = -1{,}1\ P. \tag{24}$$

Wartości maksymalnych sił południkowych (22) obliczone metodą Popowicza są wyższe ponad 30 % i różnią się znakiem od sił (24) obliczonych metodą Ševčenki. Maksymalne siły południkowe otrzymane drogą doświadczalną są kilkakrotnie mniejsze i różnią się znakiem od sił obliczonych przy zastosowaniu równania (18) [2]. Stąd wniosek, że wyniki obliczone metodą Ševčenki są najbardziej zbliżone do wyników doświadczalnych.

5. WNIOSKI

1. Wartości maksymalnych momentów południkowych obliczone metodą Ševčenki są mniejsze o około 7% od momentów obliczonych z równań Timoshenki, natomiast są większe o 5% od momentów obliczonych przy zastosowaniu równania podanego przez autora.
   Wyniki obliczone przy korzystaniu z równania autora są najbardziej zbliżone do wyników otrzymanych w badaniach modelowych.

2. Wartości maksymalnych sił południkowych obliczone metodą Ševčenki są najbardziej zbliżone do sił otrzymanych drogą doświadczalną.

LITERATURA

[1] Dawydow B.L.: Rasčet i konstruowanie szachtnych pojemnoj mašin. Ugletechizdat, Moskwa 1949.

[2] Koszelski J.: Badania stanu naprężenia powłoki walcowej wieloliniowego koła pędnego maszyny wyciągowej. Praca doktorska, Główny Instytut Górnictwa, Katowice 1973.

[3] Popowicz O.: Maszyny wyciągowe, bębny i koła pędne. Politechnika Śląska, Gliwice 1964.

[4] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.: Teoria płyt i powłok. Arkady, Warszawa 1962.

[5] Ševčenko F.L.: Priblizennyj rasczet obolczki podemnoj masziny MK-3, 25x4. Razrabotka mestorozdenij poleznych iskroplernych, nr 29, 153. Izdatelstwo "Technika", Kijów 1972.

Wpłynęło do Redakcji 7.05.1982 r.

Recenzent: Doc. dr inż. Tadeusz Zmysłowski

МЕРИДИАННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ В КОЖУХЕ МУЛЬТИЛИНЕЙНОГО ПРИВОДНОГО ШКИВА

Р е з ю м е

В работе представлены известные методы определения меридианных изгибающих моментов и меридианных оболочных сил. Дан численный пример и сравнены разные результаты теоретических расчетов, а также сравнены теоретические и опытные расчеты. Сокращены уравнения расчета меридианных оболочных сил.

GENERALIZED MERIDIONAL FORCES IN THE JACKET OF MULTILINEAR KOEPE PULLEY

S u m m a r y

The paper presents well-known methods of calculating meridional bending moments and meridional membrane forcers. A mumerical example is given and various results of theoretical calculations are compared. Also theoretical results were compared with experimental ones. An equation for calculating meridional membrane forces is reduced.