

Bernard DRZEŻLA, Aleksander MENDECKI

LOKALIZACJA POZIOMA IMPULSÓW SEJSMOAKUSTYCZNYCH
WEDŁUG METODY P Z UWZGLĘDNIENIEM ANIZOTROPII GÓROTWORU

Streszczenie. W pracy przedstawiono algorytm poziomej lokalizacji impulsów sejsmoakustycznych oparty na danych różnicach czasów wejścia fali P do kolejnych geofonów przy założeniu anizotropii górotworu. Założono mianowicie, że w górotworze można wyróżnić dwa kierunki, w których prędkość fali P jest odpowiednio największa i najmniejsza. Czoło fali ma stałe kształt elipsy o osiach równoległych do kierunków wyróżnionych prędkości. Algorytm dla danych minimum z 4 stanowisk geofonów przy jednoczesnej lokalizacji minimum 4 impulsów wyznacza ich współrzędne, czas w ognisku oraz parametry opisujące przyjęty płaski model anizotropii prędkości: kąt określający kierunki ekstremalnych prędkości fali P oraz wartości tych prędkości. Zamieszczono praktyczny przykład obliczeniowy.

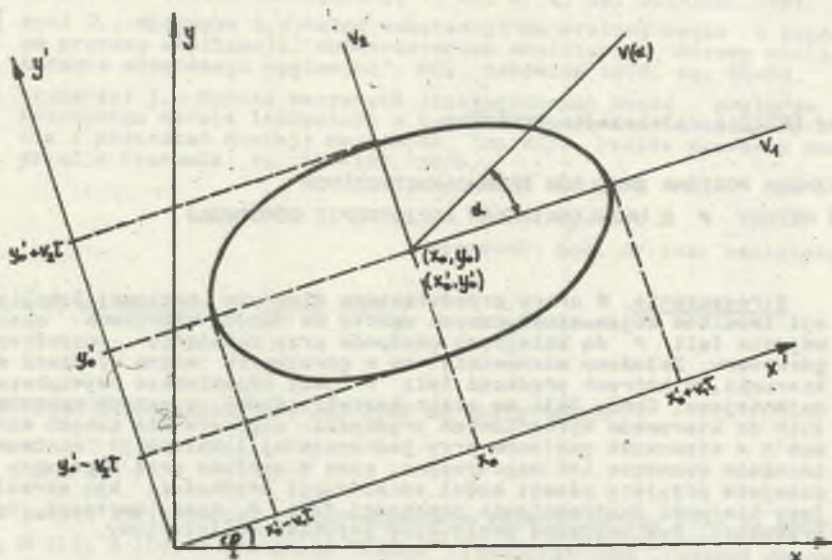
1. Wstęp

Badając emisję akustyczną z zagrożonego tępaniami rejonu eksploatacyjnego (najczęściej z rejonu jednej ściany), zakłada się wokół tego rejonu sieć stanowisk geofonów i dokonuje rejestracji liczby i amplitudy powstających w górotworze impulsów oraz w przypadku gdy chcemy lokalizować powstające pęknięcia, czasów wejścia fali wąpęnej do kolejnych stanowisk.

Nie zawsze zbudowana sieć stanowisk jest wyraźnie przestrzenna. Często zdarza się, że ze względów górniczych nie można istotnie zróżnicować położenia geofonów w płaszczyźnie pionowej. Nie ma wtedy potrzeby ani sensu wyznaczanie składowej pionowej powstających impulsów i użyteczne oraz wystarczająco dokładne stają się płaskie metody lokalizacji. Niniejsza praca stanowi uogólnienie na ośrodek anizotropowy opisanej w pracy [1] metody lokalizacji impulsów sejsmoakustycznych.

2. Przyjęty model rozchodzenia się fal sejsmicznych w górotworze i niektóre zależności

Zakładamy, że istnieją w górotworze dwa wyróżnione prostopadłe kierunki, w których prędkość fal podłużnych jest odpowiednio największa i najmniejsza. Niech prędkości te wynoszą v_1 i v_2 oraz niech kierunek prędkości v_1 będzie równoległy do kierunku osi x' , a kierunek prędkości v_2 - równoległy do osi y' , gdzie osie x' i y' są osiami nowego układu współrzędnych, obróconego względem przyjętego układu (x, y) o kąt φ (rys. 1).



