

Władysław PASZEK

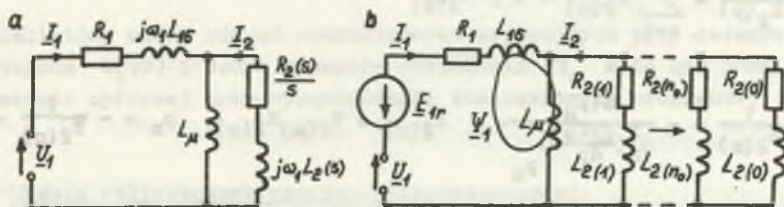
Andrzej KAPŁON

ANIZOTROPOWY MODEL WIELOWARSTWOWY ODTWARZAJĄCY STAN ELEKTRODYNAMICZNY
MASZYNY INDUKCYJNEJ Z KLATKĄ GŁĘBOKOŻŁOBKOWĄ W LITYM WIRNIKU

Streszczenie. Miedziana klatkę umieszczoną między litymi zębami wirnika głębokożłobkowego zastąpiono anizotropową wielowarstwową strukturą ciągłą. W wyniku rozwiązania dwuwymiarowego zagadnienia połowego otrzymano impedancję operatorową strony pierwotnej dla poszczególnych modeli obliczeniowych maszyny. Przez rozłożenie admittancji operatorowej w ciąg ułamków prostych uzyskano schemat zastępczy o stałych skupionych w postaci równoległe połączonych dwójników R, L. Ograniczając liczbę dwójników R, L otrzymano przybliżone schematy zastępcze, a na ich podstawie wyprowadzono równania różniczkowe zwyczajne opisujące stan elektromagnetyczny maszyny, które uzupełnione równaniem stanu elektromechanicznego opisują stan elektrodynamiczny maszyny indukcyjnej. Na wykresach pokazano poślizgowe charakterystyki ustalonej admittancji stojana oraz trajektorie punktu pracy w stanie nieustalonym maszyny po przyłączeniu silnika na znamionowe napięcie stojana.

1. Równania stanu elektromagnetycznego i elektrodynamicznego

Ocena wpływu litego żelaza wirnika, w którym umieszczone są pręty silnika głębokożłobkowego, na elektromagnetyczne stany nieustalone jest utrudniona ze względu na zjawisko wypierania prądu zarówno w prętach, jak i litym żelazie wirnika powodujące, że strona wtórna jest obiektem o parametrach rozłożonych. Zastąpienie równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych opisujących stan elektromagnetyczny nieustalony maszyny równaniami różniczkowymi zwyczajnymi ułatwia ich rozwiązanie i w konsekwencji prowadzi do zbudowania schematu zastępczego maszyny o parametrach skupionych (rys. 1a).



Rys. 1. Schemat zastępczy maszyny

Fig. 1. Equivalent circuit of the machine

Parametry te otrzymuje się z rozkładu pola elektromagnetycznego w stanach przejściowych w magnetycznie anizotropowym wirniku przy wymuszeniu okładem prądowym $a(x, t) = -2\sqrt{\frac{m_1}{2}} \cdot \frac{N}{p\tau} I_1(t) \sin(\bar{p}x)$ sinusoidalnie rozłożonego dwufazowego uzwojenia zastępczego stojana przewodzącego prąd $I_1(t)$ otrzymany z ortogonalnej transformacji dwuosiowej prądów fazowych stojana.

Równania stanu elektromagnetycznego przy nienasyconym obwodzie magnetycznym maszyny są liniowe i zapisane w postaci operatorowej. Strumień skojarzony zastępczego uzwojenia stojana $\Psi_{1\delta}(p)$ określa indukcyjność operatorową stojana $L_{1\delta}(p) = \Psi_{1\delta}(p)/I_1(p)$. W indukcyjności tej można wyodrębnić indukcyjność magnesującą L_μ oraz admitancję wirnika $\frac{1}{Z_2(p)}$.

$$\frac{1}{Z_2(p)} = p \frac{1}{L_{1\delta}(p)} - \frac{1}{pL_\mu} \quad (1)$$

$$L_{1\delta}(p) = \frac{N(p)}{M(p)}, \quad L_\mu = L_{1\delta}(p=0) = \frac{N(p=0)}{M(p=0)}.$$

Dla stanu ustalonego pracy przy sinusoidalnym, symetrycznym zasilaniu napięciem o pulsacji ω_1 otrzymuje się w schemacie zastępczym maszyny zależną od poślizgu impedancję wirnika (rys. 1a)

$$\frac{R_2(s)}{s} + j\omega_1 L_2(s) = \frac{Z_2(p=j s \omega_1)}{s}. \quad (2)$$

