ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: BUDOWNICTWO z. 76 Nr kol. 1130

Józef CZAJA
Instytut Geodezji Górniczej
i Przemysłowej
AGH w Krakowie

WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ PUNKTÓW W GEODEZYJNYCH SIECIACH ODNIESIENIA

Streszczenie. Przedmiotem pracy jest analiza okresowo obserwowanych sieci geodezyjnych w aspekcie zmian wartości ich geometrycznych elementów. Wzory od (5) do (9) określają kryteria wzajemnej stałości punktów w sieci. Parametry występujące w tych wzorach są zdefiniowane według wzorów od (10) do (28).

Transformację pozornych przemieszczeń punktów wykonujemy: dla sieci poziomej według wzorów (32), dla sieci niwelacyjnej według zależności (37). Ocenę dokładności ostatecznych przemieszczeń punktów wykonujemy na podstawie macierzy wariancyjno-kowariancyjnej (39).

1. WPROWADZENIE

W geodezyjnych badaniach przemieszczeń obiektów inżynierskich istotne znaczenie ma układ odniesienia.

W płaszczyźnie poziomej układ ten jest realizowany za pomocą sieci punktów odniesienia okresowo obserwowanych za pośrednictwem elementów kątowych i długościowych. Dokładność pomiarów kątów i długości wynika z przyjętej dokładnościowej tolerancji wyznaczania poziomych przemieszczeń badanego obiektu jako bryły sztywnej, a zależy od geometrycznej wielkości sieci i klasy przyrządów pomiarowych. W praktyce geodezyjnej dokładnościową tolerancję wyznaczania poziomych przemieszczeń przyjmuje się na poziomie (t) milimetrów. Wobec powyższego błędy jednostkowe pomiarów kierunków i długości powinny spełniać kryterium

$$\frac{m_k}{\rho} d \cong m_d < \frac{t}{3} \text{ mm.} \tag{1}$$

Wzdłuż linii pionu układ odniesienia stanowi sieć reperów okresowo obserwowanych za pomocą niwelacji precyzyjnej. Dokładność obserwacji tej sieci wynika z dokładnościowej tolerancji wyznaczenia pionowych przemieszczeń badanego obiektu jako bryły sztywnej, która jest przyjmowana na poziomie dziesiątych części milimetra. W praktyce geodezyjnej przyjmuje się, że średni błąd (μ_o) jednostkowy spełnia nierówność

$$\mu_o < 0,1 \text{ mm/1 stanowisko.} \qquad (2)$$

Każdy okresowy pomiar sieci punktów odniesienia powinien być wyrównany niezależnie i oddzielnie w płaszczyźnie poziomej i wzdłuż linii pionu, przy założeniu jednoznacznej orientacji sieci. Końcowe wyniki obliczeń powinny obejmować wyrównane wielkości obserwowane, wyrównane współrzędne (x, y, z) punktów i reperów, macierz kowariancji dla różnic współrzędnych punktów oraz ocenę dokładności parametrów niezmienniczych sieci.

Na podstawie macierzy wariancyjno-kowariancyjnych można określlić następujące niezmiennicze parametry oceny dokładności sieci:

- średnie błędy różnic wysokości dwóch dowolnych reperów w sieci niwelacyjnej,
- średnie błędy odległości dwóch dowolnych punktów w sieci poziomej,
- średnie błędy kątów określonych przez trzy dowolne punkty,
- średnie błędy funkcji różnic wysokości lub długości i kątów,
- wyznacznik z macierzy wariancyjno-kowariancyjnej, który w interpretacji geometrycznej stanowi wartość proporcjonalną do kwadratu objętości hiperelipsoidy błędów w przestrzeni n-wymiarowej, przy czym n oznacza liczbę wyznaczonych niewiadomych w sieci.

Wartość wyznacznika macierzy wariancyjno-kowariancyjnej oblicza się na podstawie wzoru

$$\det [Q] = \left(\prod_{i}^{n} q_{ii} \right)^2 , \qquad (3)$$

gdzie

$$[q_{ij}] = [Q]^{1/2} . \qquad (4)$$

W dalszych analizach będziemy korzystali z pochodnego parametru wyznacznika (3).

