ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marek BRODZKI
Janusz WALCZAK

OCENA PRĄDÓW ODKSZTAŁCONYCH ODBIORNIKÓW WIELOZACISKOWYCH WYKORZYSTUJĄCA POJĘCIE PRZESTRZENI SOBOLEWA

Streszczenie. W pracy zdefiniowano wskaźnik jakości prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych ustalający kompromis pomiędzy oceną strat mocy czynnej na doprowadzeniu do pojedynczego odbiornika i oceną odkształceń (zawartości wyższych harmonicznych) prądów odbiornika.

Wskaźnik ten zdefiniowano jako kwadrat normy pewnej specjalnie skonstruowanej przestrzeni Sobolewa.

Rozwiązano problem minimalizacji tego wskaźnika przy ograniczeniu równościowym dotyczącym doprowadzenia zadanej mocy czynnej do odbiornika.

Następnie przeprowadzono rozkład prądów odbiornika wielozaciskowego na cztery wzajemnie ortogonalne składniki, podając ich interpretację fizykalną.

Wprowadzono nowe definicje mocy wiążące się z uzyskanym rozkładem ortogonalnym prądów odbiornika.

1. Wstęp

Zagadnienie sygnalizowane w tytule niniejszej pracy było już częściowo podejmowane w pracach [3], [6]. Tam ocena ta polegała na znalezieniu prądu minimalizującego straty na symetrycznym doprowadzeniu mocy czynnej P do odbiornika wielozaciskowego tzn. - każdemu z przewodów doprowadzających tę moc przyporządkowana była rezystancja ΔR (z wyjątkiem przewodu zerowego o rezystancji zerowej) i straty te związane były z ww. rezystancjami. Oprócz wspomnianego minimalizującego prądu wyróżnione były jeszcze dwa lub trzy dalsze, dające w sumie całkowity prąd odbiornika. Prądy te są wobec tego niepożądane (oczywiście oprócz pierwszego przenoszącego moc czynną) i należy z kolei zastanowić się, czy i jakimi sposobami można je skompensować. Funkcje (macierzowe) tych prądów były elementami pewnej przestrzeni Hilberta $L_n^2(0;T)$. Były one parami ortogonalne i każda z nich posiadała określoną interpretację fizykalną. Minimalizowany funkcjonał, oceniający jakość prądu, miał jako swą dziedzinę zbiór tworzący przestrzeń $L_n^2(0;T)$.

Jednak oprócz strat zagadnieniem istotnym jest odkształcenie prądu pobieranego przez odbiornik, ponieważ w sieci, która nie może być traktowana jako napięciowo sztywna, prąd taki powoduje wzrost odkształceń napięć zasilających inne odbiorniki. Widać więc, że na razie w obrębie jednego od-

biornika należy znaleźć jakiś wskaźnik, który oceniałby jednocześnie zarówno odkształcenie prądu, jak i straty występujące na doprowadzeniu doń mocy czynnej. Obserwując naszkicowane tu rozwiązanie poprzedniego zagadnienia, dochodzimy do przekonania, że ze względu na pożądaną ortogonalność rozkładu funkcji prądów powinniśmy umiejscowić je również w pewnej przestrzeni Hilberta, na której z kolei będzie zdefiniowany minimalizowany funkcjonał (omawiany problem, dla odbiorników dwuzaciskowych, został przeanalizowany w pracach [4], [5]). Przestrzeń ta powinna być na tyle podobna do przestrzeni $L_n^2(0;T)$, by dało się ująć wspomniane zagadnienie strat oraz dysponować pewnymi współczynnikami pozwalającymi na uzyskanie kompromisu pomiędzy oceną strat i odkształceniami prądu. Ponieważ kolejne pochodne funkcji prądu uwypuklają wyższe harmoniczne, więc wydaje się, że proponowana ocena może być dokonywana za pomocą wzoru:

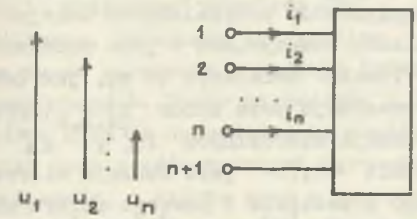
$$\sum_{r=0}^{l} \lambda_r \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{T} \int_0^T (f_\alpha^{(r)}(t))^2 dt , \tag{1}$$

gdzie wskaźnik α numeruje zaciski wejściowe odbiornika (rozpatrujemy $n \in N$ takich zacisków), wskaźnik $r \in N$ jest rzędem pochodnej funkcji $f_\alpha (f_\alpha^{(0)} = f_\alpha)$ oraz $\lambda_r \geq 0$, $\lambda_0 > 0$. Za wyborem takiego wzoru przemawia dodatkowo fakt, że funkcje (lub też ich pochodne) różniące się na zbiorze miary Lebesque'a zero nie są metrologicznie rozróżnialne. Oczywiście trzeba teraz sprecyzować, dla jakich funkcji f wzór (1) ma sens. Doprowadzi nas to do definicji pewnej przestrzeni Hilberta - mianowicie do przestrzeni Sobolewa, a właściwie do całej ich rodziny ze względu na dobór ciągów λ oraz liczb l, a wzór (1) będzie określać ich normy.

Nie będziemy teraz rozstrzygać zagadnienia, czy przestrzenie te z punktu widzenia wymienionych zamierzeń posiadają konkurentki. Wydaje się natomiast, że przedstawione argumenty wystarczającą motywują ich rozpatrywanie. Przystąpmy więc do formalizacji zagadnienia.

2. Konstrukcja pewnych przestrzeni Sobolewa

Załóżmy, że dany jest odbiornik przedstawiony na rys. 1. Ponieważ rozpatrujemy jeden stan napięciowo-prądowy odbiornika opisany parą funkcji macierzowych $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $i=(i_1,\ldots,i_n)$, więc jest rzeczą obojętną, czy gdyby dopuścić do rozważań inne jego stany byłby on liniowym czy też nie. Istotne jest, że funkcje u_α, i_α, $\alpha \in \{1,\ldots,n\}$ są okresowymi funkcjami zmiennej rzeczywistej (czasu) o wspólnym okresie T. Będziemy o nich zakładać, że są mierzalne w sensie Lebesgue'a o całkowalnym kwadracie na przedziale domkniętym $\langle 0;T \rangle$ oraz że są różniczkowalne



Rys. 1. Odbiornik (n + 1) zaciskowy
Fig. 1. The (n + 1) - terminal receiver

prawie wszędzie (prawie wszędzie w sensie miary Lebesgue'a) l-krotnie i wszystkie ich pochodne posiadają te same własności co różniczkowane funkcje. Jeśli we wzorze (1) któryś ze współczynników λ_r byłby równy zeru, to wówczas oczywiście o odpowiedniej funkcji $u_\alpha^{(r)}$, $i_\alpha^{(r)}$ nie trzeba czynić ww. założeń.

Ze względów wymienionych w pracy [3] należy operować klasami takich funkcji f_α, które są równe na przedziale $\langle 0;T\rangle$ prawie wszędzie oraz posiadają kolejne pochodne do l-go rzędu włącznie odpowiednio równe prawie wszędzie. (Wówczas, gdy jest nieistotne, czy chodzi o funkcję u_α, czy też i_α, będziemy używać symbolu f_α). Klasy takich funkcji oznaczamy $[f_\alpha]$. Aby uprościć zapis wzorów, których użyjemy, będziemy oznaczać klasę $[f_\alpha]$ tym samym symbolem f_α co odpowiednią funkcję. Jest oczywiste, że klasy te są niepuste i rozłączne, czyli tworzą podział zbioru funkcji o opisanych właściwościach, generujący odpowiednią relację równoważności w tym zbiorze.