Indukcyjność operatorowa jest funkcją przestępną względem \sqrt{p} i posiada nieskończoną liczbę prostych, ujemnych miejsc zerowych p_n [1], które są biegunami admitancji operatorowej wirnika. W schemacie zastępczym przydatnym do opisu stanów nieustalonych otrzymuje się szukane parametry składowe $R_2(n)$, $L_2(n)$ poprzez rozkład na ułamki proste admitancji operatorowej wirnika:

$$\frac{1}{Z_2(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_2(n)} \frac{1}{1 + p T_2(n)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_2(n)} = -\frac{M(p_n)}{p_n^2 \left(\frac{dN(p)}{dp} \right)_{p_n}}, \quad L_2(n) = T_2(n) R_2(n), \quad p_n = -\frac{1}{T_2(n)}.$$

Stosunkowo dobrze zbieżnemu nieskończonemu szeregowi (3) odpowiada w dokładnym schemacie zastępczym wiązka nieskończenie wielu równolegle połączonych dwójników $R_2(n)$, $L_2(n)$. W przybliżonym schemacie zastępczym moż-

na szereg (3) urwać na n_0 -tym wyrazie i uzupełnić go dwójnikiem resztkowym $R_2(0)$, $L_2(0)$. Parametry dwójnika resztkowego wynikają z warunków jednakowej wypadkowej rezystancji R_2 dla prądu stałego i jednakowej zastępczej stałej czasowej T_{2e} wirnika dla rozwiązania dokładnego i przybliżonego [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{2e}}{R_2} = - \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{z_2(p)} \right)_{p=0} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{T_2(n)}{R_2(n)} \\ \frac{1}{R_2} = \frac{1}{z_2(p=0)} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{R_2(n)} \end{array} \right. \quad (4)$$

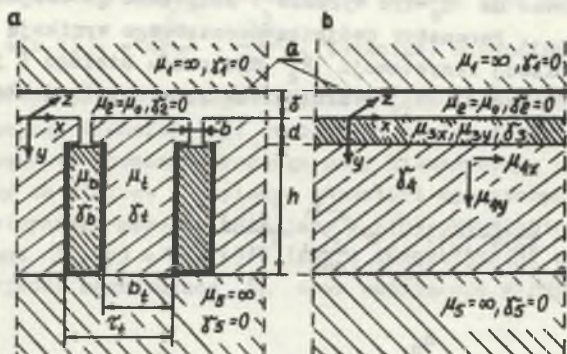
Z przybliżonego schematu zastępczego wynikają równania stanu elektromagnetycznego maszyny. Uzupełnione równaniem stanu elektromechanicznego opisują stan elektrodynamiczny maszyny. Przyjmując jako płaszczyznę odniesienia płaszczyznę liczb zespolonych wirująca ze stałą prędkością ω_1 stan elektrodynamiczny maszyny opisany jest za pomocą kanonicznych równań stanu [1, 2, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi_1}{dt} = U_1(0) - j\omega_1\Psi_1 - R_1 I_1 \\ \frac{d\Psi_2(i)}{dt} = -R_2(i)I_2(i) - j(\omega_1 - \omega)\Psi_2(i) \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\bar{P}}{J}(M_e - M_o(\omega)) \\ M_e = \bar{P} \operatorname{Re}(j\Psi_1 I_1), \quad [\Psi] = [L] [I] \end{array} \right. \quad i = 0, 1, \dots, n_0 \quad (5)$$

Ten nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych przy zadanym napięciu stojana $U_1(0)$ i danym momencie obciążenia M_o może być rozwiązany na maszynie cyfrowej przy wykorzystaniu standardowych programów.

2. Modele obliczeniowe maszyny głębokożłobkowej

Do rozważań przyjęto dwie wersje maszyny różniące się między sobą sposobem wykonania zęba wirnika. Sposób przekształcania wirnika głębokożłobkowego z prętami prostokątnymi w wirnik z przewodzącymi warstwami anizotropowymi pokazano na rys. 2 [2, 3].



