

Kazimierz SIKORSKI

Instytut Geodezji i Fotogrametrii

ART Olsztyn

## ZASTOSOWANIE SEKWENCYJNYCH METOD WYRÓWNANIA DO NASTĘPNYCH ANALIZ DOKŁADNOŚCIOWYCH

**Streszczenie.** Przedmiotem pracy są aktualne problemy naukowe związane z optymalizacją sieci geodezyjnych w aspekcie oceny dokładności. W artykule proponuje się zastosowanie do analiz dokładności sekwencyjną metodę uzgadniania wyników, która prowadzi do określenia macierzy wariancyjno-kowariancyjnej.

### 1. WSTĘP

Zakładając sieci realizacyjne często spotykamy się z problemem niedostatecznej dokładności w pewnej ich części lub niektórych elementów charakteryzujących jej dokładność, np. wzajemnej dokładności położenia punktów, skali lub orientacji.

W takiej sytuacji można postąpić dwójako: sieć przeprojektować albo wykonać pomiary uzupełniające, które pozwolą poprawić dokładność niektórych elementów sieci. Można w tym celu procedurę wyrównania powtórzyć od początku, w całości, można jednak skorzystać z algorytmu dołączania nowych obserwacji [2], wyznaczając wartości zmniejszenia błędów wyrównanych wielkości.

W celu realizacji tego zadania można zastosować dwie procedury:

- dołączania obserwacji bez zwiększania liczby wyznaczanych współrzędnych,
- dołączania obserwacji ze zwiększeniem liczby wyznacznych niewiadomych poprzez rozszerzenie sieci o punkty dodatkowe.

## 2. DOŁĄCZANIE OBSERWACJI BEZ ZWIĘKSZANIA LICZBY WYZNACZNYCH WSPÓLRZĘDNYCH

Założmy, że zaprojektowana sieć realizacyjna charakteryzuje się niewystarczającą dokładnością. W związku z tym zaprojektowano wykonanie dodatkowych obserwacji; mogą to być dodatkowo pomierzone długości boków, kąty lub azymuty.

W pracy [2] przedstawiono prosty sposób dołączania pojedynczych obserwacji (lub grup obserwacji). Realizując tak sprecyzowane zadanie, uzyskuje się każdorazowo układ równań normalnych o wymiarach równych liczbie dołączonych obserwacji; tak więc w przypadku dołączenia pojedynczych obserwacji należy rozwiązać tylko jedno równanie normalne.

Dla zachowania ścisłości postępowania należy znać macierz kowariancyjną wyrównanych, w pierwszym etapie, współrzędnych analizowanej sieci

$$\text{Cov}(\bar{X}) = m_0^2 (A_1^T P_1 A_1)^{-1}. \quad (1)$$

Jeśli zatem dla poprawienia dokładności sieci wykonano dodatkową obserwację (lub  $k$  obserwacji), to dodatkowe równanie w postaci liniowej można zapisać następująco:

$$A_2 X - L_2 = V_2, \quad (2)$$

gdzie

$A_2$  - macierz współczynników rozwinięcia liniowego,

$X = X_1 + V_x$  - wektor wyrównanych współrzędnych po uwzględnieniu dodatkowych obserwacji,

$V_x$  - wektor poprawek do  $X_1$  ze względu na obserwacje dodatkowe,

$L_2$  - wektor wyrazów wolnych w równaniach obserwacji dodatkowych,

$V_2$  - wektor poprawek do obserwacji dodatkowych,

$P_2$  - macierz wag obserwacji dodatkowych.

Po zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów uzyskamy

$$V_2 = -P_2^{-1} (P_2^{-1} + A_2 Q_1^{-1} A_2^T) (L_2 - A_2 X_1) \quad (3)$$

$$V_x = Q_1^{-1} A_2^T (P_2^{-1} + A_2 Q_1^{-1} A_2^T) (L_2 - A_2 X_1) \quad (4)$$

$$\text{oraz} \quad \text{Cov}(\bar{X}) = m_o^2 [Q_1^{-1} - Q_1^{-1} A_2^T (P_2^{-1} + A_2 Q_1^{-1} A_2^T)^{-1} A_2 Q_1^{-1}], \quad (5)$$

gdzie

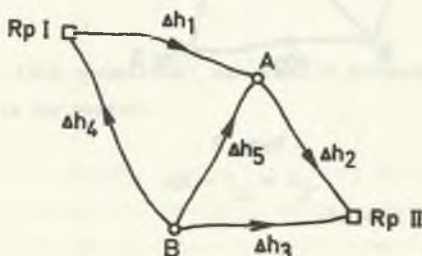
$$m_o^2 = \frac{V_2^T P_2 V_2 + V_x^T Q_x V_x}{n_n}$$

