

Maciej SIWCZYŃSKI

Jadwiga KRYCH

Krystyna HANUSIK

KOMPUTEROWA ANALIZA ANALOGOWYCH FILTRÓW PRZESTRAJANYCH

Streszczenie. W pracy opisano nową metodę komputerowego modelowania dynamiki i drgań liniowych układów parametrycznych. We wstępie omówiono metodę cyfrowego modelowania operatora splotu. Polega ona na równoczesnym próbkowaniu w dziedzinie czasu i częstotliwości i posiada dobrą dokładność, gdy w układzie nie występują ostre rezonanse amplitudowe i fazowe. Czasową zależność parametrów wprowadzono w formie dodatkowego sprzężenia zwrotnego. Prowadzi to bezpośrednio do równania całkowego Voltery. W pracy opisano metodę cyfrowego modelowania jądra równania Voltery i efektywnego jego rozwiązania. Istniejące w układzie warunki początkowe uwzględniono w postaci dodatkowego sygnału wejściowego. Przeprowadzono przykładową analizę filtru selektywnego z przestrajaną częstotliwością rezonansową. Podana tu metoda znajdzie zastosowanie do badania dynamiki układów nieliniowych opisanych równaniami Voltery. Nieliniowe równania całkowe zamieniane są wówczas na przyrostowe równania liniowe, które modelowane są układem z parametrycznym sprzężeniem zwrotnym.

1. Modelowanie czasowe liniowych operatorów czasowo niezmienniczych

Operator liniowego układu czasowo niezmienniczego jest splotem:

$$H x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad (1)$$

gdzie h jest tzw. pojedynczą odpowiedzią impulsową układu spełniająca warunek przyczynowości:

$$h(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t < 0.$$

Równomierne próbkowanie w dziedzinie czasu zmienia operator (1) na równoważny operator splotowy dyskretny:

$$H_D x_D(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_D(n - m)x_D(m), \quad (2)$$

gdzie h_D jest przyczynową dyskretną odpowiedzią impulsową układu, którą można otrzymać numerycznie z charakterystyki częstotliwościowej \bar{h} układu oryginalnego za pomocą wzoru przybliżonego:

$$h_D(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{nm}{N}} \bar{h}(j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\pi m}{N}), \quad (3)$$

gdzie:

T - krok dyskretyzacji,

N - ilość punktów równomiernego podziału okręgu jednostkowego.

Wzór (3) posiada dobrą dokładność, gdy w układzie nie występują ostre rezonanse amplitudowe i fazowe.

Przejście sygnału T -okresowego przez układ liniowy czasowo niezmienniczy opisuje operator splotu cyklicznego:

$$\tilde{h} x(t) = \int_0^T h(t-r)x(r)dr, \quad (4)$$

gdzie \tilde{h} jest tzw. cykliczną odpowiedzią impulsową układu związaną z pojedynczą odpowiedzią impulsową związkiem:

$$\tilde{h}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(t+pT), \quad (5)$$

skąd wynika T -okresowość funkcji \tilde{h} .

Przez próbkowanie z odstępem T splot cykliczny (4) można zamienić na dyskretny splot cykliczny:

$$\tilde{h}_D x_D(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}_D(n-m)x_D(m), \quad (6)$$

gdzie M jest liczbą próbek w okresie T . Cykliczną odpowiedź impulsową \tilde{h}_D modelu dyskretnego można otrzymać z pojedynczej odpowiedzi impulsowej h_D :

$$\tilde{h}_D(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_D(n+pM), \quad (7)$$

gdzie $n = 0, 1, \dots, M-1$ i $N > M$.

2. Modelowanie czasowe liniowych operatorów czasowo zależnych

Liniowy operator czasowo zależny ma postać:

$$H x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t-r)x(r)dr. \quad (8)$$

Operator ten przekształca sygnał T-okresowy w sygnał T-okresowy, gdy jądro jest okresowe względem pierwszego argumentu:

$$h(t + T, t - r) = h(t, t - r). \quad (9)$$

Jeśli podstawić:

$$g(t, r) = h(t, t - r),$$

to warunek okresowości przyjmie postać:

$$g(t + T, r + T) = g(t, r).$$

Oznacza to, że jądro g musi być okresowe względem obu argumentów.

Operator cykliczny odwzorowujący zbiór sygnałów okresowych w siebie można zapisać w formie:

$$\tilde{H} x(t) = \int_0^T \tilde{h}(t, t-r)x(r)dr, \quad (10)$$

gdzie:

$$\tilde{h}(t, t-r) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(t, t-r+pT) \quad (11)$$

jest jądrem okresowym względem zmiennych t i $t-r$.

