ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marian PASKO
Janusz WALCZAK

# METODA SYNTEZY UKŁADÓW KOMPENSACJI SKŁADOWEJ REAKTANCYJNEJ PRĄDU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO ZASILANEGO NAPIĘCIEM ODKSZTAŁCONYM

Streszczenie. W pracy opracowano metodę syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej ($_ri$) prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym. Wykazano, że spełnione są warunki konieczne i wystarczające realizowalności układu kompensacji w postaci dwójników LC.
Układ kompensacji, w ogólnym przypadku składa się z dwóch dwójników LC opisanych funkcjami reaktancyjnymi n-tego stopnia i kompensuje n-1 harmonicznych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika.

## 1. Wprowadzenie

Problematyka obejmująca zagadnienia energetyczne obwodów jedno i wielofazowych z przebiegami odkształconymi wiąże się ściśle z problemem minimalizacji wskaźników jakości tych przebiegów. Minimalizacja wskaźników jakości przebiegów odkształconych, definiowanych w postaci pewnych funkcjonałów w przestrzeniach Hilberta $L^2(0;T)$, $L^2_n(0;T)$, $W^1_{2,\alpha}(0;T)$, $W^1_{2,\alpha,n}(0;T)$, umożliwia [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] rozkład prądów odbiornika na wzajemnie ortogonalne składowe:

- aktywną odpowiedzialną za transport całkowitej mocy czynnej do odbiornika i minimalizującą wybrany wskaźnik jakości prądów odbiornika,
- rozproszenia, związaną z częstotliwościową fazową dyspersją konduktancji odbiornika wokół pewnych konduktancji zastępczych,
- reaktancyjną $_ri$, określoną wzorem (dla odbiornika dwuzaciskowego):

$$_ri = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} j\,B_h\,\underline{U}_h\,\exp jh\omega(\cdot), \tag{1}$$

gdzie:

$B_h$ - susceptancja odbiornika dwuzaciskowego dla kolejnej harmonicznej,

$\underline{U}_h$ - współczynniki szeregu Fouriera (w postaci symbolicznej) funkcji napięcia $u$ zasilającego odbiornik, określone wzorem:

$$\underline{U}_h = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u(t)\exp(-jh\omega t)dt, h\in\{1,2,\dots,\} \quad . \tag{2}$$

Postać składowej reaktancyjnej (1) prądu odbiornika w odróżnieniu od dwóch pozostałych składowych nie zależy od tego, czy przeprowadzimy minimalizację funkcjonału $(\| \quad \|_{L^2(0;T)})^2$ czy też funkcjonału $(\| \quad \|_{W^1_{2,\alpha}(0;T)})^2$ [4], [7], [8], w przypadku odbiorników dwuzaciskowych oraz minimalizację funkcjonałów $(\| \quad \|_{L^2_n(0;T)})^2$ $(\| \quad \|_{W^1_{2,\alpha,n}(0;T)})^2$ w przypadku odbiorników wielozaciskowych [2], [3], [9], przy tym samym ograniczeniu równościowym na zadaną moc czynną doprowadzaną do odbiornika.

Ze wzoru (1) wynika, że składową reaktancyjną prądu odbiornika dwuzaciskowego można kompensować dwójnikiem reaktancyjnym LC o skończonej liczbie elementów, gdyż w tym celu wystarczy (dla skończonej liczby harmonicznych) zaprojektować dwójnik, którego susceptancje będą równe co do wartości i przeciwne co do znaku w stosunku do susceptancji odbiornika $B_h$ dla pewnej zadanej liczby harmonicznych.

Kompensacja taka zachodzi z dowolną dokładnością w sensie normy przyjętej przestrzeni funkcyjnej, tzn.:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{n\in N} \; \bigwedge_{u\in L^2(0;T)} \left\| r^i - r^{i^n} \right\|_{L^2(0;T)} < \varepsilon \, , \tag{3}$$

lub

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{n\in N} \; \bigwedge_{u\in W^1_{2,\alpha}(0;T)} \left\| r^i - r^{i^n} \right\|_{W^1_{2,\alpha}(0;T)} < \varepsilon \, , \tag{4}$$

gdzie:

$$r^{i^n} = \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{n} j\, B_h\, \underline{U}_h\, \exp jh\omega(\cdot). \tag{5}$$

Kompensacja składowej reaktancyjnej prądu odbiornika zwiększa wartość współczynnika mocy źródła zasilającego [7] i zmniejsza straty mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika [3]. Z powyższych stwierdzeń wynika potrzeba i celowość opracowania metod syntezy układów kompensacyjnych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika, złożonych ze skończonej liczby elementów LC. Zagadnienie to, nierozwiązalne w sposób ogólny do chwili obecnej [7], [8], zostało podjęte w niniejszym artykule.