Wzór (5) charakteryzujący dokładność wyznaczenia współrzędnych po dołączeniu dodatkowej obserwacji (lub k dodatkowych obserwacji) możemy łatwo wykorzystać do analizy zmian dokładności współrzędnych analizowanej sieci ze względu na dołączenie dodatkowych obserwacji. Zmianę tę wyraża się poprzez przyrost macierzy kowariancyjnej

$$\Delta \text{Cov}(\bar{X}) = -m_o^2 Q_1^{-1} A_2^T (P_2^{-1} + A_2 Q_1^{-1} A_2^T)^{-1} A_2 Q_1^{-1}. \quad (6)$$

Tak więc ostatecznie wyznaczenie przyrostu dokładności badanych elementów sieci wymaga określenia elementów macierzy (np. na podstawie przybliżonych wartości współrzędnych lub z mapy), określenia wagi tej obserwacji i podstawienia do wzoru (6).

Prześledźmy to postępowanie na prostym przykładzie zaczerpniętym z [1]. Wyrównaniu poddano sieć niwelacyjną przedstawioną na rys. 1.



Rys. 1

Uzyskujemy układ równań normalnych wraz z rozwiązaniem

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = Q_1^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{Cov} \begin{pmatrix} H_A^{(1)} \\ H_B^{(1)} \end{pmatrix} = m_o^2 (A^T A)^{-1} = m_o^2 \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

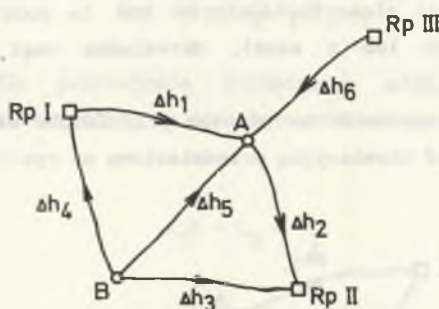
stąd

$$m_{H_A}^2(1) = m_o^2 \frac{3}{8},$$

$$m_{H_B}^2(1) = m_o^2 \frac{3}{8},$$

$$m_{H_A}^2(1) = m_{H_B}^2(1) = 0.61 m_o^2$$

Przeanalizujemy, o ile zwiększy się dokładność wyznaczenia wysokości punktów A i B po dołączeniu obserwacji z Rp III na punkt A o wadze  $p_6 = 1$  (rys. 2).



Rys. 2

Macierz  $A_2$  mieć będzie postać:

$$A_2 = [1 \ 0],$$

natomiast przyjmiemy, iż

$$p_2 = [1]$$

wtedy, zgodnie z (6)

$$\Delta \text{Cov}(\bar{X}) = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left( [1] + [1 \ 0] \cdot \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \ 0] \cdot \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{88} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tak więc ostatecznie wskutek dołączenia dodatkowej obserwacji błąd wysokości punktu A zmniejszy się o wartość

$$\Delta m_{H_A}^2 = m_o^2 \frac{9}{88}$$

i wyniesie

$$m_{H_A}^2 = m_{H_A}^2(1) - m_o^2 \frac{9}{88} = m_o^2 \left( \frac{3}{8} - \frac{9}{88} \right) = m_o^2 \frac{3}{11} \cdot m_{H_A} = 0,52 m_o$$

natomiast punktu B

$$m_{H_B}^2 = m_{H_B}^2(1) - m_o^2 \frac{1}{88} = m_o^2 \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{88} \right) = m_o^2 \frac{4}{11} \cdot$$

$$m_{H_B}^2 = 0,60 m_o$$

oraz, zgodnie z (5)

$$\text{Cov} \begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix} = m_o^2 \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jest ona identyczną z tą, jaką utrzymaliśmy z rozwiązania łącznego.