Dla sygnałów próbkowanych liniowy operator czasowo zależny przyjmie postać:

$$H_D x_D(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_D(n, n-m)x_D(m) \quad (12)$$

gdzie:

$$h_D(n, n-m) = \tau h[n\tau, (n-m)\tau]. \quad (13)$$

3. Równania całkowe Volterry liniowych układów czasowo zależnych

Model rzeczywistego układu liniowego o zmiennych parametrach i zerowych warunkach początkowych przedstawić można w postaci układu z jednym wejściem x i wyjściem y . Związek między sygnałem wejściowym x i wyjściowym y opisany jest równaniem różniczkowym:

$$\sum_{k=0}^p [a_k - b_k(t)] y^{(k)}(t) = x(t) \quad (14)$$

z warunkiem początkowym $y^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 0, \dots, p-1$
lub

$$\sum_{k=0}^p a_k y^{(k)}(t) = x(t) + \sum_{k=0}^p b_k(t) y^{(k)}(t) \quad (15)$$

przy

$$y^{(k)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Wprowadzając sygnał pomocniczy $v(t)$:

$$v(t) = \sum_{k=0}^p b_k(t) y^{(k)}(t) \quad (16)$$

równanie (15) można zapisać w formie:

$$\sum_{k=0}^p a_k y^{(k)}(t) = x(t) + v(t). \quad (17)$$

Wyrażenie (17) jest równaniem liniowym o stałych parametrach. Może być zatem rozwiązane za pomocą operatora spłotowego:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-r)x(r)dr + \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-r)v(r)dr \quad (18)$$

gdzie:

$$\bar{h}_0(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k s^k}.$$

Wykonując przekształcenie Laplace'a na równaniu (18), otrzymuje się:

$$\bar{y}(s) = \bar{h}_0(s) \cdot \bar{x}(s) + \bar{h}_0(s) \cdot \bar{v}(s), \quad (19)$$

skąd:

$$s^k \bar{y}(s) = s^k \bar{h}_0(s) \bar{x}(s) + s^k \bar{h}_0(s) \bar{v}(s). \quad (20)$$

Po przedstawieniu:

$$\bar{h}_k(s) = s^k \bar{h}_0(s) = \frac{s^k}{\sum_{q=0}^k a_q s^q}, \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (21)$$

Z wyrażień (16) i (20) otrzymuje się:

$$v(t) = \sum_{k=0}^p b_k(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t-r)x(r)dr + \sum_{k=0}^p b_k(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t-r)v(r)dr \quad (22)$$

albo

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t, t-r)x(r)dr + \int_{-\infty}^{\infty} b(t, t-r)v(r)dr, \quad (23)$$

gdzie:

$$b(t, t-r) = \sum_{k=0}^p b_k(t)h_k(t-r), \quad (24)$$

a funkcje impulsowe h_k są k-tymi pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji impulsowej h_0 układu czasowo niezależnego o parametrach a_0, \dots, a_k .

Równanie całkowe (23) jest równaniem Volterry.

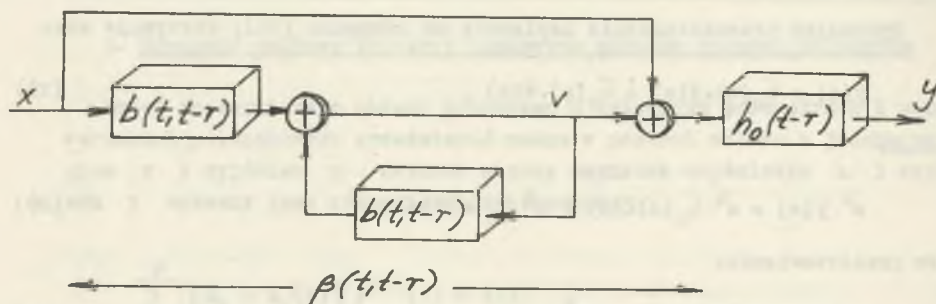
Przyczynowość funkcji h_k :

$$h_k(t-r) = 0 \quad \text{dla} \quad r > t \quad k = 0, 1, \dots, p$$

pociąga za sobą warunek przyczynowości:

$$b(t, t-r) = 0 \quad \text{dla} \quad r > t.$$

Rysunek 1 przedstawia schemat blokowy układu opisanego równaniem całkowym (23). Poszczególne bloki schematu zawierają jądra odpowiadających im operatorów całkowych.