Rys. 2. Zastąpienie wirnika głębokożłobkowego z prętami prostokątnymi (a) w wirnik z przewodzącą warstwą anizotropową (b)

Fig. 2. Substitution of the deep - slotted rotor with rectangular bars (fig. a) by the rotor with anisotropic conducting layer (fig. b)

Pole elektromagnetyczne wyznaczone jest w oparciu o model wielowarstwowy wirnika. Przy pominięciu efektów krawędziowych wirnika jest ono polem dwuwymiarowym. W przypadku maszyn wirujących o dużych średnicach wirnika model cylindryczny można bez większego błędu zastąpić modelem płaskim, co odpowiada analizie zjawisk w maszynach liniowych, a jednocześnie daje przejrzyste rozwiązanie analityczne. Parametry zastępcze warstw anizotropowych wirnika μ_{nx} , μ_{ny} , γ_{nz} wynikają z równoległego połączenia konduktancji pręta i zęba dla prądu płynącego w kierunku osi z , równoległego połączenia permeancji magnetycznych pręta i zęba dla strumienia indukcji magnetycznej w kierunku osi y oraz szeregowego połączenia tych permeancji w kierunku osi x .

$$\begin{cases} \gamma_{nz} = \frac{b_t}{\tau_t} \gamma_t + \frac{\tau_t - b_t}{\tau_t} \gamma_b \\ \mu_{nx} = \frac{\tau_t}{\frac{b_t}{\mu_t} + \frac{\tau_t - b_t}{\mu_b}}, \quad \mu_{ny} = \frac{b_t}{\tau_t} (\mu_t - \mu_b) + \mu_b \end{cases} \quad (6)$$

3. Wyznaczenie parametrów schematu zastępczego

Rozkład pola elektromagnetycznego w poszczególnych warstwach, przy pominięciu prądów przesunięcia, opisują równania Maxwella w postaci operatorowej:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(p) &= \mathbf{J}(p), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(p) = -p\mathbf{B}(p), \quad \mathbf{J}(p) = \nabla \mathbf{E}(p) \\ \mathbf{B}(p) &= \operatorname{rot} \mathbf{A}(p), \quad \operatorname{div} \mathbf{A}(p) = 0, \quad \mathbf{A}(p) = \vec{n}_z A(x, y, p). \end{aligned} \quad (7)$$

Rozwiązanie ogólne na potencjał wektorowy w dowolnej warstwie

$$A_n(x, y, p) = [C_{1n}(p)\exp(-\varepsilon_n y) + C_{2n}(p)\exp(\varepsilon_n y)] \operatorname{Re} \left[\exp(-j \frac{\pi}{\tau} x) \right] \quad (8a)$$

przy czym obowiązują:

$$\text{dla szczeliny powietrznej: } \varepsilon_2^2 = \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2,$$

$$\text{dla warstw anizotropowych: } \varepsilon_n^2 = \frac{\mu_{nx}}{\mu_{ny}} \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 + \nabla_{nz}^2 \mu_{nx} p,$$

oraz

$$\begin{cases} H_{2x}(x, y, p) = \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial y} \\ H_{2y}(x, y, p) = -\frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x} \end{cases} \quad \text{- dla szczeliny powietrznej} \quad (8b)$$

$$\begin{cases} H_{nx}(x, y, p) = \frac{1}{\mu_{nx}} \cdot \frac{\partial A_n}{\partial y} \\ H_{ny}(x, y, p) = -\frac{1}{\mu_{ny}} \cdot \frac{\partial A_n}{\partial x} \end{cases} \quad \text{- dla dowolnej warstwy anizotropowej} \quad (8c)$$

$$[B_{nx}, B_{ny}]^T = \operatorname{diag}[\mu_{nx}, \mu_{ny}] [H_{nx}, H_{ny}]^T. \quad (8d)$$

Stałe całkowania w równaniach (7), (8) wynikają z warunków na granicach oddzielających poszczególne warstwy:

$$\begin{cases} A_n(p) = A_{n+1}(p) \\ \vec{n}_y \frac{1}{\mu_{(n+1)x}} \operatorname{rot}_x A_{n+1}(p) - \frac{1}{\mu_{nx}} \operatorname{rot}_x A_n(p) = \begin{cases} a(x, p) & \text{między stojanem} \\ & \text{a szczeliną} \\ 0 & \text{między pozostałymi} \\ & \text{warstwami.} \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