2. IDENTYFIKACJA PUNKTÓW STAŁYCH

Po każdym okresowym pomiarze dokonujemy weryfikacji układu odniesienia w stosunku do pomiaru wyjściowego (pierwotnego). W tym celu w sieciach odniesienia identyfikujemy punkty, które zachowały stałość względem siebie. Do kryterium identyfikacji punktów stałych można przyjmować tylko wielkości będące niezmiennikami względem układu współrzędnych ustalonego do wyrównania. W sieciach poziomych takimi wielkościami są, miedzy innymi: zmiany długości boków i zmiany wartości kątów między bokami, odkształcenia liniowe i postaciowe, a w sieciach niwelacyjnych są zmiany przewyższeń między reperami.

Kryteria stałości punktów w sieciach odniesienia można zapisać symbolicznie według wzorów:

- dla sieci poziomej

$$\Delta d_{ij} \le \kappa\, T_{\Delta d}, \tag{5}$$

$$\Delta\alpha_{ij} - \Delta\alpha_{kl} \le \kappa\, T_{\Delta\alpha}, \tag{6}$$

$$\gamma \le \kappa\, T_{\gamma}, \tag{7}$$

$$\varepsilon \le \kappa\, T_{\varepsilon}, \tag{8}$$

- dla sieci niwelacyjnej

$$\Delta h_{ij} \le \kappa\, T_{\Delta h}, \tag{9}$$

gdzie:

Δd_{ij} - zmiana długości odcinka $\overline{P_iP_j}$ z dwóch okresowych pomiarów,

$\Delta\alpha_{ij}, \Delta\alpha_{kl}$ - zmiana azymutu odcinka $\overline{P_iP_j}$ oraz odcinka $\overline{P_kP_l}$ z dwóch okresowych pomiarów,

γ - odkształcenie postaciowe w elemencie trójkątnym P_i, P_j, P_k z dwóch okresowych pomiarów,

ε - odkształcenie liniowe w elemencie trójkątnym P_i, P_j, P_k z dwóch okresowych pomiarów,

Δh_{ij} - zmiana przewyższenia między reperami R_i, R_j z dwóch okresowych pomiarów,

$T_{\Delta d}$ - niezmienniczy parametr błędu zmian długości odcinków,

$T_{\Delta\alpha}$ - niezmienniczy parametr błędu zmian azymutów,

T_{γ} - niezmienniczy parametr błędu odkształcenia postacioweego,

T_{ε} - niezmienniczy parametr błędu odkształcenia liniowego,

$T_{\Delta h}$ - niezmienniczy parametr błędu zmian przewyższeń reperów,
κ - parametr zależny od poziomu ufności i liczby wyznaczanych niewiadomych w sieci.

Różnice wyrównanych współrzędnych punktów z dwóch okresowych pomiarów oznaczamy przez pozorne przemieszczenia tych punktów

$$\bar{u}_x = \bar{x}_{II} - x_I,$$
$$\bar{u}_y = \bar{y}_{II} - y_I, \tag{10}$$
$$\bar{u}_z = \bar{z}_{II} - z_I.$$

Wielkości występujące po lewej stronie nierówności od (5) do (9) będą jednoznacznie określone przez pozorne przemieszczenia punktów, czyli

$$\Delta d_{ij} = \Delta\bar{u}_{xij}\cos\alpha_{ij} + \Delta\bar{u}_{yij}\sin\alpha_{ij}, \tag{11}$$

$$\Delta\alpha_{ij} = (-\Delta\bar{u}_{xij}\sin\alpha_{ij} + \Delta\bar{u}_{yij}\cos\alpha_{ij})\frac{\rho}{d_{ij}}, \tag{12}$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, \tag{13}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}}, \tag{14}$$

$$\Delta h_{ij} = \bar{u}_{zj} - \bar{u}_{zi}, \tag{15}$$

gdzie:

$$[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}] = \frac{1}{2P}\begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{yi} \\ \bar{u}_{xj} \\ \bar{u}_{yj} \\ \bar{u}_{xk} \\ \bar{u}_{yk} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$b_i = y_j - y_k, \tag{17}$$

$$c_i = x_k - x_j, \tag{18}$$

a pozostałe współczynniki otrzymuje się przez cykliczne przestawienie wskaźników (i, j, k), P zaś oznacza pole rozpatrywanego elementu trójkątnego. Współrzędne punktów wchodzące do wzorów (17), (18) i do obliczenia pola trójkąta stanowią wyrównane współrzędne z pomiaru wyjściwego.

Niezmiennicze parametry błędów $T_{\Delta d}$, $T_{\Delta\alpha}$, T_{γ}, T_{ε} i $T_{\Delta h}$ powinny być ściśle związane z macierzą wariancyjno-kowariancyjną wyznaczanych różnic współrzędnych punktów w obu porównywanych pomiarach okresowych.