Rys. 1

Fig. 1

Ten schemat blokowy można zredukować. Z równania:

$$\beta = \delta + (\delta - b)^{-1} \circ b,$$

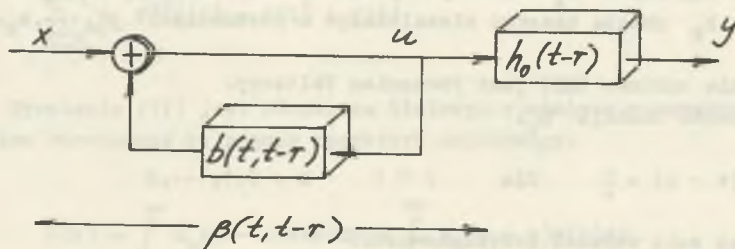
gdzie δ (funkcja Diraca) jest jądrem całkowego operatora tożsamościowego, a β jest jądrem operatora zastępczego (patrz rys. 1), otrzymuje się:

$$(\delta - b) \cdot \beta = (\delta - b) \cdot \delta + b = \delta - b + b = \delta$$

skąd:

$$\beta = (\delta - b)^{-1}. \quad (25)$$

Ze wzoru (25) wynika uproszczony schemat blokowy układu przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2

Fig. 2

Zredukowana część schematu blokowego może być opisana równaniem całkowym Volterry:

$$u(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} b(t, t-r)u(r)dr. \quad (26)$$

Próbkowanie czasowe zmienia równanie (26) w równanie dyskretne:

$$u_D(n) = x_D(n) + \sum_{m=-\infty}^n b_D(n, n-m)u_D(m), \quad (27)$$

gdzie:

$$b_D(n, n-m) = \sum_{k=0}^p b_k(nT)h_{kD}(n-m), \quad (28)$$

$$h_{kD}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{nm}{N}} \bar{h}_k(j \frac{2}{T} \text{tg} \pi \frac{m}{N}), \quad (29)$$

$$k = 0, 1, \dots, p.$$

Kolejne przekształcenia równania (27) dają:

$$u_D(n) = x_D(n) + \sum_{m=-\infty}^{n-1} b_D(n, n-m)u_D(m) + b_D(n, 0)u_D(n),$$

skąd:

$$U_D(n) = \frac{1}{1-b_D(n,0)} x_D(n) + \frac{1}{1-b_D(n,0)} \sum_{m=-\infty}^{n-1} b_D(n, n-m)u_D(m). \quad (30)$$

Wzór (30) w sposób rekursywny pozwala wyznaczyć kolejne próbki sygnału u_D . Próbkę sygnału wyjściowego określa wzór:

$$y_D(n) = \sum_{m=-\infty}^n h_{0D}(n-m)u(m). \quad (31)$$

Związek między sygnałem wejściowym x a wyjściowym y można opisać równaniem różniczkowym odpowiadającym postaci (14):

$$\sum_{k=0}^p [f_k y]^{(k)}(t) = x(t) \quad (32)$$

przy warunkach początkowych $y^{(k)}(0) = y_k$ dla $k = 0, 1, \dots, k-1$, gdzie $f_k(t) = a_k - b_k(t)$ jest funkcją ograniczoną, a współczynniki a_k są stałe i takie, że wyrażenie $\frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k s^k}$ jest rekurezywnie stabilne.

Czyli można zapisać:

$$\sum_{k=0}^p a_k y^{(k)}(t) = x(t) + \sum_{k=0}^p [b_k(t)y(t)]^{(k)} \quad (33)$$

przy warunkach początkowych

$$y^{(k)}(0) = y_k,$$

Na równaniu (33) wykonano przekształcenie Laplace'a, oznaczając $(b_k a)^{(k)}(0) = (b_k y)_k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p a_k \left[s^k y(s) - \sum_{l=1}^k s^{k-l} y_{l-1} \right] + a_0 \bar{y}(s) &= \bar{x}(s) + \\ &= \sum_{k=1}^p \left[s^k (\bar{b}_k y)(s) - \sum_{l=1}^k s^{k-l} (b_k y)_{l-1} \right] + (b_0 \bar{y})(s). \end{aligned} \quad (34)$$

Wtedy transformata Laplace'a sygnału wyjściowego ma postać:

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= \sum_{k=0}^p \bar{h}_k(s) (b_k \bar{y})(s) + \bar{h}_0(s) \left\{ \bar{x}(s) + \right. \\ &\left. \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^k \left[a_k s^{k-l} y_{l-1} - s^{k-l} (b_k y)_{l-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie:

$$\bar{h}_0(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k s^k}, \quad \bar{h}_k(s) = s^k \bar{h}_0(s), \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Po przekształceniu odwrotnym:

$$y(t) = \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t-r)b_k(r)y(r)dr + \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-r)x(r)dr +$$

$$+ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^k h_{k-l}(t) [a_k y_{l-1} + (b_k y)_{l-1}] \quad (36)$$

gdzie:

$$h_{k-1}(t) = \mathcal{L}^{-1} [h_{k-1}(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{k-1}}{\sum_{k=0}^p a_k s^k} \right], \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, p, \\ l = 1, 2, \dots, k. \end{matrix}$$

Po zmianie kolejności sumowania oraz całkowania i przy oznaczeniu:

$$bg(t, t-r) = \sum_{k=0}^p h_k(t-r)b_k(r), \quad (37)$$

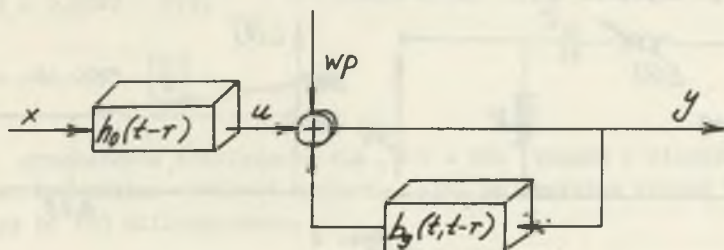
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t-r)x(r)dr \quad (38)$$

otrzymuje się:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} bg(t, t-r)y(r)dr + u(t) + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^k h_{k-l}(t) [a_k y_{l-1} + (b_k y)_{l-1}], \quad (39)$$

Otrzymane równanie (39) jest równaniem Volterry. Funkcje impulsowe h_k są przyczynowe. Warunek przyczynowości $h_k(t-r) = 0$ dla $r > t$, $k=0,1,\dots,p$ pociąga za sobą warunek $bg(t, t-r)=0$ dla $r > t$.

Schemat blokowy równania (39) przedstawia rys. 3.



Rys. 3
Fig. 3

Niezerowe warunki początkowe wprowadzone są sygnałem oznaczonym przez wp:

$$wp = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^k h_{k-1}(t) [a_k y_{l-1} + (b_k y)_{l-1}]$$

Po dyskretyzacji czasu wyrażenia (37)–(39) przyjmują postać:

$$y(n\tau) = \sum_{m=0}^{n-1} \tau b_g [n\tau, (n-m)\tau] y(m\tau) + u(n\tau) + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^k h_{k-1}(n\tau) [a_k y_{l-1} + (b_k y)_{l-1}], \quad (40)$$

gdzie:

$$b_g [n\tau, (n-m)\tau] = \sum_{k=0}^p h_k [(n-m)\tau] b_k(m\tau),$$

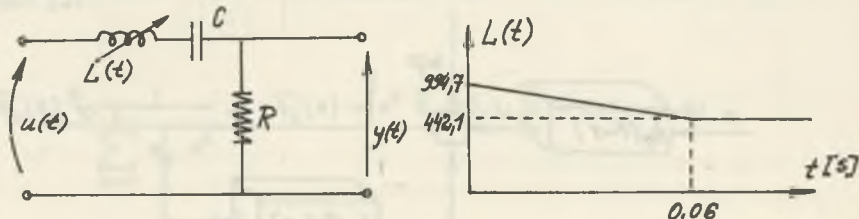
$$u(n\tau) = \sum_{m=0}^{n-1} \tau h_0 [(n-m)\tau] x(m\tau),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Przed autorami stoi zadanie wykazania, kiedy i na ile przedstawiona metoda jest efektywna.

4. Przykład

W obwodzie, w którym indukcyjność L zależy od czasu (rys. 4), należy wyznaczyć napięcie $y(t)$ na oporniku R :



Rys. 4
Fig. 4

$$u(t) = 10 \sin 2\pi 50 t \text{ [V]}, \quad C = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ F}, \quad R = 10 \Omega.$$

Wg prawa Kirchoffa:

$$y(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t y(\tau) d\tau + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} [y(t)L(t)] = u(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{L(t)}{R} y(t) \right] + \frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{d}{dt} u(t) .$$