### 3. DOŁĄCZANIE OBSERWACJI PRZY ROZSZERZENIU SIECI O DODATKOWO WYZNACZANE PUNKTY

Jeśli dodatkowo (lub dodatkowo) obserwacja wyznacza nowy punkt sieci, to wówczas jej równanie ma postać:

$$AX - L_2 = V_2, \quad (7)$$

gdzie

$$X = \begin{bmatrix} X_1 + v_{X_1} \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$X_2$  - nowe współrzędne

oraz

$$A = [A_2 \quad B_2]$$

$A_2$  - macierz współczynników przy  $X_1 + v_{X_1}$

$B_2$  - macierz współczynników przy  $X_2$ .

Rozwiązując równanie (7) metodą najmniejszych kwadratów, zgodnie z [2] otrzymamy:

- poprawki do dołączanych obserwacji

$$V_2 = P_2^{-1}(\Theta^{-1}B_2\Phi^{-1}B_2^T\Theta^{-1} - \Theta^{-1})(L_2 - A_2X_1), \quad (8)$$

- poprawki do współrzędnych  $X_1$  poprawionej sieci

$$V_{X_1} = -Q_1^{-1}A_2^T(\Theta^{-1}B_2\Phi^{-1}B_2^T\Theta^{-1} - \Theta^{-1})(L_2 - A_2X_1), \quad (9)$$

- współrzędne nowych punktów sieci

$$X_2 = \Phi^{-1}B_2\Theta^{-1}(L_2 - A_2X_1). \quad (10)$$

We wzorach (8, 9, 10) przyjęto następujące oznaczenia:

$$\Theta = P_2^{-1} + A_2Q_1^{-1}A_2^T$$

$$\Phi = B_2^T\Theta^{-1}B_2.$$

Ocenę dokładności po wyrównaniu uzyskamy z zależności:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 + V_{X_1}, X_2) = \\ = m_0^2 \begin{bmatrix} Q_1^{-1} - Q_1^{-1}A_2^T(\Theta^{-1} - \Theta^{-1}B_2\Phi^{-1}B_2^T\Theta^{-1})A_2Q_1^{-1}, & -Q_1^{-1}A_2^T\Theta^{-1}B_2\Phi^{-1} \\ -\Phi^{-1}B_2^T\Theta^{-1}A_2Q_1^{-1} & \Phi^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

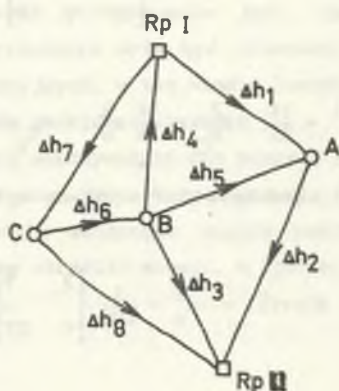
Tak więc i w tym przypadku wzór (11) możemy wykorzystać do określenia zmian dokładności w badanej sieci wskutek dołączenia obserwacji wyznaczających nowy (bądź nowe) punkt. Otrzymamy także charakterystykę dokładności tego nowego punktu.

Przyrost dokładności badanej sieci, zgodnie z (11), będzie równy

$$\Delta\text{Cov}(\bar{X}) = -m_0^2 Q_1^{-1}A_2^T(\Theta^{-1} - \Theta^{-1}B_2\Phi^{-1}B_2^T\Theta^{-1})A_2Q_1^{-1}. \quad (12)$$

Zastosowanie przedstawionego postępowania zilustrujemy przykładem, który będzie oparty na analizie sieci przedstawionej na rys. 1 rozszerzonej o obserwacje wyznaczające nowy punkt C (rys. 3).

Dodatkowymi obserwacjami wyznaczającymi punkt C są obserwacje  $\Delta h_6$ ,  $\Delta h_7$ ,  $\Delta h_8$  z wagami  $p = 1$ . Moglibyśmy oczywiście dodawać je po jednej.