Rys. 1. Przyjęty model rozchodzenia się fali P w górotworze

Zakładamy następnie, że czoło fali zainicjowanej w jakimś punkcie (x'_0, y'_0) ma stałe kształt elipsy, której osie są równoległe do kierunków wyróżnionych prędkości.

Równania czoła fali po upływie czasu \bar{t} od momentu zainicjowania będzie następujące:

$$\frac{(x' - x'_0)^2}{v_1^2 \bar{t}^2} + \frac{(y' - y'_0)^2}{v_2^2 \bar{t}^2} = \bar{t}^2, \quad (1)$$

gdzie wielkości x', y', x'_0, y'_0 można przeliczyć na analogiczne wielkości w układzie współrzędnych (x, y) , zgodnie ze wzorami transformacyjnymi:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (2)$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Równanie rodziny promieni sejsmicznych wychodzących z punktu (x'_0, y'_0) , prostopadłych do elipsy (1), można przedstawić wzorem:

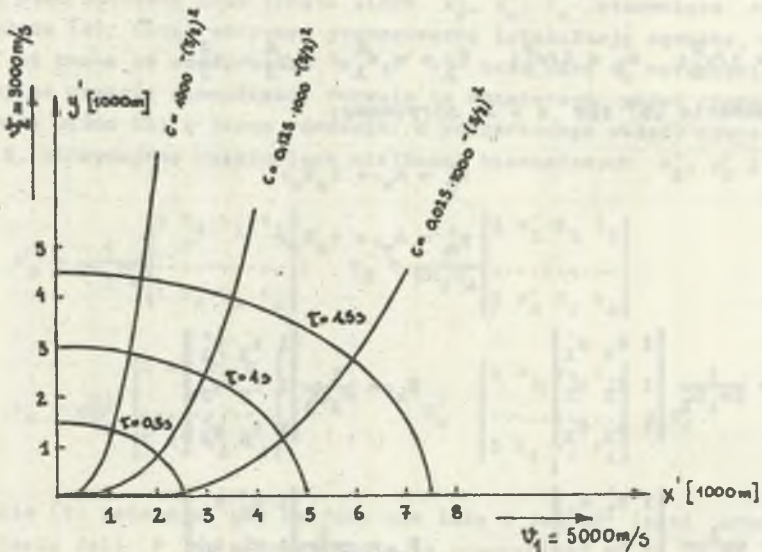
$$y' = y'_0 + c |x' - x'_0| \frac{(v_1/v_2)^2}{c}. \quad (3)$$

gdzie:

c - stała.

Krzywe opisane wzorem (3) są krzywymi najkrótszego przebiegu.

Przykład elips (1) i krzywych najkrótszego przebiegu (3) pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Promienie sejsmiczne fali podłużnej dla przyjętego modelu górotworu wykreślone według równania (3)

3. Lokalizacja ogniska jednego impulsu - prędkości fal podłużnych znane

Przez założenie o znanej prędkości fal rozumiemy, że znane są wszystkie trzy elementy opisujące prędkość, tj. wielkości v_1 , v_2 i γ . Zakładamy również, że znane są czasy t_j wstąpienia fali podłużnej na co najmniej trzy geofony. Założenia te pozwalają sporządzić układ równań:

$$\frac{(x'_j - x'_0)^2}{v_1^2} + \frac{(y'_j - y'_0)^2}{v_2^2} = (t_j - t_0)^2 \quad j = 1, 2, \dots, e, \quad (4)$$

gdzie:

- e - liczba stanowisk,
- x'_j, y'_j, x_j, y_j - współrzędne j -tego stanowiska w nowym i starym układzie współrzędnych,
- x'_0, y'_0 - nieznanne współrzędne ogniska wstrząsu,
- t_0 - nieznanny moment wstrząsu (czas w ognisku).