Przyjęto poniższe oznaczenia:

$$a_2 - b_2(t) = \frac{L(t)}{R} = \begin{cases} 99,47 \cdot 10^{-3} - 0,921 t \left[\frac{\text{H}}{\Omega} \right] & \text{dla } 0 \leq t < 0,06 \text{ s} \\ 44,21 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{H}}{\Omega} \right] & \text{dla } t \geq 0,06 \text{ s} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = x(t) = 3140 \cos 314 t,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{RC} = 6280 \frac{1}{\text{s}} .$$

Wtedy równanie obwodu przyjmie postać:

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = x(t) + \frac{d^2}{dt^2} [b_2(t)y(t)] ,$$

gdzie:

$$a_2 = 79,47 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\Omega}$$

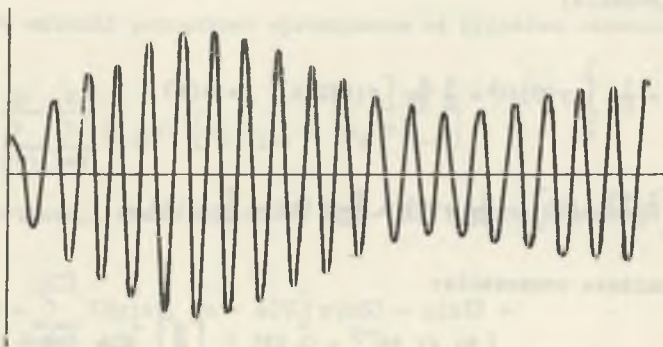
$$b_2(t) = \begin{cases} -20 \cdot 10^{-3} + 0,921 t & \text{dla } 0 \leq t < 0,06 \text{ s} \\ 35,26 \cdot 10^{-3} & \text{dla } t \geq 0,06 \text{ s} . \end{cases}$$

Warunki początkowe:

$$y(0) = 0,8767 \quad [\text{V}],$$

$$\frac{dy}{dt} = -24,0095 \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{s}} \right] .$$

Rys. 5 przedstawia rozwiązanie dla $N-1 = 256$ kroków o długości $\tau = 1,5$ ms. Maksymalna wielkość napięcia $y(t)$ na oporniku wynosi 5,4 V i występuje po 120 milisekundach.



Rys. 5

Fig. 5

LITERATURA

- [1] Marczuk G.J.: Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej. PWN, Warszawa 1983.
- [2] Oppenheim A.W., Schaffer R.M.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKiŁ, Warszawa 1979.
- [3] Siwczyński M.: Problemy i zadania z teorii obwodów i układów w ujęciu funkcjonalnym. Cz. I. Układy liniowe o stałych skupionych. Zielona Góra 1986.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Bernard Baron

Wpłynęło do redakcji dnia 20 maja 1988 r.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕНАЛАЖИВАЕМЫХ ФИЛЬТРОВ

Р е з ю м е

В работе описывается новый метод компьютерного моделирования динамики и линейных колебаний параметрических систем. В введении описывается метод цифрового моделирования оператора свертки. Метод заключается в одновременной дискретизации по времени и по частоте. Метод достаточно точен в случае недостатка острых амплитудных и фазовых резонансов. Временная зависимость параметров введена в виде обратной связи. Это непосредственно ведет к интегральному уравнению Вольтерры. В работе описывается метод цифрового моделирования ядра уравнения Вольтерры и эффективного его решения. Начальные условия учитываются в виде добавочного входного сигнала. Проведен примерный анализ избирательного фильтра с переналаживаемой резонансной частотой. Предло-

женный метод найдет применение в исследовании динамики нелинейных систем описанных уравнениями Вольтерры. Нелинейные интегральные уравнения замещаются разностными линейными уравнениями, которые моделируются системой с параметрической обратной связью.

COMPUTER-AIDED ANALYSIS OF RETUNED ANALOG FILTERS

S u m m a r y

New computer-aided method of the linear time-varying systems modelling has been described in the work. The convolution operator numerical modelling has been discussed in the preface. It consists in time and frequency sampling, simultaneously, and has sufficient accuracy when there are no frequency peaks in the circuit. Time - varying parameters have been introduced in the form of additional feedback. It leads directly to the Volterra integral equation. The method of numerical modelling the Volterra equation's kernel and solving it effectively has been described in the work.

The initial conditions existing in the circuit have been taken into account in the form of additional input signal. An example of the analysis of the selective filter with pretuned resonance frequency has been presented.

The method given herein may be applied to testing dynamics of nonlinear systems described by Volterra equations. Then the nonlinear integral equations are changed for incremental linear equations with time-varying parametric feedback.