## 2. Formalizacja problemu syntezy i jego analiza

W teorii syntezy układów liniowych proces syntezy przeprowadza się [1], [10], [13] z reguły w dwóch, kolejno po sobie następujących etapach:

- etapie aproksymacji, polegającym na określeniu transmitancji (immitancji) dwójnika spełniającej warunki jego realizowalności fizycznej,
- etapie przyporządkowania danej transmitancji (immitancji) konkretnego modelu dwójnika,
- analiza uzyskanego modelu fizycznego pod względem wrażliwości i realizacji technicznej.

W pracy zagadnienie syntezy sprowadza się do rozwiązania pierwszego z wymienionych etapów, gdyż do chwili obecnej nie znaleziono [7] jego ogólnego rozwiązania.

Drugi etap syntezy jest dobrze znany w literaturze dotyczącej teorii syntezy, np. [1], [10], [13], i nie będzie w pracy rozpatrywany.

Sformalizujmy obecnie problem syntezy układu kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika (w sensie omówionym we wstępie pracy) w postaci ogólnej.

Problem syntezy I (PSI)

Wyznaczyć funkcję reaktancyjną o postaci:

$$B_r : R \longrightarrow R \,, \tag{6}$$

gdzie:

$$B_r(\omega) = \frac{A(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_3^2)\ldots\ldots(\omega^2-\omega_{2n-1}^2)}{\omega(\omega^2-\omega_2^2)(\omega^2-\omega_4^2)\ldots\ldots(\omega^2-\omega_{2n}^2)} = \frac{A\prod\limits_{i=1}^{n}(\omega^2-\omega_{2i-1}^2)}{\omega\prod\limits_{i=1}^{n}(\omega^2-\omega_{2i}^2)}, \tag{7}$$

$A \in R$, $n \in N$,

$$\omega_i = \begin{cases} \text{dla} \quad i = 2k-1, \; k \in N, \text{ zera funkcji reaktancyjnej}, \\ \text{dla} \quad i = 2k, \; k \in N, \text{ bieguny funkcji reaktancyjnej}, \end{cases}$$

której zera i bieguny posiadają własność określoną wzorem:

$$0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots\ldots < \omega_{2n-1} < \omega_{2n}, \tag{8}$$

przy założeniu, że dane są wartości tej funkcji:

$$B_r(\omega)\Big|_{\omega=\omega_h} = B_r(\omega_h') = -B_h , \tag{9}$$

gdzie:

$B_h$ - susceptancja odbiornika (por. wzór (1)),

$\omega_h = h\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$,

w skończonej liczbie punktów $\omega_h$, $h\epsilon\{1,2,\ldots m\}$.

Funkcja określona wzorem (7) spełnia warunek:

$$\lim_{\omega\to 0^+} B_r(\omega) = -\infty , \quad \lim_{\omega\to\infty} B_r(\omega) = 0 . \tag{10}$$

Przyjęcie funkcji określonej wzorem (7), która spełnia warunek (10), stanowi dodatkowe ograniczenie możliwych realizacji struktur dwójników LC. Wiąże się ono z koniecznością kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika (z dowolną dokładnością w sensie wprowadzonej normy por. wzory (3), (4)), gdyż wtedy:

$$\lim_{h\to\infty} |B_h||U_h| = 0 \quad \text{gdy} \quad \sup_{h\in N}\{|U_h|\} = C , \tag{11}$$

a zatem liczba wprowadzonych przez dwójnik kompensacyjny wyższych harmonicznych (do prądu odbiornika) maleje ze wzrostem indeksu h.