Utwórzmy z takich klas ciągi $f=(f_1,\ldots,f_n)$. Zbiór wszystkich takich ciągów oznaczymy $W^l_{2,\lambda,n}(0;T)$. Będziemy używać tego oznaczenia zamiast dokładniejszego, lecz dłuższego $\underline{W}^l_{2,\alpha,n}(\langle 0;T\rangle)$.

Aby uczynić zeń przestrzeń Sobolewa (dokładniej: n-krotną przestrzeń Sobolewa o indeksach $l,2,\lambda$), trzeba zbiór ten zaopatrzyć w strukturę przestrzeni liniowej, a następnie w iloczyn skalarny.

<u>Uwaga 1</u>. Często w literaturze, definiując przestrzeń Sobolewa, używa się, w miejsce pochodnej klasycznej, pojęcia pochodnej dystrybucyjnej, dającej w wyniku różniczkowania dystrybucji regularnych, dystrybucje regularne. Ponieważ mamy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy omawianymi klasami funkcji $[f_\alpha]$ a dystrybucjami regularnymi oraz w tym przypadku, pomiędzy różniczkowaniem klasycznym i dystrybucyjnym [12], s. 39, 40, 43, 44), więc zrezygnowaliśmy w definicji przestrzeni Sobolewa z ujęcia dystrybucyjnego. □

Dodawanie elementów zbioru $\underline{W}^l_{2,\lambda,n}(0;T)$ oraz mnożenie ich przez liczby rzeczywiste określamy wzorami:

$$f + g = (f_1 + g_1,\ldots,f_n + g_n), \tag{2}$$

$$c \cdot f = (cf_1,\ldots,cf_n), \tag{3}$$

gdzie:

$$f,g \in \underline{W}^l_{2,\lambda,n}(0;T), \qquad c \in R .$$

Ściślej, dodawanie wspomnianych klas $[f_\alpha]$, $[g_\alpha]$ rozumiemy jako otrzymanie nowej klasy poprzez dodawanie dowolnych elementów przynależnych kolejno do jednej i drugiej, a mnożenie przez liczbę rzeczywistą - jako mnożenie dowolnego elementu danej klasy przez tę liczbę. Działania te są, jak łatwo zauważyć, poprawnie określone i nie wyprowadzają poza zbiór $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Wnioskujemy o tym, ponieważ suma dwu funkcji mierzalnych $f^{(r)}_\alpha$, $g^{(r)}_\alpha$ (określonych prawie wszędzie) na przedziale $\langle 0;T\rangle$ jest funkcją mierzalną określoną na różnicy mnogościowej tego przedziału i pewnego zbioru miary zero i ponieważ ze spełnienia nierówności $(f^{(r)}_\alpha(t) + g^{(r)}_\alpha(t))^2 \leqslant$ $\leqslant 2((f^{(r)}_\alpha(t))^2 + (g^{(r)}_\alpha(t))^2)$ wynika całkowalność kwadratu sumy dwu funkcji posiadających tę własność. Prześledzenie poprawności określenia działania jest prostym ćwiczeniem.

Mamy więc określoną przestrzeń liniową $(W^1_{2,\lambda,n}(0;T), R_c, +, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych R_c. Potrzebne tu wiadomości z teorii miary i całki Lebesgue'a Czytelnik może znaleźć np. w książkach [10], [11].

Podkreślamy, że argumenty i wartości funkcji prądów i napięć u, i pozbawiamy wymiarów fizykalnych i dlatego funkcje te możemy traktować jako elementy wspólnego zbioru powyższej przestrzeni liniowej. Motywacja takiego stanowiska podana jest w pracach [2], [3].

Zdefiniujmy teraz iloczyn skalarny w ten sposób, by indukował on normę określoną wzorem (1). Iloczyn ten ma być odwzorowaniem: $(|)_w : W^1_{2,\lambda,n}(0;T) \times$ $\times W^1_{2,\lambda,n}(0;T) \to R$. Jest on określony wzorem:

$$(f|g)_w = \sum_{r=0}^{1} \lambda_r \frac{1}{T} \int_0^T f^{(r)}_\alpha(t)\, g^{(r)}_\alpha(t)dt, \tag{4}$$

w którym zastosowano konwencję sumacyjną (w zakresie od 1 do n) odnośnie do wskaźnika α powtarzającego się w iloczynie i numerującego wejścia odbiornika. Odnośnie do tego rodzaju wskaźników α, β, γ przyjmujemy tę konwencję w dalszym ciągu artykułu. Łatwo sprawdzić, że cztery aksjomaty iloczynu skalarnego ([7], s. 62) są spełnione. W przypadku czwartego z nich istotny jest fakt operowania klasami funkcji $[f_\alpha]$ tworzącymi wspomniane ciągi oraz założenie: $\lambda_0 > 0$, $\lambda_r \geqslant 0$, $r \in \{1,\dots,1\}$. Oczywiście norma jest określona za pomocą tego iloczynu skalarnego:

$$\|f\|^2_w = (f|f)_w \tag{5}$$

wzorem (1).

Badanie zupełności omawianej przestrzeni sprowadzamy najpierw do badania zupełności przestrzeni $W^1_{2,\lambda}(0;T)$ (przypadek n=1, [13], s. 55). Z kolei badanie zupełności przestrzeni $W^1_{2,\lambda}(0;T)$ opiera się na wykorzystaniu pochodnej dystrybucyjnej dystrybucji regularnych (por. Uwaga 1) oraz wykorzystaniu faktu zupełności przestrzeni $L^2(0;T)$ ([1], s. 214, 215).

Czyli przestrzeń Sobolewa $((\underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T), R_c, +, \cdot), (|)_w)$ jest przestrzenią Hilberta. Oznaczamy ją symbolem $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jak wspomnieliśmy już, mamy tu do czynienia z rodziną przestrzeni ze względu na wybór liczb 1, n oraz ciągu λ. Wybór parametrów 1, λ służy do wspólnego ujęcia zagadnienia strat mocy na doprowadzeniu prądów do odbiornika oraz zagadnienia "skażenia" tych prądów wyższymi harmonicznymi (w ten sposób realizowany jest ów kompromis, o którym mowa w streszczeniu).

Dalsza analiza prądów odbiornika odbywać się będzie w oparciu o pewien szczególnie wygodny układ ortonormalny w przestrzeni $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jest on następujący:

$$\{(\Delta_0,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,\Delta_0),\dots, \tag{6}$$

$$(\Delta_h\sqrt{2}\cos h\omega(\cdot),0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,\Delta_h\sqrt{2}\cos\omega(\cdot)),$$

$$(\Delta_h\sqrt{2}\sin h\omega(\cdot),0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,\Delta_h\sqrt{2}\sin\omega(\cdot),\dots\}$$

gdzie:

$$\Delta_h=\sqrt{(\lambda_0+\lambda_1(h\omega)^2+\dots+\lambda_l(h\omega)^{2l})^{-1}}, \tag{7}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\quad h\in N_0=N\cup\{0\}.$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy ortonormalność układu (6), czyli:

$$(e_k|e_l)_w=\delta_{kl},\qquad k,l\in N_0, \tag{8}$$

przy czym zgodnie ze wzorem (8) numerujemy elementy tego układu (zbioru) kolejnymi liczbami podstawowymi.