W literaturze geodezyjnej dominują dwa sposoby określania niezmienniczych parametrów błędów.

Większość autorów swoich prac zaleca wyznaczać wartości tych parametrów jako średnie błędy funkcji określających wielkości Δd_{ij}, $\Delta\alpha_{ij}$, γ_{ijk}, ε_{ijk} i Δh_{ij}.

Autor niniejszej pracy proponuje odmienny sposób, aby parametry błędów wchodzących do kryteriów od (5) do (9) wyznaczać globalnie na podstawie wartości wyznacznika macierzy wariancyjno-kowariancyjnej. Postępowanie takie zapewnia jednakowe zaufanie do wszystkich elementów sieci w procesie identyfikacji punktów stałych. Natomiast odmienne postępowanie innych autorów faworyzuje w procesie identyfikacji te elementy sieci, które otrzymały największe średnie błędy.

Parametry błędów występujących po prawej stronie nierówności od (5) do (9) definiujemy za pomocą wartości wyznacznika (3) macierzy wariancyjno-kowariancyjnej. W tym celu obliczamy parametr pochodny

$$M = \sqrt[2n]{\det\,[Q]}, \tag{19}$$

który w interpretacji geometrycznej oznacza promień hiperkuli w przestrzeni n-wymiarowej, o objętości równej objętości hiperelipsoidy, przy czym n oznacza liczbę wyznaczanych niewiadomych.

Po uwzględnieniu warunku o niezależności okresowych pomiarów, składowe pozornych przemieszczeń punktów będą obarczone globalnym błędem [por. wzór (10)]

$$M_u = \sqrt{M_I^2 + M_{II}^2}, \tag{20}$$

gdzie wskaźniki I i II oznaczają numery okresowych pomiarów.

Stosując prawo narastania błędów dla funkcjji (11) i (12) przy uwzględnieniu (20) otrzymamy

$$M_{\Delta d} = \sqrt{2}\, M_u, \tag{21}$$

$$M_{\Delta\alpha} = \sqrt{2}\, M_u \frac{\rho}{d}. \tag{22}$$

Wobec powyższego parametry błędów występujące w nierównościach od (5) do (9) proponujemy określać według wzorów

$$T_{\Delta d} = \sqrt{2}\, M_u, \tag{23}$$

$$T_{\Delta\alpha} = \sqrt{2}\, M_u \frac{\rho}{d_{śr}}, \tag{24}$$

$$T_{\gamma} = \sqrt{2}\, M_u \frac{\rho}{d_{śr}}, \tag{25}$$

$$T_{\varepsilon} = \sqrt{2}\, M_u \frac{1}{d_{śr}}, \tag{26}$$

$$T_{\Delta h} = \sqrt{2}\, M_u, \tag{27}$$

Parametr κ występujący we wszystkich kryteriach proponujemy wyznaczać według zależności

$$\kappa = \sqrt{n}, \tag{28}$$

gdzie n oznacza [por. wzór (19)] liczbę wyznaczanych niewiadomych. Związek (28) wynika z rozkładu chi-kwadrat dla prawdopodobieństwa wielowymiarowego na poziomie P = 0,5.

Dla sieci poziomych możemy stosować rozłącznie dwa algorytmy identyfikacji punktów stałych.

W pierwszym algorytmie wykorzystujemy kryteria (5) i (6). Na podstawie tych kryteriów identyfikujemy najliczniejszą grupę punktów, które we wszystkich kombinacjach dwójkowych spełniają nierówności (5) i (6).

W drugim algorytmie identyfikujemy najliczniejszą grupę punktów, które w kombinacjach trójkowych spełniają kryteria (7) i (8).

Dla sieci niwelacyjnych korzystając z kryterium (9) identyfikujemy najliczniejszą grupę reperów, których

$$(\bar{u}_{z\,max} - \bar{u}_{z\,min}) \le \kappa T_{\Delta h}. \tag{29}$$

Jeżeli analiza stałości sieci prowadzi do dwóch rozłącznych grup punktów o identycznej liczebności, to o dalszym wyborze powinien decydować rozstęp wartości parametrów, względem których dokonujemy identyfikacji.

Na podstawie zidentyfikowanej grupy punktów stałych określamy parametry izometrycznej transformacji.