Przedstawiony problem syntezy (PSI) sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań algebraicznych nieliniowych o postaci:

$$B_r(h\omega)h\omega \prod_{i=1}^{n} ((h\omega)^2 - \omega_{2i}^2) = A \prod_{i=1}^{n} ((h\omega)^2 - \omega_{2i-1}^2), \tag{12}$$

gdzie:

$B_r(h\omega)$ - jest znane i spełnia zależność określoną wzorem (9)

względem niewiadomych $A, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{2n-1}, \omega_{2n}$, przy czym niewiadome $\omega_i$ ($i\epsilon\{1,2,\ldots,m\}$) winny spełniać warunek określony wzorem (8). Układ równań (12) można zapisać w sposób następujący:

$$A_h \prod_{i=1}^{n} (a_h - x_{2i}) = \prod_{i=1}^{n} (a_h - x_{2i-1}) , \tag{13}$$

gdzie:

$$h \in \{1,\ldots,2m\},$$

$$A_h = -\frac{B_h(h\omega)h\omega}{A}, \quad a_h = (h\omega)^2, \quad x_i = \omega_i^2 .$$

Rozwiązanie układu równań (13) względem zmiennych $x_i (i \in \{1,\ldots,m\})$ pozwala wyznaczyć zera i bieguny funkcji wymiernej o postaci określonej wzorem (7). Funkcja ta będzie funkcją reaktancyjną, gdy będzie spełniony warunek (8).

Rozwiązanie postawionego problemu (PSI) wymaga więc:

- wykazania istnienia rozwiązania silnie nieliniowego układu równań (13) wraz z konstrukcją efektywnej procedury rozwiązywania tego układu równań, zawierającej sposób doboru punktu startowego (przybliżenia początkowego),
- wykazania, że przy odpowiednio dobranym punkcie startu rozwiązania wymienionego układu równań spełniają warunek określony wzorem (8).

Po wykazaniu powyższego, syntezę konkretnego modelu dwójnika kompensacyjnego przeprowadza się znanymi metodami, np. Cauera, Fostera [1], [10] itp.

Ponieważ rozwiązanie postawionego problemu (PSI) jest rzeczą bardzo trudną [17], sprowadźmy omawiany problem syntezy do postaci umożliwiającej wykorzystanie teorii równań liniowych, następnie do jego rozwiązania. Pozwoli to ominąć trudności związane z analizą istnienia rozwiązań układu równań (13) oraz problemy związane z doborem odpowiedniego punktu startowego (przybliżenia początkowego rozwiązania), co ma duże znaczenie przy praktycznym rozwiązywaniu wymienionego układu równań.

Funkcję reaktancyjną określoną wzorem (7) i spełniającą warunek (8) można przedstawić w następującej postaci:

$$B_r(\omega) = \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)} = H\,\frac{a_{2n}\omega^{2n} - a_{2n-2}\omega^{2n-2} + a_{2n-4}\omega^{2n-4} - \ldots - a_2\omega^2 + a_o}{\omega(a_{2n+1}\omega^{2n} - a_{2n-1}\omega^{2n-2} + \ldots - a_3\omega^2 + a_1)}, \quad (14)$$

gdzie:

$$\omega, \quad a_k \in R^+, \quad k \in \{0,1,\ldots,2n+1\}, \quad n \in N, \quad H = -1,$$

co pozwala na sformułowanie problemu syntezy (PSI) w następujący sposób.

<u>Problem syntezy II (PS II)</u>

Wyznaczyć współczynniki wielomianów $L(\omega^2)$, $M(\omega^2)$ określonych wzorem (14) mając dane wartości funkcji (14) w m ($m \in N$) punktach.

Zera i bieguny tak uzyskanej funkcji wymiernej winny być tak dobrane, aby funkcja wymierna (14) była funkcją reaktancyjną.

Rozwiązanie problemu syntezy (PSII) sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych o postaci:

$$
\begin{bmatrix}
-B_1\omega_1^{2n+1}, & -H\omega_1^{2n}, & B_1\omega_1^{2n-1}, & H\omega_1^{2n-2}, & \dots, & -B_1\omega_1, & -H \\
-B_2\omega_2^{2n+1}, & -H\omega_2^{2n}, & B_2\omega_2^{2n-1}, & H\omega_2^{2n-2}, & \dots, & -B_2\omega_2, & -H \\
\vdots & & & & & & \\
-B_h\omega_h^{2n+1}, & -H\omega_h^{2n}, & B_h\omega_h^{2n-1}, & H\omega_h^{2n-2}, & \dots, & -B_h\omega_h, & -H \\
\vdots & & & & & & \\
-B_m\omega_m^{2n+1}, & -H\omega_m^{2n}, & B_m\omega_m^{2n-1}, & H\omega_m^{2n-2}, & \dots, & -B_m\omega_m, & -H
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{2n+1} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0
\end{bmatrix}
= 0 \qquad (15)
$$

gdzie:

$a_k > 0$; $B_h \in R$; $H = -1$;

$B_h$ – susceptancja odbiornika dla kolejnej harmonicznej ($h \in \{1,2,\dots,m\}$ por. wzór (1)),

oraz do wykazania, że uzyskana funkcja wymierna (14) jest funkcją reaktancyjną.