Wykorzystując wzór (1) oraz powiązanie współczynników Fouriera funkcji i jej pochodnych, w prosty sposób sprowadzamy dowód zamkniętości układu (6) do dowodu zamkniętości zwykłego układu trygonometrycznego w przestrzeni $L^2(0;T)$ ([7], s. 78, 79).

Jak w każdej przestrzeni Hilberta mamy rozkład dowolnego jej elementu względem przeliczalnego układu ortonormalnego zamkniętego ([5], s. 75, 76):

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}(f|e_k)_w\cdot e_k,\quad f\in\underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T),\quad ((f|e_k)_w)\in l^2. \tag{9}$$

Dostrzegając podobieństwo układu (6) do zwykłego układu trygonometrycznego w przestrzeni $L_n^2(0;T)$ ([3]), możemy zamiast wzoru (9) napisać:

$$f_\alpha = F_{s\alpha o}\Delta_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} F_{s\alpha h}\Delta_h \exp(jh\omega(\cdot)), \tag{10}$$

gdzie:

$$F_{s\alpha h} = \nabla_h F_{\alpha h}, \quad F_{\alpha h} = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jh\omega t}dt$$

dla

$$h = 0, \quad F_{\alpha o} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad (|F_{s\alpha h}|) \in \underline{l}^2, \tag{11}$$

$$\nabla_h = \Delta_h^{-1}, \quad h \in N_o, \quad \alpha \in \{1,\dots,n\}. \tag{12}$$

Wyrażenia $F_{s\alpha h}$ nazywać będziemy współczynnikami Sobolewa.

Zamkniętość układu (6) oznacza w tej nowej notacji, użytej we wzorze (10), spełnienie wzoru:

$$\|f\|_w^2 = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{n}|F_{s\alpha h}|^2 = \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{n}\nabla_h^2|F_{\alpha h}|^2 \tag{13}$$

dla dowolnego elementu $f \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$.

W oparciu o ten fakt, metodą podobną do zastosowanej w pracy [9], s. 5, 6, wykazujemy, dla dowolnych elementów $f,g \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$, wzór:

$$(f|g)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty} F_{s\alpha h}\, G^*_{s\alpha h} = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 F_{\alpha h}\, G^*_{\alpha h}, \tag{14}$$

z którego będziemy często korzystać, albowiem z jego pomocą można orzekać o ortogonalności funkcji f i g w powyższej przestrzeni Sobolewa, używając ich sobolewowskiego lub zwykłego fourierowskiego widma.

3. Problem optymalizacyjny

Problem ten polega na znalezieniu funkcji prądu $i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ minimalizującej kwadrat funkcjonału normy ($\| \quad \|^2_w$) we wprowadzonej przestrzeni Sobolewa, przy ubocznym warunku orzekającym, że moc czynna dostarczona do odbiornika jest stała i równa P:

$$P = (u|i)_L , \tag{15}$$

gdzie symbol $(|)_L$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni $L^2_n(0;T)$ określający właśnie tę moc. □

Uwaga 2. Warto zaznaczyć, że milcząco godzimy się tu na pewne przybliżenie, charakterystyczne dla lokalnego potraktowania problemu optymalizacji (tzn. dotyczącego jednego odbiornika), polegające na założeniu sztywności napięcia na samym odbiorniku (zadanie funkcji $u \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ - rys. 1). □

Uwaga 3. Minimum omawianego funkcjonału odpowiada, pod względem strat występujących na doprowadzeniu mocy do odbiornika, stanowisku opisanemu w punkcie 1, gdy n przewodów doprowadzających do niego prądy posiada rezystancję ΔR a (n+1)-szy - zerową. Gdyby (n+1)-szy miał również rezystancję ΔR, to w sumach określających iloczyn skalarny i normę przestrzeni Sobolewa dodawanie powinno odbywać się w zakresie od 1 do n+1, a prądy spełniać równanie

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} i_\alpha = 0.$$

Równanie to wyznacza podprzestrzeń Hilberta naszej przestrzeni Sobolewa (jest ona liniowa i domknięta). Przyjmując takie stanowisko, należałoby zastąpić w całej pracy wprowadzoną przestrzeń Sobolewa tą jej podprzestrzenią.

Powstaje też pytanie: jak wyglądałoby zagadnienie optymalizacji w przypadku, gdy rezystancje poszczególnych przewodów nie byłyby równe? Widać, że we wzorach (1), (4) należałoby, w analogii do nieujemnych współczynników wagi λ_r, wprowadzić inne, dotyczące, dla ustalonej harmonicznej, kolejnych przewodów odbiornika. Mielibyśmy wówczas również do czynienia z iloczynem skalarnym i normą; lecz z innym układem ortonormalnym i nieco bardziej skomplikowanymi rachunkami występującymi w zagadnieniu optymalizacyjnym. Natomiast trudno przewidzieć, jak wyglądałoby wówczas zagadnienie ortogonalnego rozkładu funkcji prądu odbiornika, którym w przypadku symetrii rezystancyjnej zamierzamy się zająć. Sygnalizujemy powyższą możliwość asymetrii, lecz nie będziemy jej w niniejszej pracy rozpatrywać. □

Uwaga 4. Minimalizowany funkcjonał może być również funkcjonałem o wartości $(u_R|i)_w$, gdzie u_R jest macierzą funkcji napięć na przewodach o rezystancji ΔR. Można wówczas, utrzymując to samo oznaczenie ∇_h^2 - lecz zmieniając jego definicję, łatwo uwzględnić zjawisko naskórkowości dla tych przewodów, za pomocą takich samych rozumowań jak przeprowadzone w całej pracy. □

Ponieważ przyporządkowanie funkcjom $f \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ ich współczynników $(f|e_k)_w$ jest bijekcją pomiędzy zbiorami $\underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ i $\underline{l}^2$ (por.: [7], s. 74-76)), więc podany problem optymalizacyjny można wyrazić w przestrzeni l^2. Mianowicie, polega on na znalezieniu minimum funkcji $\underset{s}{f} : \underline{l}^2 \to R$:

$$\underset{s}{f}(\underset{s}{\tilde{A}}) = f(A,B) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^{n} |I_{\alpha h}|^2 = \tag{16}$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^{n} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2), \quad B_{\alpha 0} = 0 ,$$

$$f(A,B) = \|i\|_w^2 ,$$

gdzie:

$$J_{\alpha h} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h} , \quad A = (A_{\alpha h}), \quad B = (B_{\alpha h}),$$

$$\tilde{A} = (\tilde{A}_{\tilde{\gamma} h}), \quad \tilde{A}_{\tilde{\gamma} h} = \begin{cases} A_{\alpha h} & \text{dla } \tilde{\gamma} = \alpha , \\ B_{\alpha h} & \text{dla } \tilde{\gamma} = n + \beta , \end{cases} \tag{17}$$

$$\alpha, \beta \in \{1,\dots,n\}, \quad h \in N_0 ,$$

$$\underset{s}{A} = (\underset{s}{A}_{\alpha h}) = (\nabla_h A_{\alpha h}) \in \underline{l}^2 , \quad \underset{s}{B} = (\underset{s}{B}_{\alpha h}) = (\nabla_h B_{\alpha h}) \in \underline{l}^2 ,$$