Rys. 3

W odróżnieniu do wcześniej rozpatrywanego przykładu przyjmijmy mniej racjonalny sposób i dołączmy wszystkie trzy obserwacje równocześnie.

W związku z tym mamy

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Q_1^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

A zatem

$$\begin{aligned} \Theta &= P_2^{-1} + A_2 Q_1^{-1} A_2^T = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Skąd

$$\Theta^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 \\ -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = B_2^T \Theta^{-1} B_2 = [-1 \ 0 \ -1] \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 \\ -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{25}{14},$$

skąd

$$\Phi^{-1} = \frac{14}{25}, \quad m_{H_C}^2 = \frac{14}{25} m_o^2, \quad m_{H_C} = 0,75 m_o.$$

Możemy obliczyć już  $\Delta \text{Cov}(\bar{X})$ , podstawiając uzyskane wyżej wartości do wzoru (12)

$$\Delta \text{Cov}(\bar{X}) = -m_o^2 \cdot \frac{1}{200} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 27 \end{bmatrix},$$

stąd ostatecznie

$$m_{H_A}^2 = m_o^2 \left( \frac{3}{8} - \frac{3}{200} \right) = m_o^2 \frac{9}{25}$$

$$m_{H_A} = 0,60 m_o$$

oraz

$$m_{H_B}^2 = m_o^2 \left( \frac{3}{8} - \frac{27}{200} \right) = m_o^2 \frac{6}{25},$$

$$m_{H_B} = 0,49 m_o.$$

Oczywiście dla uzyskania pełnej charakterystyki dokładności sieci po wyrównaniu należy obliczyć brakujące elementy macierzy kowariancji  $\text{Cov}(X_1 + v_{x_1}, X_2)$ .

Są one równe

$$-B_2^T \Theta^{-1} A_2 Q_1^{-1} = \frac{1}{25} [1 \ 3].$$

Tak więc ostatecznie

$$\text{Cov}(X_1 + v_{x_1}, X_2) = m_o^2 \cdot \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 14 \end{bmatrix},$$

a więc postać taka, jaką uzyskalibyśmy z rozwiązania łącznego.



#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiony sposób postępowania jest, jak widać, bardzo prosty i efektywny. Po oprogramowaniu może być stosowany do analiz dokładnościowych wszelkich sieci geodezyjnych, w tym między innymi w przypadku konieczności:

- uwzględnienia błędów punktów nawiązania,
- dodatkowych długości wykonywanych dla poprawy skali,
- dodatkowych kątów i azymutów wykonywanych dla poprawy orientacji.

W czasie wykonywania wstępnych analiz poprzez dołączanie pojedynczych obserwacji można zatem określić moment, w którym rozpatrywana sieć będzie już dostatecznie dokładna.

#### LITERATURA

- [1] Bałandynowicz J., Baran W., Sikorski K., Wiśniewski Z.: Rachunek wyrównawczy. Problemy i zadania. Wyd. ART, Olsztyn 1987.
- [2] Sikorski K.: Metody sekwencyjnego wyrównania modernizowanych powierzchniowych sieci geodezyjnych. Zeszyty Naukowe ART w Olsztynie, Geodezja i Urządzenia Rolne, Nr 8, 1979.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Józef Czaja

Wpłynęło do Redakcji 17.06.1987 r.

#### SEQUENTIAL COMPENSATION METHODS APPLIED IN THE PRELIMINARY ANALYSIS OF ACCURACY

#### S u m m a r y

The subject of this paper is linked with the current research problems of geodesic network optimization in the aspect of accuracy evaluation. The author suggests applying to the analysis of accuracy a sequential method of compensation of results, which leads to variant-covariant matrix.

## VERWENDUNG VON SEQUENZ-METHODEN DER AUSGLEICHUNG ZU EINLEITENDEN GENAUIGKEITSANALYSEN

### Zusammenfassung

Gegenstand der Bearbeitung sind aktuelle Lehrprobleme, die mit der Optimalisierung geodäsicher Netze, im Aspekt der Genauigkeitsbeurteilung.

Im Artikel wird vorgeschlagen, für die Genauigkeitsanalyse eine sequenz-Methode zur Ergebnissabstimmung zu verwenden, die zur Benennung der varianzen-kovarianzen Matrix führt.