Przyjmijmy, że prąd reaktancyjny odbiornika $r^i(1)$ posiada pełne widmo harmonicznych, więc:

$$
\omega_h = h\omega, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}; \qquad h \in \{1,2,\dots,m\}. \qquad (16)
$$

Uwzględniając wzór (16) we wzorze (15), możemy ten wzór zapisać w postaci macierzowej:

$$
\mathbf{AX} = \mathbf{0}\,. \qquad (17)
$$

gdzie:

$$
\mathbf{X} = \left[a_{2n+1}\omega^{2n+1},\ a_{2n}\omega^{2n},\ \dots\ a_1\omega,\ a_0\right]^t, \qquad (18)
$$

$\dim \mathbf{X} = 2n+2$,

$$
A = \begin{bmatrix}
-B_1 & 1, & B_1 & -1 & ,\dots, & -B_1 & , 1 \\
-B_2 2^{2n+1}, & 2^{2n}, & B_2 2^{2n-1}, & -2^{2n-2} & ,\dots, & -B_2 2 & , 1 \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
-B_h h^{2n+1}, & h^{2n}, & B_h h^{2n-1}, & -h^{2n-2} & ,\dots, & -B_h h, & 1 \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
-B_m m^{2n-1}, & m^{2n}, & -B_m m^{2n-1}, & -m^{2n-2} & ,\dots, & -B_m m & , 1
\end{bmatrix} \tag{19}
$$

Można wykazać, że rząd każdej podmacierzy (o wymiarze $(2n+2,\ 2n+2)$) macierzy **A** określonej wzorem (19) jest równy $2n+2$.
Zatem każdy układ równań liniowych przyporządkowany tym podmacierzom posiada wyłącznie rozwiązania zerowe [15].
Z wymienionego powodu interesujący jest przypadek:

$$
m < 2n+2 , \tag{20}
$$

sprowadzający się do założenia pewnej liczby zer i biegunów funkcji (14). Chcąc wykorzystać do syntezy teorię równań liniowych, konieczne jest założenie znajomości wszystkich zer (lub wszystkich biegunów funkcji (14)). Wygodniej jest przyjąć jako znane bieguny funkcji (14), zakładając tym samym, że odpowiedni wielomian mianownika $M(\omega^2)$ jest wielomianem stabilnym (Hurwitza [18]).

Z przedstawionych rozważań wynika, że problem syntezy (PSII) można sprowadzić do następującego problemu PSIII.

<u>Problem syntezy III (PSIII)</u>

Niech

$$
\bigwedge_{h \in \{1,\dots,n+1\}} B_h > 0; \quad n = 2l+1; \quad l,n \in N, \tag{21}
$$

gdzie:

$B_h$ - susceptancja odbiornika (por. wzór (1)).

Należy wyznaczyć współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ (wzór (14)) mając dane n (n - liczbe biegunów) biegunów $\omega_{bh}$ funkcji $M(\omega^2)$ dobranych zgodnie ze wzorem:

$$\bigwedge_{h\in\{1,\dots n\}} \omega_{bh-1} < \omega_h < \omega_{bh} \tag{22}$$

oraz mając dane n+1 wartości funkcji reaktancyjnej (14) dla częstotliwości $\omega_h$ równej:

$$\bigwedge_{h\in\{1,\dots,n+1\}} B_r(\omega_h) = -B_h\,, \quad \omega_h = h\omega. \tag{23}$$

Dobór biegunów przeprowadza się zgodnie ze wzorem (22), mając jednak na uwadze techniczne warunki realizowalności dwójnika reaktancyjnego (np. konieczność stosowania cewek o niezbyt dużych dobrociach).
Zera wielomianów $L(\omega^2)$, $M(\omega^2)$ winny spełniać warunek przeplatania (8) [10], [16].