(i analogicznie do $\tilde{A}$ określamy $\underset{s}{\tilde{A}}$), przy warunku:

$$\underset{s}{g}(\underset{s}{\tilde{A}}) = g(A,B) = P - \sum_{h=0}^{\infty} (C_{\alpha h} A_{\alpha h} + D_{\alpha h} B_{\alpha h}) = 0 , \tag{18}$$

$$g(A,B) = P - (u|i)_L ,$$

gdzie:

$$U_{\alpha h} = C_{\alpha h} - jD_{\alpha h}, \quad D_{\alpha o} = 0, \quad \underset{s}{C} = (\underset{s}{C}_{\alpha h}) = (\nabla_h C_{\alpha h}) \in \underline{l}^2 \tag{19}$$

$$\underset{s}{D} = (\underset{s}{D}_{\alpha h}) = (\nabla_h D_{\alpha h}) \in \underline{l}^2$$

i np. zapis $(A_{\alpha h})$ oznacza ciąg pojedynczy utworzony, powiedzmy, przez uporządkowanie, przy kolejno wzrastających wskaźnikach $h \in N_o$, wskaźników α rosnących od 1 do n. Uporządkowanie to jest obojętne, albowiem szeregi występujące we wzorach (16) i (18) są bezwzględnie zbieżne.

Warunek konieczny dla istnienia ekstremum związanego podaje następujące twierdzenie ([8], s. 199, 200), dostosowane tu do rozpatrywanych odwzorowań.

Niech funkcja $g : \underline{l}^2 \to R$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu $\underset{so}{\tilde{A}}$, punkt $\underset{so}{\tilde{A}}$ jest punktem regularnym zbioru $\underset{s}{\vec{g}}^{-1}(\{0\})$, funkcja $f : \underline{l}^2 \to R$ różniczkowalna w punkcie $\underset{so}{\tilde{A}}$. Jeśli funkcja $\underset{s}{f}$ posiada w punkcie $\underset{so}{\tilde{A}}$ ekstremum, to istnieje taka stała $\mu \in R$, że:

$$\underset{s}{f}'(\underset{so}{\tilde{A}}) + \mu \underset{s}{g}(\underset{so}{\tilde{A}}) = 0 , \tag{20}$$

gdzie symbol $'$ oznacza pochodną Frécheta ([8], s. 125, 126) - (zarówno przestrzeń l^2, jak i R posiadają strukturę banachowską).

Warunek wystarczający dla istnienia ekstremum związanego podaje z kolei twierdzenie ([8], s. 201).

Niech funkcje $\underset{s}{f}$ oraz $\underset{s}{g}$ będą w pewnym otoczeniu punktu $\underset{so}{A}$ dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, niech punkt ten będzie punktem regularnym zbioru $\underset{s}{\vec{g}}^{-1}(\{0\})$. Jeśli istnieje taka stała $\mu \in R$, że spełnione jest dla niej równanie (20), oraz taka stała $c \in R$, $c > 0$, że zachodzi:

$$(\underset{s}{f}''(\underset{so}{\tilde{A}}) + \mu \underset{s}{g}''(\underset{so}{\tilde{A}}))(\underset{s}{\tilde{B}}, \underset{s}{\tilde{B}}) \geqslant c\|\underset{s}{\tilde{B}}\|_{l^2} \tag{21}$$

dla $\underset{s}{\tilde{B}} \in \underset{s}{\vec{g}}^{-1}(\{0\})$,

to funkcja $\underset{s}{f}$ ma w punkcie $\underset{so}{\tilde{A}}$ minimum związane.

Trzeba teraz zastosować oba przytoczone twierdzenia do zdefiniowanych wzorami (16) i (18) funkcji $\underset{s}{f}$ i $\underset{s}{g}$.

Zajmijmy się najpierw warunkiem koniecznym. Funkcje $\underset{s}{f}, \underset{s}{g}$ są oczywiście różniczkowalne w sposób ciągły dowolną liczbę razy w każdym punkcie

swojej dziedziny. Zbiór $\vec{g}_s^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem tych sobolewowskich współczynników prądowych z przestrzeni l^2, które przy zadanych sobolewowskich współczynnikach napięcia z tej przestrzeni realizują moc czynną P dostarczaną odbiornikowi. Dowolny punkt dziedziny funkcji g_s jest punktem regularnym, jeśli tylko nie wszystkie współczynniki $C_{\alpha h}$, $D_{\alpha h}$ są równe zeru - czyli wykluczamy przypadek, gdy $\|u\|_L = 0$, lub w sposób równoważny $\|u\|_W = 0$. Założenie to oczywiście przyjmujemy, gdyż oznacza ono, że w ogóle jakieś (niezerowe) napięcie zasila odbiornik. Wypisujemy z kolei równanie (20), a właściwie jego odpowiednik, gdzie zastosowano powiązanie współczynników Sobolewa ze zwykłymi Fouriera (wzór (11)). Mamy więc:

$$2\nabla_h^2 A_{\alpha h} - \mu C_{\alpha h} = 0 , \tag{22}$$

$$2\nabla_h^2 B_{\alpha h} - \mu D_{\alpha h} = 0 , \tag{23}$$

gdzie:

$$A_h = \frac{\mu}{2\nabla_h^2} C_{\alpha h} , \tag{24}$$

$$B_{\alpha h} = \frac{\mu}{2\nabla_h^2} D_{\alpha h} . \tag{25}$$

(Widać, że ponieważ: $\lambda_b > 0$, więc: $\nabla_h > 0$ dla dowolnego $h \in N_o$).
Podstawiając prawe strony wzorów (24), (25) do wzoru (18), mamy:

$$\frac{\mu}{2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_h^2} \sum_{\alpha=1}^{n} (C_{\alpha h}^2 + D_{\alpha h}^2) = P , \tag{26}$$

skąd:

$$\mu = \frac{2P}{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_h^2} U_h^2} , \text{ gdzie } U_h^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} |U_{\alpha h}|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (C_{\alpha h}^2 + D_{\alpha h}^2). \tag{27}$$

Ze wzorów (17), (19), (24)-(26) otrzymujemy współczynniki $A_{o\alpha h}$, $B_{o\alpha h}$ podejrzane o realizację minimum związanego funkcji f_s i w ślad za tym współczynniki $I_{o\alpha h}$, które będziemy oznaczać teraz $_aI_{s\alpha h}$ (sens wyboru takiego oznaczenia niebawem okaże się jasny). Więc:

$$ {}_{a}I_{s\alpha h} = {}_{e}G_{h}\, U_{\alpha h} , \tag{28} $$

gdzie:

$$ {}_{e}G_{h} = \frac{P}{\nabla_{h}^{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_{k}^{2}} U_{k}^{2}} \tag{29} $$

oraz czasowa funkcja prądu określona tymi współczynnikami jest następująca:

$$ {}_{a}i_{s}^{\alpha} = {}_{e}G_{o}\, U_{\alpha o} + \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_{e}G_{h}\, U_{\alpha h} \exp(jh\omega(\cdot)) \tag{30} $$

i widać, że ${}_{a}i \in W^{1}_{2,\lambda,n}(0;T)$.

Analizując z kolei warunek wystarczający widzimy, że lewa strona nierówności (21) przyjmuje postać:

$$ 2 \sum_{h=1}^{\infty} \nabla_{h}^{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| I_{\alpha h} \right|^{2} , $$

prawa zaś jest podobna, tylko zamiast współczynnika 2 występuje c. Zatem wystarczy dobrać jakikolwiek współczynnik c spełniający nierówność $0 < c < 2$ i wówczas nierówność (21) będzie spełniona.