W celu wyeliminowania niewiadomych x'_0 i y'_0 w kwadracie równania (4) odejmujemy kolejno stronami, doprowadzając je do układu:

$$2w_1x'_0(x'_{j+1}-x'_j) + 2w_2y'_0(y'_{j+1}-y'_j) - 2t_0(t_{j+1}-t_j) = E_{j+1}-E_j \quad j=1,2,\dots,s-1. \quad (5)$$

gdzie:

$$w_1 = 1/v_1^2; \quad w_2 = 1/v_2^2; \quad E_j = w_1x_j^2 + w_2y_j^2 - t_j^2.$$

Z równania (5) dla $s = 3$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} x'_0 &= A_{x'} + t_0 B_{x'}, \\ y'_0 &= A_{y'} + t_0 B_{y'}, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$A_{x'} = \frac{1}{2w_1 D_3} \begin{vmatrix} 1 & E_1 & y'_1 \\ 1 & E_2 & y'_2 \\ 1 & E_3 & y'_3 \end{vmatrix}; \quad B_{x'} = \frac{1}{w_1 D_3} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & y'_1 \\ 1 & t_2 & y'_2 \\ 1 & t_3 & y'_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{y'} = \frac{1}{2w_2 D_3} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & E_1 \\ 1 & x'_2 & E_2 \\ 1 & x'_3 & E_3 \end{vmatrix}; \quad B_{y'} = \frac{1}{w_2 D_3} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & t_1 \\ 1 & x'_2 & t_2 \\ 1 & x'_3 & t_3 \end{vmatrix}$$

$$D'_3 = \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 \\ 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_2 & y_3 \end{vmatrix} = D_3$$

Równość $D'_3 = D_3$ oznacza, że wyznacznik ten jest niezmiennikiem obrotu układu współrzędnych. Rozwiązanie (6) istnieje, gdy wyznacznik $D_3 \neq 0$, tzn. gdy stanowiska geofonów nie leżą w jednej linii.

W celu wyznaczenia niewiadomej t_0 wstawiamy wzory (6), np. do jednego z równań (4), otrzymując po przekształceniach:

$$t_0 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (7)$$

gdzie:

$$A = w_1 B_{x'}^2 + w_2 B_{y'}^2 - 1$$

$$B = w_1 B_{x'} C_{x'} + w_2 B_{y'} C_{y'} + t_j$$

$$C = w_1 C_x^2 + w_2 C_y^2 - t_j^2$$

$$C_x = A_x - x'_j, \quad C_y = A_y - y'_j$$

Wzory (6) z uwzględnieniem (7) stanowią rozwiązanie układu równań (4). Widzimy jednak, że jest to rozwiązanie niejednoznaczne (znak \pm we wzorze 7). Będą więc istniały dwie trójki liczb x'_0, y'_0, t_0 stanowiące rozwiązanie układu (4). Chcąc otrzymać jednoznaczne lokalizację ogniska, musimy założyć, że znane są współrzędne x'_4 i y'_4 oraz czas t_4 wstąpienia fali podłużnej na czwarte stanowisko. Pozwala to rozszerzyć układ równań (4), a następnie układ (5) o jedno równanie. Z poszerzonego układu równań (5), $j = 1, 2, 3$, otrzymujemy następujące wielkości niewiadomych x'_0, y'_0 i t_0 :

$$x'_0 = \frac{1}{2w_1 D'_4} \begin{vmatrix} 1 & E_1 & y'_1 & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & E_4 & y'_4 & t_4 \end{vmatrix}; \quad y'_0 = \frac{1}{2w_2 D'_4} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & E_1 & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_4 & E_4 & t_4 \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$t_0 = \frac{-1}{2D'_4} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 & E_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_4 & y'_4 & E_4 \end{vmatrix} \quad D'_4 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & t_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_4 & y_4 & t_4 \end{vmatrix} = D_4$$

Rozwiązanie (8) istnieje, gdy geofony nie leżą w jednej linii oraz gdy czasy wejścia fali P do stanowisk nie są identyczne.

4. Lokalizacja ogniska jednego impulsu - prędkość fal podłużnych nieznaną

W tym przypadku mamy 6 niewiadomych: x'_0 i y'_0 (lub: x_0 i y_0) oraz t_0, φ, v_1 i v_2 . Chcąc jednoznacznie zlokalizować ognisko impulsu i wyznaczyć wszystkie niewiadome, musimy dysponować danymi z 7 stanowisk geofonów. Po poszerzeniu układu (5) z pierwszych pięciu równań otrzymujemy:

$$w_1 = w_1(\varphi) = \frac{1}{\sin^2} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 & t_1 & t_1^2 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_6 & y'_6 & t_6 & t_6^2 & y_6^2 \end{vmatrix}$$