Rozwiązanie problemu syntezy (PSIII) wiąże się z zagadnieniem istnienia pewnych rozwiązań następującego układu równań liniowych:

$$\mathbf{V}\mathbf{X}' = \mathbf{b} \tag{24}$$

gdzie:

$$\mathbf{X}' = \left[x_1, x_2 \dots x_{n+1}\right]^t = \left[a_{2n}\omega^{2n}, -a_{2n-2}\omega^{2n-2}, a_{2n-4}\omega^{2n-4}, \dots, -a_2\omega^2, a_o\right]^t \tag{25}$$

$$\dim \mathbf{X}' = n+1; \quad a_k > 0 \quad \text{dla} \quad k\in\{0,\dots,2n\},$$

$$\mathbf{b} = \left[b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n+1}\right]^t = \left[B_1\, M(\omega^2), B_2 2\omega(M(2\omega)^2), \dots, \dots, B_{n+1}(n+1)\omega(M(n+1)\omega)^2)\right]^t. \tag{26}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^{2n} & 2^{2n-2} & 2^{2n-4} & 1 \\ h^{2n} & h^{2n-2} & h^{2n-4} & 1 \\ (n+1)^{2n} & (n+1)^{2n-2} & (n+1)^{2n-4} & 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Macierz V jest macierzą Vandermonde'a [15] rzędu n+1, zatem:

$$\det \mathbf{V} \neq 0 . \tag{28}$$

Układ równań (24) jest układem Cramera [15] i posiada zawsze rozwiązanie niezerowe. Twierdzenie Cramera [15] nie pozwala na określenie warunków istnienia rozwiązań układu równań (24) o postaci określonej wzorem (25) (tzn. o znakach zmieniających się na przemian).

Zauważmy, że spełnienie warunków określonych wzorami (21), (22), (23) implikuje zależności:

$$\left.\begin{array}{l} M(\omega^2) > 0 \\ M(2\omega)^2) < 0 \\ M((3\omega)^2) > 0 \\ \vdots \\ M((n+1)\omega)^2) < 0 . \end{array}\right\} \tag{29}$$

Zatem:

$$\left.\begin{array}{l} B_1\ M(\omega^2) > 0 \\ B_2\ M((2\omega)^2) < 0 \\ \vdots \\ B_{n+1}M((n+1)\omega)^2) < 0 . \end{array}\right\} \tag{30}$$

Składowe wektora $\mathbf{b}$ posiadają taką samą strukturę jak składowe wektora $\mathbf{X}'$ (rozumianą jako zgodność znaków współrzędnych wektorów $\mathbf{b}$, $\mathbf{X}'$ o tym samym wskaźniku oraz tę samą liczbę zmiany znaków); tak więc mamy:

$$\mathbf{b} = \Big[\left|B_1\ M(\omega^2)\right|,\ -\left|B_2 2\omega M((2\omega)^2)\right|,\ \left|B_3 3\omega M((3\omega)^2)\right|,\ \ldots$$

$$\ldots - \left|B_n n\omega M((n\omega)^2)\right|,\ \left|B_{n+1}(n+1)\omega M((n+1)\omega)^2\right|\Big]^t . \tag{31}$$

Wykażemy, że operacja liniowa określona wzorem:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{X}',$$

gdzie: $\mathbf{X}'$, $\mathbf{b}$ określają wzory (25), (26), odwzorowuje stożek [11], [12] $T(n-1),\ R^{n+1}$) zdefiniowany następująco:

$$T(n-1,\ R^{n+1}) = \left\{\mathbf{b} = \left[b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\right]^t : b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_{n+1} > 0\right\}, \tag{33}$$

gdzie:

$$|b_k| \in R^+, \qquad k \in \{1,\ldots,n+1\},$$

na siebie.

Macierz Vendermonde'a o wymiarze n+1 jest regularna co do znaku [14], tzn. wszystkie minory tej macierzy do rzędu n+1 włącznie posiadają ten sam znak, stąd na podstawie pewnego twierdzenia [11], [12] dotyczącego operatorów dodatnich można stwierdzić, że operacja liniowa określona wzorem (24) odwzorowuje stożek, $T(k,R^{n+1})$ na stożek $VT(k,R^{n+1})$

$$\bigwedge_{k\in\{1,2\ldots n-1\}} V: T(k,R^{n+1}) \longrightarrow VT(k,R^{n+1}) \subset T(k,R^{n+1}). \tag{34}$$

Ponieważ operator V (por. wzór (28) jest bijekcją, stąd:

$$\bigwedge_{k\in\{1,\ldots,n-1\}} T(k,\ R^{n+1}) = VT(k,R^{n+1}), \tag{35}$$

a zatem operatory V i $V^{-1}$ nie zmieniają stożka.

Rozwiązania układu równań (24), tzn. współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$, spełniają warunek konieczny realizowalności funkcji reaktancyjnej (dwójnika kompensacyjnego).

Drogą analogicznych rozważań można wykazać, że spełniony jest warunek konieczny rozwiązalności następującego problemu syntezy PSIV.