Wnioskujemy stąd, że funkcja prądu ${}_{a}i_{s}$ rzeczywiście minimalizuje funkcjonał $\| \ \|_{W}^{2}$ przy warunku ubocznym (15).

Otrzymany rezultat zilustrujemy pewnym przykładem. Mianowicie, porównanie prądu ${}_{a}i_{s}$, gdy wszystkie współczynniki λ_{r} spełniają nierówności $\lambda_{r} > 0$, z prądem ${}_{a}i$, dla ktprego mamy: $\lambda_{o} = 1$, $\lambda_{2} = \ldots = \lambda_{1} = 0$, jest pouczające.
(Mamy wówczas równość $W^{o}_{2,(\lambda_{o}),n}(0;T) = L^{2}_{n}(0;T)$). Prąd ${}_{a}i$ minimalizuje jedynie straty na doprowadzeniu mooy do odbiornika, prąd ${}_{a}i_{s}$ - jak już wspomniano - stanowi kompromis pomiędzy minimalizacją tych strat i skażenia go wyższymi harmonicznymi. Ze wzoru (29) widać, że dla prądu ${}_{a}i$ mamy stały (niezależny od h) współczynnik:

$$ {}_{e}G = \frac{P}{\|u\|_{L}^{2}} , \tag{31} $$

a dla omawianego prądu ${}_{a}i_{s}$ współczynniki ${}_{e}G_{h}$ maleją szybko wraz ze wzrostem numeru harmonicznej:

$$ {}_{e}G_{h+1} < {}_{e}G_{h} , \tag{32} $$

(tym samym amplitudy harmonicznych tego prądu ${}_{a}i_{s}$ maleją w porównaniu do odpowiednich amplitud harmonicznych napięcia u), lecz zachodzi nierówność:

$$ {}_{e}G \leqslant {}_{e}G_{o} . \tag{33} $$

Gdyby obliczyć moc czynną, jaką transportuje prąd ${}_{a}i_{s}$, to okaże się, że jest to całkowita moc czynna odbiornika - taka sama jak w przypadku prądu ${}_{a}i$. Pokazuje to prosty rachunek:

$$ (u|{}_{a}i_{s})_{L} = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha h}\, {}_{e}G_{h}^{*}\, U_{\alpha h} = P \sum_{h=0}^{\infty} \frac{U_{h}^{2}}{\nabla_{h}^{2} \sum_{k=0} \frac{1}{\nabla_{k}^{2}} U_{k}^{2}} = P. \tag{34} $$

Wyodrębniliśmy więc z całego prądu odbiornika i prąd ${}_{a}i_{s}$. Podobnie, jak w rozważaniach przeprowadzanych w przestrzeni $L_{n}^{2}(0;T)$, pojawia się teraz problem rozkładu prądu $i - {}_{a}i_{s}$ na dalsze składniki wraz z podaniem motywacji fizykalnej tego postępowania oraz problem zbadania wzajemnej prostopadłości tak otrzymanych składników, ważny ze względu na powiązanie każdego z nich z pojęciem pewnej mocy.

4. Rozkład prądu odbiornika

Prąd $i - {}_{a}i$ rozłożymy na następujące składniki:

$$ {}_{r}i_{s\alpha} = \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_{\alpha\beta h}\, U_{\beta h} \exp(jh\omega(.)), \tag{35} $$

$$ {}_{s}i_{s\alpha} = (G_{\alpha\beta o} - {}_{e}G_{o}\delta_{\alpha\beta})U_{\beta o} + \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_{\alpha\beta h} - {}_{e}G_{h}\delta_{\alpha\beta})U_{\beta h} \exp(jh\omega(.)), \tag{36} $$

(δ jest macierzą jednostkową), lub też rozkładając składniki s_s^i na dwa dalsze mamy:

$$as_s^i = (G_{\alpha\beta o} - G_o\delta_{\alpha\beta})U_{\beta o} + \sqrt{2}\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty}(G_{\alpha\beta h} - G_h\delta_{\alpha\beta})U_{\beta h}\exp(jh\omega(.)), \tag{37}$$

$$d_s^i{}_\alpha = (G_o - G_{eo})\delta_{\alpha\beta}U_{\beta o} + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty}(G_h - G_{eh})\delta_{\alpha\beta}U_{\beta h}\exp(jh\omega(.)). \tag{38}$$

Podstawą do sformułowania wzorów (35)-(38) jest wzór:

$$I_{\alpha h} = (G_{|\alpha|h} + jB_{|\alpha|h})U_{\alpha h}, \tag{39}$$

(przypominamy, że sumujemy tu podług wskaźnika $\beta \in \{1,\ldots n\}$). Wzór (39) jest charakterystyczny dla odbiornika liniowego. W przypadku gdy, jak to już stwierdziliśmy, mamy do czynienia z jednym napięciem u i prądem i odbiornika, można również, przy założeniu $U_{\alpha h} \neq 0$ dla $\alpha \in \{1,\ldots,n\}$, $h \in N_o$, przyjąć:

$$I_{\alpha h} = (G_{|\alpha|h} + jB_{|\alpha|h})U_{\alpha h}, \quad B_{\alpha o} = 0, \tag{40}$$

gdzie pionowe kreski, w które ujmujemy wskaźnik α, oznaczają zakaz sumowania podług niego. Wzór (40) staje się wówczas dla parametrów $G_{\alpha h}$, $B_{\alpha h}$ definicyjny. Gdyby dla pewnych wskaźników α, h był spełniony warunek $U_{\alpha h} = 0$, to wówczas funkcje prądów określone odpowiadającymi niezerowymi wyrażeniami $I_{\alpha h}$ należałoby przedstawić w postaci osobnego składnika dołączonego do wzorów (30), (35)-(38). Sytuacja taka może być spowodowana nieliniowością odbiornika.

Następnie mamy:

$$G_h = \frac{P_h}{U_h^2}. \tag{41}$$

$$P_h = \mathrm{Re}(U_{\alpha h}\, I_{\alpha h}^*). \tag{42}$$

<u>Uwaga 5</u>. Gdyby dla pewnego h zachodził przypadek $U_h = 0$, wówczas odpowiedni współczynnik (41) nie byłby zdefiniowany i nie występowałby we wzorach (37), (38). □

Jeśli założyć:

$$B_{\alpha\beta h} = B_{\beta\alpha h}, \quad \alpha,\beta \in \{1,\dots,n\}, \quad h \in N, \tag{43}$$

to wzór (42) możemy przedstawić:

$$P_h = \mathrm{Re}(G_{\alpha\beta h}\, U_{\alpha h}\, U^*_{\beta h}). \tag{44}$$

Łatwo zorientować się, że z założenia $u,i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ wynika wniosek:

$$a^i_s,\ r^i_s,\ as^i_s,\ d^i_s \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T).$$

Widać również, że zachodzą wzory:

$$i = a^i_s + r^i_s + s^i_s, \tag{45}$$

$$s^i_s = as^i_s + d^i_s. \tag{46}$$

Sens składnika a^i_s został omówiony. Potrzeba wyodrębnienia składnika r^i_s o takim samym kształcie, jak w przypadku analizy odbiornika dokonywanej w przestrzeni $L^2_n(0;T)$, opiera się na możliwości jego kompensacji, z dowolną dokładnością w sensie użytej normy, w klasie skończonych układów LC (ta intuicyjnie sformułowana hipoteza wymaga oczywiście dowodu). Natomiast zagadnienie kompensacji składników as^i_s, d^i_s (podobnie jak w przestrzeni $L^2_n(0;T)$ składników as^i, d^i) wymaga prześledzenia i stwierdzenia, w jakiej ewentualnie klasie elementów jest ona możliwa oraz jakie konsekwencje praktyczne to pociąga. Jest to jednak zagadnienie syntezy, którego nie będziemy tu poruszać. Składnik s^i_s pojawia się na skutek asymetrii fazowej i dyspersji częstotliwościowej konduktancji odbiornika. Można go rozłożyć na składnik as^i_s związany z asymetrią fazową tych konduktancji dla ustalonej harmonicznej i składnik d^i_s fazowo symetryczny, lecz związany z dyspersją częstotliwościową konduktancji.