$$w_2 = w_2(\varphi) = \frac{1}{\cos^2} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 & t_1 & x_1^2 & t_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_6 & y'_6 & t_6 & x_6^2 & t_6^2 \end{vmatrix}$$

$$x'_0 \cdot w_1 = x'_0(\varphi) \cdot w_1(\varphi) = \frac{-1}{Q} \begin{vmatrix} 1 & t_1^2 & y_1' & t_1 & x_1'^2 & y_1'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_6^2 & y_6' & t_6 & x_6'^2 & y_6'^2 \end{vmatrix}$$

$$y'_0 \cdot w_2 = y'_0(\varphi) \cdot w_2(\varphi) = \frac{-1}{Q} \begin{vmatrix} 1 & x_1' & t_1^2 & t_1 & x_1'^2 & y_1'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6' & t_6^2 & t_6 & x_6'^2 & y_6'^2 \end{vmatrix}$$

(9)

$$t_0 = t_0(\varphi) = \frac{1}{Q} \begin{vmatrix} 1 & x_1' & y_1' & t_1^2 & x_1'^2 & y_1'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6' & y_6' & t_6^2 & x_6'^2 & y_6'^2 \end{vmatrix}$$

$$Q = Q(\varphi) = 2 \begin{vmatrix} 1 & x_1' & y_1' & t_1 & x_1'^2 & y_1'^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6' & y_6' & t_6 & x_6'^2 & y_6'^2 \end{vmatrix}$$

Po wstawieniu wzorów (9) do szóstego z równań (5) otrzymujemy równanie, z którego można wyznaczyć φ :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_7 & t_7^2 & x_7 & y_7 & x_7^2 & y_7^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 & x_1 y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_7 & t_7^2 & x_7 & y_7 & x_7^2 + y_7^2 & x_7 y_7 \end{vmatrix}} \quad (10)$$

Wzory (9) z uwzględnieniem (10) zapewniają jednoznaczne lokalizację impulsu z jednoczesnym wyznaczeniem wszystkich niewiadomych parametrów.

5. Jednoczesna lokalizacja dowolnej liczby impulsów - prędkość fal podłużnych niezna

Wyznaczanie parametrów v_1 , v_2 i φ charakteryzujących prędkość fal podłużnych na podstawie danych dotyczących jednego impulsu może być zawadne z uwagi na nierregularności zjawiska przebiegu fal w górotworze, jak i nieuniknione błędy odczytu czasów wstąpienia. Chcąc otrzymać wielkości

v_1, v_2 i φ bardziej niarodajne dla danego rejonu górniczego, należy je wyznaczyć na podstawie większej liczby impulsów. Dla tego celu opracowano algorytm obliczeniowy i program dla maszyny cyfrowej.

Tablica 1

Wymagana liczba impulsów w dla zadanej liczby stanowisk $s > 4$ oraz liczby stopni swobody l_{ss} :

$$w = \frac{l_{ss} + 4}{s - 3}$$

Liczba stopni swobody	Liczba stanowisk					
	4	5	6	7	8	9
0	4	2	2	1	1	1
1	5	3	2	2	1	1
2	6	3	2	2	2	1
3	7	4	3	2	2	2
4	8	4	3	2	2	2
5	9	5	3	2	2	2
6	10	5	4	3	2	2
7	11	6	4	3	3	2
8	12	6	4	3	3	2
9	13	7	5	4	3	3

Załóżmy, że dysponujemy danymi odnośnie do impulsów, z których każdy został zarejestrowany na s stanowiskach. Warunki, jakim winny odpowiadać liczby s i w wyszczególnione są w tablicy 1. Niech (x'_j, y'_j) oznaczają współrzędne j -tego stanowiska, a t_{ij} - moment wstąpienia fali na j -te stanowisko i -tego impulsu. Niech będą dane również jakiegokolwiek wartości parametrów v_1, v_2 i φ . Wtedy lokalizacja i -tego impulsu wyznaczona na podstawie danych ze stanowisk o numerach j, l, m, n przy założonej wartości v_1, v_2 i φ będzie następująca:

$$x'_{oi} = \frac{1}{2w_1 D_{41}^{jlmn}} \begin{vmatrix} 1 & E_{1j} & Y'_1 & t_{1j} \\ 1 & E_{1l} & Y'_1 & t_{1l} \\ 1 & E_{1m} & Y'_m & t_{1m} \\ 1 & E_{1n} & Y'_n & t_{1n} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$y'_{oi} = \frac{1}{2w_2 D_{41}^{jlmn}} \begin{vmatrix} 1 & x'_j & E_{1j} & t_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_n & E_{1n} & t_{1n} \end{vmatrix}$$

$$t_{oi}^{jlmn}(v_1, v_2, \varphi) = \frac{1}{2D_{41}^{jlmn}} \begin{bmatrix} 1 & x'_j & y'_j & \epsilon_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x'_n & y'_n & \epsilon_{1n} \end{bmatrix},$$

$$D_{41}^{jlmn} = \begin{bmatrix} 1 & x_j & y_j & t_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & t_{1n} \end{bmatrix},$$

gdzie:

j, l, m, n - parami różne.

Miarę błędu lokalizacji opisaną wzorami (11) w odniesieniu do q -tego stanowiska będzie:

$$B_{iq}^{jlmn}(v_1, v_2, \varphi) = \sqrt{w_1(x_q - x_{oi}^{jlmn})^2 + w_2(y_q - y_{oi}^{jlmn})^2 - t_{iq} + t_{oi}^{jlmn}} \quad (12)$$

Suma czasów przedstawiona wzorem (12) teoretycznie powinna być oczywiście zerem.

Utwórzmy teraz funkcję, która będzie sumą kwadratów błędów lokalizacji po wszystkich stanowiskach, wszystkich kombinacjach czwórkowych stanowisk i wszystkich impulsach:

$$B(v_1, v_2, \varphi) = \sum_{i=1}^W \sum_{j < l < m < n} \sum_{q=1}^S [B_{iq}^{jlmn}(v_1, v_2, \varphi)]^2. \quad (13)$$

Funkcja (13) może stanowić podstawę do wyznaczenia współrzędnych ognisk wszystkich impulsów. Wyznaczając minimum funkcji (13) ze względu na parametry v_1, v_2 i φ możemy, przy dostatecznej liczbie danych, otrzymać reprezentatywne wielkości tych parametrów dla rejonu, z którego pochodzą impulsy. Jeśli chodzi o współrzędne ognisk i czasy w ognisku, to we wspomnianym już programie dla maszyny cyfrowej przyjmuje się je jako średnie arytmetyczne lub ważone z wyników otrzymywanych dla poszczególnych kombinacji czwórkowych stanowisk przy wartościach v_1, v_2 i φ minimalizujących sumę kwadratów błędów (13).

6. Przykład obliczeniowy

W oparciu o zaprezentowany algorytm opracowano program dla maszyny cyfrowej i przeprowadzono obliczenia lokalizacji ognisk impulsów sejsmooakustycznych według danych z rejestracji kopalnianej. Dane współrzędne stanowisk oraz różnice czasów wejścia fali P zamieszczono w tabelicy 2, natomiast tabela 3 zawiera wyniki obliczeń. W tabelicy 3 w wierszach ozna-

Tablica 2

Dane współrzędne stanowisk geofonów
oraz różnice czasów wejścia fali P

Nr geofonu	Współrzędne stanowiska [m]			
	X	Y		
1	0.0	0		
2	- .27	69.74		
3	-58.14	-45.72		
4	67.09	-6.78		

Nr impulsu	Różnice czasów dojścia fali do stanowisk [s]			
	1	2	3	4
1	.0	.004022	.006965	.016775
2	.0	.010595	.013734	.004316
3	.0	.01019	.008292	.013287
4	.0	.01487	.001697	.011876
5	.0	.01345	.016318	.014242
6	.0	.008526	.014343	.010231
7	.0	.009325	.019146	.005754
8	.0	.004714	.004419	.015319
9	.0	.016682	.011916	.011817
10	.0	.019621	.011753	.013346
11	.003057	.0	.001085	.014889
12	.002569	.009979	.0	.014425
13	.002569	.009979	.0	.015018
14	.0	.004063	.002081	.010901
15	.003693	.008283	.015768	.0
16	.003693	.008683	.015768	.0

Tabela 3

Wyniki obliczeń

a - według opisanego w niniejszej pracy algorytmu
 b - według algorytmu Salasone-Wiebolse [2]