Problem syntezy IV (PSIV)

Niech:

$$\bigwedge_{h\in\{1,\ldots,n+1\}} B_h < 0 \tag{36}$$

gdzie:

$B_h$ - susceptancja odbiornika (por. wzór (1)).

Należy wyznaczyć współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ (14), mając dane n-biegunów $\omega_{b_h}$ funkcji $M(\omega^2)$ dobranych zgodnie ze wzorem (22) oraz dane n+1 wartości funkcji reaktancyjnej (14) określonych wzorem (23).

Zera wielomianów $L(\omega^2)$ winny spełniać warunek przeplatania (8). ■

Obecnie wykażemy, że zaproponowane procedury syntezy dwójnika kompensacyjnego spełniają warunek wystarczający realizowalności funkcji reaktancyjnej. W rozważaniach przyjęliśmy postać funkcji reaktancyjnej:

$$B_r(\omega) = -\frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)},$$

gdzie:

$$st(L(\omega^2) = st(M(\omega^2)).$$

Zatem

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)} = c, \quad c > 0 \tag{37}$$

i

$$\lim_{\omega\to 0^+} B_r(\omega) = -\infty . \tag{38}$$

Jeśli

$$\lim_{\omega\to 0^+} B_r(\omega) = -\infty \quad i \quad \frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} \neq 0, \tag{39}$$

to tym samym funkcja $B_r(\omega)$ jest ściśle rosnąca.
Tak więc wystarczy wykazać, że dla przyjętej przez nas funkcji (1) zachodzi:

$$\frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} \neq 0, \quad \bigwedge_{\omega \neq \omega_{bh}} . \tag{40}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} = \frac{L'(\omega^2)\omega M(\omega^2) - L(\omega^2)\ M(\omega^2) + M'(\omega^2)}{\omega^2\left[M(\omega^2)\right]^2} . \tag{41}$$

Mianownik wyrażenia (41) jest ściśle dodatnio określony z wyjątkiem przypadku $\omega = 0$, $M(\omega^2) = 0$ (znanych biegunów).

Zatem

$\frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$L'(\omega^2)\omega M(\omega^2) - L(\omega^2)\left[M(\omega^2) + \omega M'(\omega^2)\right] = 0 . \tag{42}$$

Przekształćmy równanie (42) w następujący sposób:

$$L(\omega^2)\,\zeta(\omega^2) - L'(\omega^2)\omega = 0 , \tag{43}$$

gdzie:

$$\zeta(\omega^2) = 1 + \omega\frac{M'(\omega^2)}{M(\omega^2)} . \tag{44}$$

Równanie (43) jest słuszne w każdym punkcie osi rzeczywistej ($\omega$), z wyjątkiem punktów, dla których $M(\omega^2) = 0$.
Na współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ narzucone jest $n+1$ więzów; jest to układ równań, z którego wyznaczamy te współczynniki (por. równanie (24)).

Przyjmijmy, że istnieje punkt na osi $\omega$, w którym spełnione jest równanie (42). Współrzędne tego punktu oznaczmy przez $\omega_x$. Wtedy na współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ oprócz $n+1$ warunków określonych równaniem (24) byłby narzucony dodatkowy warunek:

$$\omega_x^{2n}(\zeta(\omega_x^2)-2n)a_{2n} - \omega_x^{2n-2}(\zeta(\omega_x^2) - (2n-2))a_{2n-2} + \dots$$

$$\dots - \omega_x^2(\zeta(\omega_x^2) - 2)a_2 + a_0\,\zeta(\omega_x^2) = 0 . \tag{45}$$

Wykażemy, że równanie (45) oraz dowolne z równań (24), są liniowo niezależne.
Aby równania (24) i (45) były liniowo zależne, musiałby być spełniony ciąg warunków:

$$\begin{aligned} C\omega_x^{2n} + \omega_x^{2n}(\zeta(\omega_x^2) - 2n) &= 0 \\ C\omega_x^{2n-2} + \omega_x^{2n-2}(\zeta(\omega_x^2) - (2n-2)) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ C\omega_x^2 + \omega_x^2(\zeta(\omega_x^2) - 2) &= 0 \\ C + \zeta(\omega_x^2) &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

oraz warunek dotyczący prawych stron równań (24), (45):

$$C\omega_x\, B_r(\omega_x)M(\omega_x^2) = 0 . \tag{47}$$

Z założenia, że $M(\omega_x^2) \neq 0$ wynika $C = 0$ , (48)

a stąd

$$\zeta(\omega_x^2) = 0 , \tag{49}$$

co prowadziłoby do warunków:

$$\begin{aligned} &\omega_x^2\ 2 = 0\ , \\ &\omega_x^2\ 4 = 0\ , \\ &\vdots \\ &\omega_x^{2n}\ 2n = 0\ . \end{aligned} \tag{50}$$