Uwzględniając w zależnościach (8) warunki (9) wyznaczamy strumień skoja-

$$\text{rzony uzwojenia zastępczego } \Psi_{1\delta}(p) = \sqrt{\frac{3}{2}} z_1 \xi_1 l_i \int_{-\tau/2}^{\tau/2} B_y(x, y = -\delta, p) dx,$$

a w konsekwencji indukcyjność operatową stojana dla wrotki maszyny z li-
tym żelazem wirnika (rys. 1):

$$L_{1\delta}(p) = \frac{C\mu_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_4}{\mu_{4x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_3 d) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) + \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \operatorname{sh}(\varepsilon_3 d) \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) \right] + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \operatorname{ch}(\varepsilon_3 d) \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_3 d) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) \right]}{\frac{\varepsilon_4}{\mu_{4x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_3 d) \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) + \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \operatorname{sh}(\varepsilon_3 d) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) \right] + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \operatorname{ch}(\varepsilon_3 d) \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_3 d) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) \right]} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \operatorname{ch}(\varepsilon_3 d) \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_3 d) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) \right]}{\frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \operatorname{ch}(\varepsilon_3 d) \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_3 d) \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) \right]} \quad (10)$$

gdzie:

$$C = 6 \frac{l_1 (z_1 \xi_1)^2}{\pi \tau}$$

Jeżeli pręty miedziane znajdują się w idealnym pakietowanym ferromagnetyku ($\mu_t = \infty$, $\gamma_t = 0$) równanie (10) sprowadza się do postaci:

$$L_{1\delta}(p) = \frac{C\mu_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_4}{\mu_{4x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta)}{\mu_{3x}} + \frac{\varepsilon_2 d}{\mu_2} \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta) \right] + \operatorname{ch}(\varepsilon_4 h) \frac{\varepsilon_2}{\mu_2 \mu_{3x}} \operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta)}{\frac{\varepsilon_4}{\mu_{4x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_4 h) \left[\frac{\operatorname{ch}(\varepsilon_2 \delta)}{\mu_{3x}} + \frac{\varepsilon_2 d}{\mu_2} \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta) \right] + \operatorname{ch}(\varepsilon_4 h) \frac{\varepsilon_2}{\mu_2 \mu_{3x}} \operatorname{sh}(\varepsilon_2 \delta)} \quad (11)$$

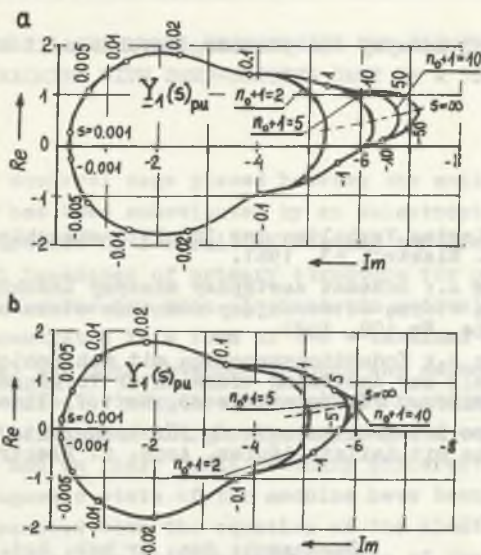
Wykorzystując w zależnościach (1), (2), (3) równania (10), (11), otrzymamy szukane parametry dwójników schematu zastępczego dla poszczególnych modeli obliczeniowych maszyny.

4. Modelowanie stanów przejściowych

Na rys. 3 przedstawiono poślizgowe charakterystyki admitancji stojana 8-biegunowej, trójfazowej, 6000 V, 400 kW maszyny indukcyjnej głębokożłobkowej z prostokątnymi prętami miedzianymi ($4 \times 53 \text{ mm}^2$, $l_1 = 35 \text{ cm}$, $\delta = 1,5 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ mm}$, $b = 2 \text{ mm}$, $\tau = 27,8 \text{ cm}$, $\tau_t = 2,53 \text{ cm}$, $\mu_b = \mu_0$, $\gamma_b = 57 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \text{ m}}$) umieszczonymi: a) w litych ($\mu_t = 100 \mu_0$, $\gamma_t = 4,6 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \text{ m}}$), b) w pakietowanych ($\mu_t = \infty$, $\gamma_t = 0$) zębach z główkami.

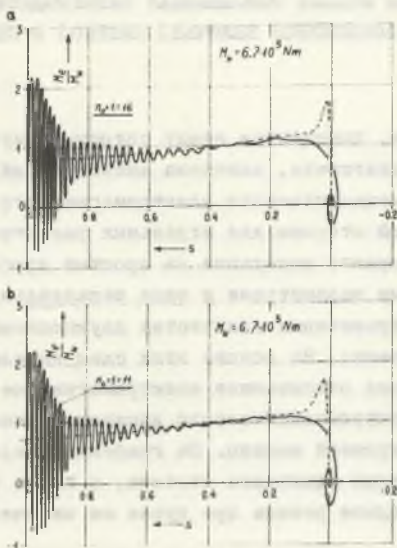
Lite żelazo zwiększa liczbę dwójników R, L uwzględnianych w schemacie zastępczym odwzorowującym stany przejściowe maszyny, gdyż szereg (3) jest słabiej zbieżny.