Nr impulsu	Wersja	Współrzędne ogniska [m]		Standardowy błąd odległościowy [m]
		X	Y	
1	a	-49	22	22 - 28
	b	-36	19	
2	a	25	8	3 - 4
	b	iteracja rozbieżna		
3	a	-23	5	3 - 4
	b	-18	3	
4	a	-26	-22	6 - 8
	b	-18	-30	
5	a	1	12	9 - 11
	b	1	4	
6	a	7	19	5 - 6
	b	16	6	
7	a	34	25	20 - 25
	b	iteracja rozbieżna		
8	a	-52	17	16 - 20
	b	-46	15	
9	a	0	-9	4 - 6
	b	3	-18	
10	a	-3	-18	12 - 15
	b	iteracja rozbieżna		
11	a	-134	43	● 4 - 5
	b	-98	58	
12	a	-61	-8	2 - 3
	b	-47	-4	
13	a	-62	-6	2 - 3
	b	-49	-3	
14	a	-49	11	10 - 12
	b	-39	15	

cd. tablicy 3

Nr impulsu	Wersja	Współrzędne ogniska [m]		Standardowy błąd odległościowy [m]
		X	Y	
15	a	58	21	6 - 8
	b	39	12	
16	a	57	19	6 - 7
	b	37	11	

Średni błąd odległościowy 10-12 m

 $v_1 = 5750 \text{ m/s}$; $v_2 = 4590 \text{ m/s}$; $\psi = 110^\circ 12'$.

czonych literą "b" zamieszczono wyniki lokalizacji dla danego impulsu otrzymane według algorytmu Salamona-Wieboła [2]. W algorytmie tym zakłada się, że górotwór jest izotropowy oraz że znana jest średnia wartość prędkości fali P dla danego rejonu.

Podziękowanie

Autorzy wyrażają podziękowanie mgr inż. J. Kornowskiemu i mgr inż. M. Trombikowi z Głównego Instytutu Górniczego oraz doc. dr inż. W. Zuberkiowi z Uniwersytetu Śląskiego za udostępnienie danych do praktycznego testu obliczeniowego oraz wyników obliczeń według algorytmu Salamona-Wieboła.

LITERATURA

- [1] Drzęzła B., Mendecki A.: Algorytm lokalizacji impulsów sejsmoelektrycznych według metody P. Acta Montana, Hornický Ústav CSAV, no. 50, Praha 1979.
- [2] Salamon M.G., Wieboła G.A.: Digital location of seismic events by an underground network of seismometers using the arrival times of compressional waves. Rock Mechanics, no. 6, 1974.

Recenzent: Doc. dr inż. Wacław ZUBEREK

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1982 r.

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ПО МЕТОДУ P С УЧЁТОМ АНИЗОТРОПИИ ГОРНОЙ ПОРОДЫ

Резюме

В работе представлено алгоритм горизонтальной локализации сейсмоакустических импульсов основанный на разнице времени прохода волны P к очередным геофонам с учётом анизотропии горной породы. Принято, что в породе можно отличить направление минимальной и направление максимальной скорости волны P. Лоб волны имеет форму эллипса. Оси эллипса параллельны указанным направлениям скоростей. Алгоритм использующий не менее четырёх геофонов с одновременной регистрацией не менее четырёх импульсов определяет их координаты, время в фокусе а также параметры описывающие приняту плоскую модель анизотропии скоростей: угол определяющий направления экстремальных скоростей волны P и значения этих скоростей. Приведено практический пример расчётов.

HORIZONTAL LOCALIZATION OF SEISMO-ACOUSTIC IMPULSES USING P METHOD INCLUDING ROCK MASS ANISOTROPY

Summary

An algorithm for horizontal localization of seismic-acoustic impulses using data about time differences of wave P entrance into consecutive geophones is presented. A rock mass anisotropy is assumed, namely two directions are distinguished in the rock mass: the first where P wave velocity is maximal and the second where it is minimal. The wave front is always of elliptical shape with axes parallel to the directions of the distinguished velocities. Using minimum data from four geophones and locating minimum of four impulses the algorithm assigns their coordinates, a time in the focus and parameters describing the planar model of the anisotropy: the extremal velocities angle and their values. A practical example is given.