Wzory (50) dla $\omega_x \neq 0$ nigdy nie będą spełnione, a więc zachodzi wzór (40), który łącznie ze wzorem (38) pozwala stwierdzić, że:

$$\frac{\partial B_x(\omega)}{\partial \omega} > 0 \qquad \bigwedge_{\omega \neq \omega_b^h} .$$

Tak więc wykazano warunek wystarczający realizowalności problemów syntezy (PSIII), (PSIV).

Wykorzystajmy obecnie wykazane zagadnienia syntezy do syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika.

Składową reaktancyjną prądu odbiornika przedstawiamy w postaci wzoru:

$$_r i = \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{k} j\, B_h\, \underline{U}_h \exp jh\omega(\cdot) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{k} jA_h \underline{U}_h \exp jh\omega(\cdot) +$$

$$+ \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{k} jC_h U_h \exp jh\omega(\cdot) = {}_r i_1 + {}_r i_2\ , \tag{51}$$

gdzie:

$$A_h = \begin{cases} B_h + \Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h > 0 \\ \Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h \leqslant 0 \end{cases} \tag{52}$$

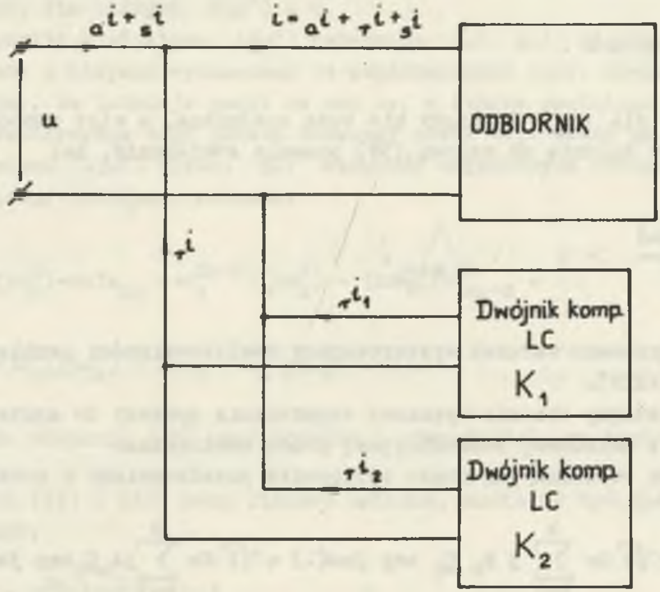
$$C_h = \begin{cases} -\Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h \geqslant 0 \\ -B_h - \Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h < 0 \end{cases} \tag{53}$$

$$\Delta_h > 0, \quad h \in \{1, \dots, n+1\}\ .$$

Na dobór stałych $\Delta_h$ nie narzucamy żadnych warunków.

Rozwiązując problem (PSIII), określamy strukturę dwójnika kompensującego prąd $_ri_1$, natomiast rozwiązując problem (PSIV), określamy strukturę dwójnika kompensującego prąd $_ri_2$.
Bieguny dwójników kompensujących składowe $_ri_1$ i $_ri_2$ są takie same.

Strukturę układu kompensacji prądu odbiornika opracowanego na podstawie powyższych rozważań przedstawiono na rys. 1.




Rys. 1
Fig. 1

Układ kompensacji $K_1$ kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika, przyporządkowane dodatnim susceptancjom odbiornika, dla odpowiednich harmonicznych, natomiast układ kompensacji $K_2$ kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika przyporządkowane ujemnym susceptancjom odbiornika.

3. <u>Podsumowanie</u>

1. W artykule sformalizowano problemy syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym:
(PSI) - sprowadzający się do rozwiązania układu równań nieliniowych (12),
(PSII), (PSIII), (PSIV) - sprowadzające się do rozwiązania układów równań liniowych.

2. Rozwiązaniom problemów (PSIII), (PSIV) można zawsze przyporządkować funkcje reaktancyjne, realizowalne w postaci dwójników LC.

3. Zaproponowano strukturę układu kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego złożoną z dwóch połączonych równolegle dwójników kompensacyjnych LC opisanych funkcjami reaktancyjnymi. Jeden z tych dwójników kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika, którym przyporządkowane są dodatnie susceptancje $B_h$ odbiornika, natomiast drugi kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej, którym przyporządkowane są ujemne susceptancje $B_h$. Zaproponowany układ kompensacji umożliwia wyeliminowanie skończonej liczby harmonicznych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika.