Dla sieci poziomej zestawiamy układ równań aproksymacyjnych postaci

$$\bar{u}_x = u_{xo} - \omega y + v_x,$$
$$\bar{u}_y = u_{yo} + \omega x + v_y, \tag{30}$$

gdzie: $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ - składowe pozornych przemieszczeń zidentyfikowanych punktów stałych,

u_{xo}, u_{yo} - składowe translacji,

ω - składowe obrotu (rotacji),

x, y - współrzędne punktów z pomiaru wyjściowego,

v_x, v_y - poprawki aproksymacyjne.

Układ równań aproksymacyjnych (30) rozwiązujemy przy warunku brzegowym

$$\sum_i v_{xi}^2 + \sum_i v_{yi}^2 = \text{minimum}, \tag{31}$$

który prowadzi do równań normalnych określających jednoznacznie niewiadome u_{xo}, u_{yo} i ω.

Ostateczne wartości przemieszczeń punktów sieci odniesienia obliczamy według zależności [por. (30)]

$$u_x = \bar{u}_x - u_{xo} + \omega y,$$
$$u_y = \bar{u}_y - u_{yo} - \omega x, \tag{32}$$

a ostateczne wartości współrzędnych punktów z aktualnego pomiaru obliczamy według zależności [por. (10)]

$$x_{II} = x_I + u_x,$$
$$y_{II} = y_I + u_y. \tag{33}$$

Dla sieci niwelacyjnych zestawiamy układ równań aproksymacyjnych postaci

$$\bar{u}_z = u_{zo} + v_z, \tag{24}$$

który rozwiązując według warunku

$$\sum_i v_{zi}^2 = \text{minimum}, \tag{35}$$

otrzymamy wzór na pionową translację

$$u_{zo} = \frac{\sum_{i}^{s} \bar{u}_{zi}}{s}, \tag{36}$$

przy czym s oznacza liczbę reperów, zidentyfikowanych jako wzajemnie stałe.

Ostateczne przemieszczenie reperów sieci odniesienia określimy według zależności

$$u_z = \bar{u}_z - u_{zo}, \tag{37}$$

a wyrównane wysokości z pomiaru aktualnego obliczymy według wzoru

$$z_{II} = z_I + u_z. \tag{38}$$

Ocena dokładności wyznaczonych przemieszczeń punktów tkwi w macierzy wariancyjno-kowariancyjnej, która jest sumą macierzy wariancyjno-kowariancyjnych różnic współrzędnych punktów wyznaczonych w trakcie wyrównywania obu okresowych pomiarów, czyli

$$Q_u = Q_I + Q_{II}. \tag{39}$$

Wszystkie niezmienniki macierzy (39) stanowią ocenę dokładności geometrycznych elementów porównywanych sieci.

LITERATURA

[1] *Czaja J.;* Uogólniona metoda wyznaczania deformacji konstrukcji geodezyjnych okresowo obserwowanych. Geodezja i Kartografia, z. 4, 1978.

[2] *Czaja J.;* Algorithm of Computation of Vertical Displacements of Bench Marks. Geodezja i Kartografia z. 3-4, 1982.

[3] *Janusz W.;* Obliczanie poziomych przemieszczeń punktów w sieciach kontrolnych. Prace IGiK, T. XXX, z. 1, 1983.

[4] *Laudyn I.;* Obliczanie przemieszczeń poziomych budowli. Prace IGiK z. 1, 1980.

[5] *Laudyn I., Hermanowski A.;* Obliczenie pionowych przemieszczeń budowli. Prace IGiK z. 3, 1980.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Jan Gocał

Wpłynęło do Redakcji

COMPUTATION OF DISPLACEMENTS OF POINTS IN SURVEYING NETWORKS

S u m m a r y

Analysis of stability of elements of periodically measured networks is dealt with in the paper.

Formulae (5) through (9) describe criteria of the relative stability of network points. Parameters of the formulae are defined by formulae (10) through (28).

Transformation of seeming displacements of points is computed according to formulae (32) in horizontal network and (37) in levelling network. The accuracy of final displacements of points is estimated on the basis of the variance-covariance matrix (39).

BESTIMMUNG HORIZONTALER VERLAGERUNGEN DER PUNKTE IM BEZUGSNETZ

Zusammenfassung

Im Artikel wurde das originelle Kriterium der Beständigkeit, das auf das Ausnutzen des gesamten Parameters, welcher der Radius der Hyperkugel im n-Maßgebiet ist, basiert - berechnet als derivativer Determinante der varianzen-kovarianzen Matrix.