Zajmiemy się teraz, w oparciu o wzór (14), wykazaniem ortogonalności dowolnej spośród par złożonych z różnych elementów zbioru $\{a^i_s,\ r^i_s,\ as^i_s, d^i_s\}$:

$$(a^i_s | r^i_s)_w = \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} -j\nabla^2_h\, G_{eh}\, U_{\alpha h}\, B_{\alpha\beta h}\, U^*_{\beta h}, \tag{47}$$

$$(a_s^i | as_s^i)_w = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \, {}_eG_h \, U_{\alpha h} \, (G_{\alpha\beta h} - G_h \delta_{\alpha\beta}) U_{\beta h}^*, \tag{48}$$

$$(a_s^i | d_s^i)_w = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \, {}_eG_h \, U_{\alpha h} \, (G_h - {}_eG_h) U_{\alpha h}^* , \tag{49}$$

$$(r_s^i | as_s^i)_w = \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} j\nabla_h^2 \, B_{\alpha\beta h} \, U_{\beta h} \, (G_{\alpha\gamma h} - G_h \delta_{\alpha\gamma}) U_{\gamma h}^* , \tag{50}$$

$$(r_s^i | d_s^i)_w = \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} j\nabla_h^2 \, B_{\alpha\beta h} \, U_{\beta h} \, (G_h - {}_eG_h) U_{\alpha h}^* , \tag{51}$$

$$(as_s^i | d_s^i)_w = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (G_{\alpha\beta h} - G_h \delta_{\alpha\beta}) U_{\beta h} (G_h - {}_eG_h) U_{\alpha h}^* . \tag{52}$$

W przekształceniach wzorów (47)-(52) wykorzystujemy definicję konduktancji ${}_eG_h$, pamiętając o uwadze 5. W przekształceniu wzoru (47) wykorzystujemy wzór (43) stwierdzając, że dowolnego $h \in N$ wyrażenie $B_{\alpha\beta h} \, U_{\alpha h} \, U_{\beta h}^*$ jest rzeczywiste i stąd:

$$(a_s^i | r_s^i)_w = 0 . \tag{53}$$

Wykorzystując wzory (43), (44), (41), (15), (29), przekształcamy prawą stronę wzoru (48) otrzymując:

$$(a_s^i | as_s^i)_w = \frac{P^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} - \frac{P^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} = 0 . \tag{54}$$

W przypadku wzoru (49), podobnie wykorzystujemy wzory (29), (41), (44), (15):

$$(a_s^i | d_s^i)_w = \frac{P^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} - \frac{P^2}{(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2)^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_h^2} U_h^2 = 0 \tag{55}$$

Jeśli dodatkowo, oprócz wzoru (43), założymy spełnienie warunku:

$$G_{\alpha\beta h}\, B_{\alpha\gamma h} = G_{\alpha\gamma h}\, B_{\alpha\beta h}\,, \quad \alpha,\beta \in \{1,\dots,n\}\,, \quad h \in N \tag{56}$$

to idea wykazania wzoru:

$$({}_{r}{}^{i}_{s} | {}_{as}{}^{i}_{s})_w = 0 \tag{57}$$

pozostaje taka sama jak w przypadku wzoru (53). To samo założenie (43) wystarcza do wykazania wzoru:

$$({}_{r}{}^{i}_{s} | {}_{d}{}^{i}_{s})_w = 0 \tag{58}$$

(znów w podobny sposób jak w przypadku wzoru (53)).

Wreszcie wykorzystując te same wzory (29), (41), (44), mamy:

$$({}_{as}{}^{i}_{s} | {}_{d}{}^{i}_{s})_w = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (G_h\, G_{\alpha\beta h}\, U^*_{\alpha h}\, U_{\beta h} -$$

$$- {}_{e}G_h\, G_{\alpha\beta h}\, U^*_{\alpha h}\, U_{\beta h} - G_h^2\, U_{\alpha h}\, U^*_{\alpha h} + {}_{e}G_h\, G_h\, U_{\alpha h}\, U^*_{\alpha h}) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\nabla_h^2 \frac{P_h^2}{U_h^2} - \frac{P\, P_h}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} - \nabla_h^2 \frac{P_h^2}{U_h^2} + \frac{P\, P_h}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2}\right) = 0 \tag{59}$$

W przypadku rozważania jednego stanu napięciowo-prądowego odbiornika i przyjęcia w miejsce wzoru (39) wzoru (40), warunki (43), (56) są automatycznie spełnione. Spełnione one są oczywiście również w przypadku n=1.

Czyli mamy:

$$a^i_s \perp_w r^i_s\,, \quad a^i_s \perp_w as^i_s\,, \quad a^i_s \perp_w d^i_s\,, \quad r^i_s \perp_w as^i_s\,, \quad r^i_s \perp_w d^i_s, \quad as^i_s \perp_w d^i_s \tag{60}$$

i stąd oczywiście w przypadku rezygnacji z rozkładu s^i_s na składniki as^i_s, d^i_s:

$$a^i_s \perp_w s^i_s\,, \quad r^i_s \perp_w s^i_s\,. \tag{61}$$

Do tej pory zajmowaliśmy się prądem i pewnego indywidualnego odbiornika Wyobraźmy sobie teraz, że mając zadaną pewną funkcję napięcia $u \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$, o którym zakładamy, że:

$$U_{\alpha h} \neq 0 , \quad \alpha \in \{1,\dots,n\} , \quad h \in N_0 \tag{62}$$

dysponujemy wszelkimi odbiornikami realizującymi dowolne funkcje prądu $i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. (Nazwa odbiornik jest tu cały czas umowna, gdyż niektóre z nich mogą wydawać moc czynną). Opisaną sytuację możemy osiągnąć dobierając ciągi parametrów $(G_{\alpha\beta h})$, $(B_{\alpha\beta h})$ (lub $(G_{\alpha h})$, $(B_{\alpha h})$ - sprawiające, że warunki (43), (56) nie krępują wówczas ich doboru) w ten sposób, by współczynniki $\tilde{A}_s$ dla tych funkcji prądu względem układu ortonormalnego (6) były dowolnymi elementami zbioru $\underline{l}^2$ (po to też potrzebne jest założenie (62)). Zauważmy, że wszystkie uzyskane w ten sposób funkcje prądów ${}_a i_s$ tworzą jednowymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jednowymiarowość ta wynika z faktu, iż wszystkie współczynniki G_{sh} różnią się, dla ustalonego numeru h, stałą P. Można dowieść, że jest to podprzestrzeń domknięta. Jest więc ona przestrzenią Hilberta. Oznaczamy ją symbolem H_a. Analogicznie dowodzimy, że funkcje prądów ${}_r i_s$ tworzą podprzestrzeń Hilberta H_r, prądów ${}_s i_s$-H_s, prądów ${}_{as} i_s$-H_{as}, prądów ${}_d i_s$-H_d (są one nieskończenie wymiarowe). Ponieważ ww. przestrzenie są parami ortogonalne (fakt ten dowodzimy bardzo podobnie jak wzory (53), (54), (55), (57), (58), (59), trzeba jednak pamiętać, że poszczególne składniki, będące elementami ortogonalnych podprzestrzeni, są teraz zdefiniowane przez różne ciągi parametrów, tzn.: $({}_1G_{\alpha\beta h})$, $({}_1B_{\alpha\beta h})$ lub $({}_2G_{\alpha\beta h})$, $({}_2B_{\alpha\beta h})$) oraz dowolna funkcja prądu $i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ jest przedstawialna za pomocą wzorów (45), (46) w sposób jednoznaczny (na mocy twierdzenia o rzucie ortogonalnym - por. pozycję [7], s. 69, 70), więc przestrzeń Hilberta $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ rozkładamy sumę prostą ([7], s. 15) odpowiednich podprzestrzeni parami ortogonalnych. Czyli:

$$W^1_{2,\lambda,n}(0;T) = H_a \oplus H_r \oplus H_s , \tag{63}$$

$$H_s = H_{as} \oplus H_d, \tag{64}$$

$$H_a \perp H_r, \quad H_a \perp H_{as}, \quad H_a \perp H_d, \quad H_r \perp H_{as}, \quad H_r \perp H_d, \quad H_{as} \perp H_d, \quad (H_a \perp H_s, \quad H_r \perp H_s). \tag{65}$$

Zajmowanie się nie indywidualnymi prądami, a całymi podprzestrzeniami Hilberta jest racjonalne choćby z tego względu, że przy zadanym napięciu u, podprzestrzeń H_r jest tą, która składa się z prądów kompensowalnych,

z dowolną dokładnością w sensie normy, skończonymi układami LC. Zauważmy, że gdyby nie założyć spełnienia warunku (62) (tzn. dla pewnego wskaźnika h_o zachodziłyby równości $U_{\alpha h_o} = 0$ dla dowolnych wskaźników α) - wzór (przy żadnym wyborze parametrów $(G_{\alpha\beta h})$, $(B_{\alpha\beta h})$) nie byłby spełniony i w przedstawionej sumie prostej mielibyśmy jeszcze jeden składnik (ortogonalny do pozostałych), dotyczący prądów nierealizowalnych w liniowych odbiornikach (w stanie ustalonym) przy tak zadanych napięciach.

5. Moce

Z chwilą wyprowadzenia wzorów (45), (46), (60), (61) zagadnienie zdefiniowania odpowiednich mocy staje się standardowe. Natychmiastową konsekwencją tych wzorów jest fakt:

$$\|i\|_w^2 = \|a_s^i\|_w^2 + \|r_s^i\|_w^2 + \|s_s^i\|_w^2 , \tag{66}$$

$$\|s_s^i\|_w^2 = \|as_s^i\|_w^2 + \|d_s^i\|_w^2 . \tag{67}$$

Mnożąc obie strony wzorów (66), (67) przez $\|u\|_w^2$ i wprowadzając definicje:

$$P_{sa} = \|u\|_w \|a_s^i\|_w , \tag{68}$$

$$Q_{sr} = \|u\|_w \|r_s^i\|_w , \tag{69}$$

$$Q_{ss} = \|u\|_w \|s_s^i\|_w , \tag{70}$$

$$Q_{sas} = \|u\|_w \|as_s^i\|_w , \tag{71}$$

$$Q_{sd} = \|u\|_w \|d_s^i\|_w , \tag{72}$$

$$S_{sm} = \|u\|_w \|i\|_w , \tag{73}$$

mamy:

$$S_{sm} = P_{sa}^2 + Q_{sr}^2 + Q_{ss}^2 , \tag{74}$$

$$Q_{ss}^2 = Q_{sas}^2 + Q_{sd}^2 . \tag{75}$$

Wprowadzone moce nazywamy kolejno aktywną, reaktancyjną, rozproszenia, asymetrii, despersji oraz pozorną w sensie Sobolewa. Interpretacja prądów przenosi się na interpretację mocy. Sens geometryczny wzorów (74), (75) jest jasny. W ślad za zdefiniowanymi mocami można podać definicje wielu współczynników mocy, czego nie będziemy tu czynić.

Interesujące jest zagadnienie zasad zachowania dla zdefiniowanych mocy. Przypuśćmy, że odbiorniki będziemy łączyć równolegle, rozumiejąc przez to łączenie ze sobą ich zacisków o numerach α od 1-go do m-go odbiornika. Wówczas na mocy I prawa Kirchhoffa mamy:

$$i = \underset{1}{i} + \dots + \underset{m}{i}, \quad \underset{1}{i}, \dots, \underset{m}{i}, \quad i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T). \tag{76}$$

Przypuśćmy, że m=2. Z aksjomatów dowolnej przestrzeni unitarnej wynika nierówność:

$$\|i\|_w < \|\underset{1}{i}\|_w + \|\underset{2}{i}\|_w . \tag{77}$$

Nierówność ta przechodzi w równość (przy założeniu $\underset{1}{i}$, $\underset{2}{i} \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy ([7], s. 64) : $\underset{2}{i} = c \in R$, $c > 0$. Sytuacja taka nie musi zachodzić dla żadnego z prądów a^i_s, r^i_s, s^i_s, as^i_s, d^i_s, i; za wyjątek można uznać prąd a^i_s, gdy: $P > 0$. Mnożąc obustronnie nierówność (77) przez $\|u\|_w$ ($\|u\|_w = 0$) widzimy, że zdefiniowane moce nie są zachowawcze.

Uwaga 6. Obserwując negatywny wynik, dotyczący zasady zachowania wprowadzonych mocy, można spytać, czy są jakieś definicje innych mocy oparte na używanej przestrzeni Sobolewa, sprawiające, że moce te zadość czynią zasadzie zachowania? Konstrukcja takich mocy opiera się na pojęciu sobolewowskiego iloczynu skalarnego i I prawie Kirchhoffa dla odbiorników połączonych równolegle (wobec lokalnego postawienia zagadnień optymalizacyjnego i mocy rozpatrujemy tylko takie połączenia). Wystarczy zauważyć, że jeśli określimy parametry prądów $\varkappa^i_s$ o charakterze admitancji jako sumy parametrów odpowiednich prądów częściowych $\varkappa^i_{sj}$, $\varkappa \in \{a,r,as,d\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$, to mamy:

$$\varkappa^i_s = \varkappa^i_{s1} + \dots + \varkappa^i_{sm}, \tag{78}$$

gdzie:

$$\underset{j}{i} = \sum_{\varkappa} \varkappa^i_{sj}, \quad i = \sum_{\varkappa} \varkappa^i_s . \tag{79}$$

Obie strony równań (45), (46), (78) mnożymy lewostronnie skalarnie przez u i otrzymujemy:

$$(u|\varkappa_s^i)_w = (u|\varkappa_{s1}^i)_w + \dots + (u|\varkappa_{sm}^i)_w , \tag{80}$$

$$(u|i)_w = (u|\underset{1}{i})_w + \dots + (u|\underset{m}{i})_w . \tag{81}$$

Niestety, te zachowawcze moce nie wiążą się z prostopadłościanem mocy (wzory (66), (67)) uzyskanym w oparciu o rozważany problem optymalizacyjny.