4. Układ kompensacji umożliwia kompensację skończonego widma składowej reaktancyjnej prądu odbiornika w przypadku, gdy widmo to zawiera wszystkie harmoniczne prądu oraz w przypadku, gdy niektóre harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika nie występują.

Zaproponowany sposób syntezy dwójników kompensacyjnych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika umożliwia konstrukcję prostego algorytmu numerycznego (sprowadzającego się w zasadzie do rozwiązania układu równań liniowych i poszukiwanie zer rzeczywistych wielomianów), który w skończonej liczbie kroków (brak procedur iteracyjnych) pozwala na określenie struktury dwójników.

Proponowane metody syntezy są ogólne w tym sensie, że umożliwiają one wyznaczenie admitancji dwójników kompensujących dowolnie wysokiego rzędu. W szczególnych przypadkach można dla niewielkiej liczby harmonicznych drogą prób i błędów określić admitancję jednego dwójnika kompensacyjnego (zamiast dwóch).

LITERATURA

[1] Balabanian N.: Network Synthesis. Prentice-Hall, Inc. Engl. Cliffs 1958.

[2] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych. Rozprawy Elektrotechniczne z 1. 1989.

[3] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M.: Jednolita teoria mocy dla układów trójfazowych o przebiegach w oparciu o ortogonalny rozkład prądu w przestrzeni $L_3^2(0;T)$ Materiały X - SPETO, Wisła 1987.

[4] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika, jakość energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. Materiały XI - SPETO, Wisła 1988.

[5] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Ortogonalny rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego, zasilanego napięciem odkształconym, w przestrzeni Sobolewa. Materiały XI - SPETO, Wisła 1988.

[6] Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystujących pojęcie przestrzeni Sobolewa. Materiały XI - SPETO, Wisła 1988.

[7] Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Praca habilitacyjna ZN Elektryka, Pol. Sl. Z. 91, Gliwice 1984.

[8] Czarnecki L.: Power Theories of Periodic Nonsinusoidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne, nr 31. Z. 3-4. 1985.

[9] Czarnecki L.: Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny nieliniowy odbiornik trójfazowy. Materiały X - SPETO, Wisła 1987.

[10] Guillemin E.A.: Synthesis of Passive Networks New York 1957.

[11] Karlin S.: Total positivity. Vol 1. Stanford, Calif. Univ. Press. 1968.

[12] Karlin S.: Positive operators. J. Math. Mech. 1959, 8n 6.

[13] Karni Sz.: Network Theory, Analysis ans Synthesis. Boston. Mass. 1966.

[14] Krasnosielskij M.A., Lifszic E.A., Sobolew A.W.: Pozitivnyje liniejnyje sistemy. G. R. F. ML. Moskwa 1985.

[15] Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1970.

[16] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965.

[17] Ostrowski A.M.: Solutions of equations and systems of equations. New York 1960.

[18] Turowicz A.: Geometria zer wielomianów. PWN, Warszawa 1967.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do redakcji dnia 30 maja 1988 r.

## МЕТОД СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ КОМПЕНСИРУЮЩИХ РЕАКТИВНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ТОКА ДЛЯ ОДНОФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

### Р е з ю м е

В работе представлен метод синтеза цепей компенсирующих реактивную составлящую тока для однофазных приемников с несинусоидальным напряжением источника. Доказаны необходимые и достаточные условия для реализации цепей компенсирующих реактивний ток с прмрщью реактивных двухполюсников C.

Компенсирующая цепь в общем случае состоит из двух двухполюсников C соединенных параллельно для компенсации - гармоник реактивной составляющей тока.

THE METHOD OF THE SYNTHESIS OF THE COMPENSATION NETWORKS FOR THE REACTIVE COMPONENT OF THE CURRENT OF THE TWO-TERMINAL RECEIVER SUPPLIED FROM THE PERIODIC NONSINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE

S u m m a r y

The method of the synthesis of the network compensating the reactive component ($_{r}i$) of the current of two-terminal receiver supplied with periodic nonsinusoidal voltage has been worked out.
It has been proved that the necessary and sufficient conditions of its realizability as LC one-ports are fulfilled.
Generally the compensation network consists of two LC one-ports described with reactance functions of the n-th order and compensates n-1 harmonics of the reactive component of the receiver (load) current.