Rys. 4 przedstawia obliczone na maszynie cyfrowej trajektorie $M_s(s)$ rozruchu nieobciążonej maszyny ($J = 80 \text{ kgm}^2$) po przyłączeniu stojana na napięcie znamionowe. Na rysunku tym zamieszczono również mechaniczne cha-



Rys. 3. Poślizgowe charakterystyki admitancji stojana dla maszyny (a) z litym, b) z pakietowanym żelazem wirnika

Fig. 3. Slip dependent stator admittance characteristics for the machine with a) - solid iron rotor, b) - the sheet packed one



Rys. 4. Trajektorie $M_0(s)$ przy rozruchu nieobciążonego silnika a) z litym, b) z pakietowanym żelazem wirnika

Fig. 4. Trajectories $M_0(s)$ at the run up of the unloaded motor with a) - solid iron motor, b) with the sheet packed one

rakterystyki tej samej maszyny dla poszczególnych modeli obliczeniowych (linia przerywana).

LITERATURA

- [1] Paszek W.: Transientes Verhalten der Induktionsmaschine mit Hochstabläufer. Arch. f. Elektr., 63, 1981.
- [2] Paszek W., Kapłon A.: Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej z dwuwarstwową częścią wtórną odtwarzający równania stanu elektrodynamicznego. ZN WSI Opole, Nr 109, 1985.
- [3] Paszek W., Kapłon A.: Induktionsmaschine mit mehrschichtiger Läuferstruktur als Modell zur Abbildung transients Vorgänge. 31. Internationales Wiss. Kolloq., Vortragsreihe A3, Heft 1, Ilmenau, 1986.
- [4] Paszek W., Pawelec Z.: Ersatzschaltung für transiente Vorgänge der Induktionsmaschine mit Keilstabläufer. Arch. f. Elektr., 67, 1984.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Ernest Mendrela

Wpłynęło do redakcji dnia 15 czerwca 1987 r.

АНИЗОТРОПНАЯ МНОГОСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ОПИСЫВАЮЩАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ С ГЛУБОКОПАЗНОЙ БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКОЙ В СПЛОШНОМ РОТОРЕ

Резюме

Медная беличья клетка, помещенная между сплошными зубцами ротора глубокопазного асинхронного двигателя, заменена анизотропной многослойной структурной. В результате решения плоского электромагнитного поля получен операторный импеданс первичной стороны для отдельных расчётных моделей машины. Путём разложения операторного импеданса на простые дроби получена схема замещения со средоточенными параметрами в виде параллельно соединённых R , L двухполюсников. Путём ограничения количества двухполюсников R , L получены приближенные схемы замещения. На основе этих схем выведены обыкновенные дифференциальные уравнения описывающие электромагнитное состояние машины, которые с уравнением электромеханического движения описывают электродинамическое состояние асинхронной машины. На графиках представлены зависимые от скользя характеристики адмитанса статора, а также траектория рабочей точки двигателя в переходном режиме при пуске по включению на номинальные напряжение.

ANISOTROPIC MULTILAYER MODEL REPRODUCING THE ELECTRODYNAMIC STATE
OF INDUCTION MACHINE WITH DEEP-SLOTTED CAGE IN A SOLID IRON ROTOR CORE

S u m m a r y

The copper squirrel cage placed between the solid teeth of the deep-slotted rotor has been substituted by an anisotropic multilayer continuous secondary structure. As a result of solving two-dimensional field problem an operational impedance of primary structure for particular calculation models of the machine has been obtained. An equivalent diagram of the constants concentrated in a form of two-terminal networks R, L connected in parallel has been obtained through the expansion of the operational admittance into the sequence of partial fractions. Limiting the number of two-terminal networks R, L the approximate equivalent diagrams have been obtained and on their basis ordinary differential equations describing electromagnetic state of the machine have been derived; these equations - supplemented with the equation of the electromechanical state equation - describe the electrodynamic state of the induction machine. Slip dependent characteristics of the stator stationary admittance and working point trajectories at the machine run up after switching on the stator rated voltage have been shown on diagrams.