Dla pewnej orientacji w wielkościach tych mocy podajemy, przykładowo, dla prądów całkowitych, proste do wyprowadzenia wzory (w oparciu o wzory (13), (14), (29), (41), (30), (35), (37), (38), (72), (68)):

$$(u|\,{}_s i)_w = \frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} U_h^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}} \; P , \tag{82}$$

$$(u|r_s^i)_w = 0, \quad (u \perp_w r_s^i) , \tag{83}$$

$$(u|as_s^i)_w = 0, \quad (u \perp_w as_s^i) , \tag{84}$$

$$(u|d_s^i)_w = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \, P_n = \frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} U_h^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}} \tag{85}$$

$$(u|\,i)_w = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \, P_h , \tag{86}$$

$$P_{sa} = \sqrt{\frac{\sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 U_h^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}}}\,|P|, \tag{87}$$

$$Q_{sd} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^2 U_k^2}\sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{P_h^2}{\frac{U_h^2}{\nabla_h^2}} - \frac{P^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}}}\,. \tag{88}$$

Jak widać ze wzorów (83), (84), równość (80) dla $\varkappa = r$ lub $\varkappa = as$ stanowi równość $0 = 0$.

6. Podsumowanie

Przedstawiona praca pokazuje, że rzeczywiście norma w przestrzeni Sobolewa $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ określona wzorem (1) za pomocą iloczynu skalarnego (wzór (4)) spełnia rolę wskaźnika ustalającego kompromis pomiędzy oceną strat na doprowadzeniu mocy czynnej do odbiornika a zawartością wyższych harmonicznych w jego prądach. Minimalizacja kwadratu tej normy doprowadza do wyróżnienia funkcji prądu $_{as}i$, posiadającej w stosunku do widma funkcji napięcia u stłumione wyższe harmoniczne (wzór (32)). Podany jest rozkład całkowitej funkcji prądu i na cztery składowe. Oprócz składowej $_{as}i$ występuje składowa $_{rs}i$, związana z możliwością kompensacji układami LC, oraz składowa $_{as}i_s$, $_{ds}i$.

W oparciu o nie zdefiniowane są odpowiednie moce. W ślad za tym powinny pójść rozważania pozwalające stwierdzić, ile z pozostałego prądu $i - {}_{as}i$ i z pomocą jakich środków da się skompensować. Jest to, jak wspomnieliśmy, zagadnienie syntezy nie rozpatrywane tutaj.

Porównanie rozważań zamieszczonych w niniejszej pracy oraz w artykule [3], wskazuje na pewne wspólne cechy postępowania w procesie definiowania nowych mocy, związanych z pojedynczym odbiornikiem (a nie z całą siecią). Centralnym zagadnieniem jest wybór, dla danego typu przebiegów napięciowych i prądowych oraz układu o pewnej liczbie zacisków, odpowiedniej przestrzeni Hilberta. Odpowiedniej - to znaczy dysponującej normą, której kwadrat chcemy zminimalizować, wyróżniając w ten sposób pożądany prąd, zapewniający jednocześnie dostarczenie określonej mocy czynnej do odbior-

nika. Następnie wykorzystujemy iloczyn skalarny naszej przestrzeni Hilberta, rozkładając funkcję całkowitego prądu odbiornika na pewną liczbę parami prostopadłych składowych, pomiędzy którymi jest oczywiście funkcja prądu będąca rozwiązaniem powyższego problemu optymalizacyjnego. Składowe te powinny posiadać jasną motywację fizykalną, najlepiej związaną z możliwościami syntezy w takiej lub innej klasie elementów i mającej na celu kompensację niepożądanego prądu. Można też stosować, w sposób opisany w pracy, operację rozkładu ww. przestrzeni Hilberta na sumę prostą parami prostopadłych podprzestrzeni. Po dokonaniu tego definicja odpowiednich mocy jest już zwykłą formalnością. Natomiast otwartym zagadnieniem jest znalezienie tych przestrzeni Hilberta, które mogłyby nastąpić z punktu widzenia nakreślonych celów przestrzenie $L_n^2(0;T)$, $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jest rzeczą znamienną, że problem optymalizacyjny rozważany jest nie w ww. przestrzeniach, a w skojarzonej z nimi przestrzeni l^2 z użyciem wyróżnionych zamkniętych baz (układów ortonormalnych). Jest to w przestrzeni $L_n^2(0;T)$ zwykła baza trygonometryczna, a w przestrzeni $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ - baza bardzo podobna do niej. Uprzywilejowanie tych baz jest faktem psującym estetykę rozumowania oraz sugerującym pewne tylko metody kompensacji niepożądanych prądów w dziedzinie częstotliwościowej. Również otwartym zagadnieniem jest skonstruowanie właściwego wskaźnika jakości, jego optymalizacja oraz kompensacja pewnych prądów w sensie globalnym w całej sieci.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Brodzki M.: Kilka uwag o matematycznej naturze wielkości fizykalnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 100, Gliwice 1985.

[3] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne (w druku).

[4] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja rowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. XI SPETO. Wisła 1988.

[5] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Ortogonalny Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego, zasilanego napięciem odkształconym, w przestrzeni Sobolewa. XI SPETO. Wisła 1988.

[6] Czarnecki L.: Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny, nieliniowy odbiornik trójfazowy. Prace Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, X-SPETO, Wisła 1987.

[7] Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN, Warszawa 1970.

[8] Maurin K.: Analiza. Cz. I. PWN, Warszawa 1971.

[9] Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 15, Gliwice 1963.

[10] Sikorski R.: Funkcje rzeczywiste. T. I. PWN, Warszawa 1958.
[11] Sikorski R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1977.
[12] Szmydt Z.: Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe. PWN, Warszawa 1972.
[13] Yosida K.: Functional analysis. Springer-Verlag, Berlin 1965.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 30 maja 1988 r.

МЕТОД ОЦЕНКИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ МНОГОЗАЖИМНЫХ ПРИЕМНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Р е з ю м е

В работе определен показатель качества несинусоидальных токов многозажимных приемников, определяющий компромисс между оценкой потерь активной мощности при подведений к одному приемнику и оценкой деформации (наличие высших гармоник) токов приемника.

Этот показатель определен как квадрат нормы специально сконструированого пространства Соболева. Решена проблема минимализации этого показателя при ограничении равенства относящегося к подведению заданной активной мощности к приемнику.

Далее в работе произведено разложение токов многозажимного приемника на четыре взаимно ортогональные составляющие, представляя их физическую интерпретацию.

Введены новые определения мощности, связанные с полученными ортогональным разложением токов приемника.

THE METHOD OF EVALUATING DISTORTED CURRENTS OF MULTITERMINAL RECEIVERS APPLYING SOBOLEV'S NOTION OF SPACE

S u m m a r y

The quality coefficient of distorted currents of multiterminal receivers, determining a compromise between an assessment of the active power losses at the lead to a single receiver and evaluation of the distortions (the higher harmonics contents) of the receiver currents, has been defined.

The above coefficient has been determined as a square of the norm of a certain, specially constructed Sobolev's space.

The problem of minimization of this coefficient, with equality limitation referring to the application of the assigned active power has been solved.

A distribution of the currents of a multiterminal receiver into four reciprocally orthogonal components has been carried out, and their physical interpretation has been given.

New definitions of power associated with the obtained orthogonal distribution of the receiver currents have been introduced.