

Zbigniew PAWELEC

**WPLYW PRĄDÓW UPŁYWU DO PAKIETU BLACH WIRNIKA NA PARAMETRY MODELU  
MATEMATYCZNEGO SILNIKA INDUKCYJNEGO**

**Streszczenie.** Przy założeniu skończonej wartości rezystancji pakietu blach obwodu magnetycznego wirnika sformułowano układ niejednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu opisujących rozkład gęstości prądów upływu pomiędzy prętami klatki wirnika silnika indukcyjnego głębokożłobkowego. W analizie uwzględniono jednocześnie zjawisko wypierania prądu wzdłuż wysokości poszczególnych prętów klatki. Po dokonaniu transformacji tych równań wraz z warunkami brzegowymi na krańcach pakietu blach do układu współrzędnych kompleksorowych znaleziono ich rozwiązania operatorowe obowiązujące dla stałej prędkości wirowania wirnika. Rozwiązania te dla wektorów przestrzennych poszczególnych harmonicznych pola magnetycznego w szczelinie posłużyły do sformułowania równań napięciowych obwodów stojana i wirnika. Podano przykłady rozkładu gęstości prądów upływu w pakiecie blach podczas pracy silnika o stanie ustalonym z różnymi poślizgami. Przedstawiono wykresy poślizgowych charakterystyk admittancji stojana dla różnych wartości rezystywności pakietu blach wirnika. Zaproponowano modyfikację tradycyjnego modelu matematycznego silnika pozwalającą na przybliżoną analizę stanów niestabilnych przy uwzględnieniu prądów upływu wirnika.

**1. Wstęp**

Przeprowadzając analizę stanów niestabilnych silników asynchronicznych klatkowych korzysta się z modelu matematycznego wyprowadzonego przy założeniu, że rezystywność blach wirnika jest nieskończenie wielka. W rzeczywistości ma ona wartość skończoną, w wyniku czego pomiędzy nieizolowanymi prętami klatki, poprzez pakiet blach wirnika przepływają prądy o nierównomiernym rozkładzie gęstości. Zjawisko to można określić jako wypieranie prądu w żelazie wirnika wzdłuż osi maszyny. W odróżnieniu od wypierania prądu w żłobkach wirnika związanego tylko z polem rozproszenia żłobkowego, jest ono uzależnione także od rozkładu pola magnetycznego szczeliny powietrznej. Analizę tego zjawiska utrudnia skomplikowany rozkład przestrzenny gęstości prądów upływu, jak również fakt, że rezystancja styku pomiędzy prętami a żelazem wirnika jest zależna od wielu czynników: technologii i dokładności wykonania, czasu eksploatacji maszyny i innych.

W literaturze rozkład prądów upływu w pakiecie blach wirnika jest jak dotąd analizowany jedynie w stanach ustalonych, przy zasilaniu uzwojeń stojana symetrycznymi napięciami sinusoidalnymi [3, 4, 5]. Na podstawie analizy przestrzennego rozkładu gęstości prądów upływu pomiędzy prętami

wirnika bez skosu oraz przebiegu poślizgowych charakterystyk admitancji stojana można sformułować przybliżony model matematycznego silnika indukcyjnego, oddający charakter fizyczny wypierania prądów upływu do krańców pakietu blach i dający się w prosty sposób zastosować również do analizy stanów nieustalonych.

## 2. Równania różniczkowe rozkładu prądu wewnątrz pakietu blach wirnika

Na rys. 1a przedstawiono fragment obwodu elektromagnetycznego wirnika. Część czynna pakietu blach podzielono na elementarne odcinki o długości  $\Delta z$  i założono, że prądy upływu  $i_{qk}$  tych odcinków przepływają jedynie w kierunku prostopadłym do prętów. Każdej strudze prądu pomiędzy prętami, odpowiadającej wycinkowi maszyny o długości  $z$  przyporządkowuje się skupioną konduktancję  $G_q \cdot \Delta z$  ( $G_q$  - konduktancja przypadająca na jednostkę długości pręta); każdemu wycinkowi o długości  $\Delta z$  odpowiada elementarny obwód przedstawiony na rys. 1b. Prąd pręta  $i_{pk}(z)$  jest funkcją zmiennej  $z$  mierzonej od środka maszyny. Napięcie na elementarnym odcinku pręta umieszczonego w głębokim żłobku oznaczono przez  $\Delta U_{pk}(z)$ , a strumień skojarzony z elementarnym obwodem, a pochodzący od pola magnetycznego szczeliny powietrznej, przez  $\Delta \Psi_{gk}(z)$ . Indukcyjność  $L_{ln} \frac{\Delta z}{l_1}$  odpowiada konduktancji szczyrbiny żłobka przypadającej na odcinek  $\Delta z$ .

Przedstawione wyżej założenia można interpretować przyjmując, że maszyna na długości pakietu blach została podzielona na  $\frac{l_1}{\Delta z}$  maszyn elementarnych o długości  $\Delta z$ , dla których obowiązują znane równania i transformacje układów współrzędnych [1, 2, 6].

Dla pojedynczego obwodu z rys. 1b obowiązuje równanie napięć:

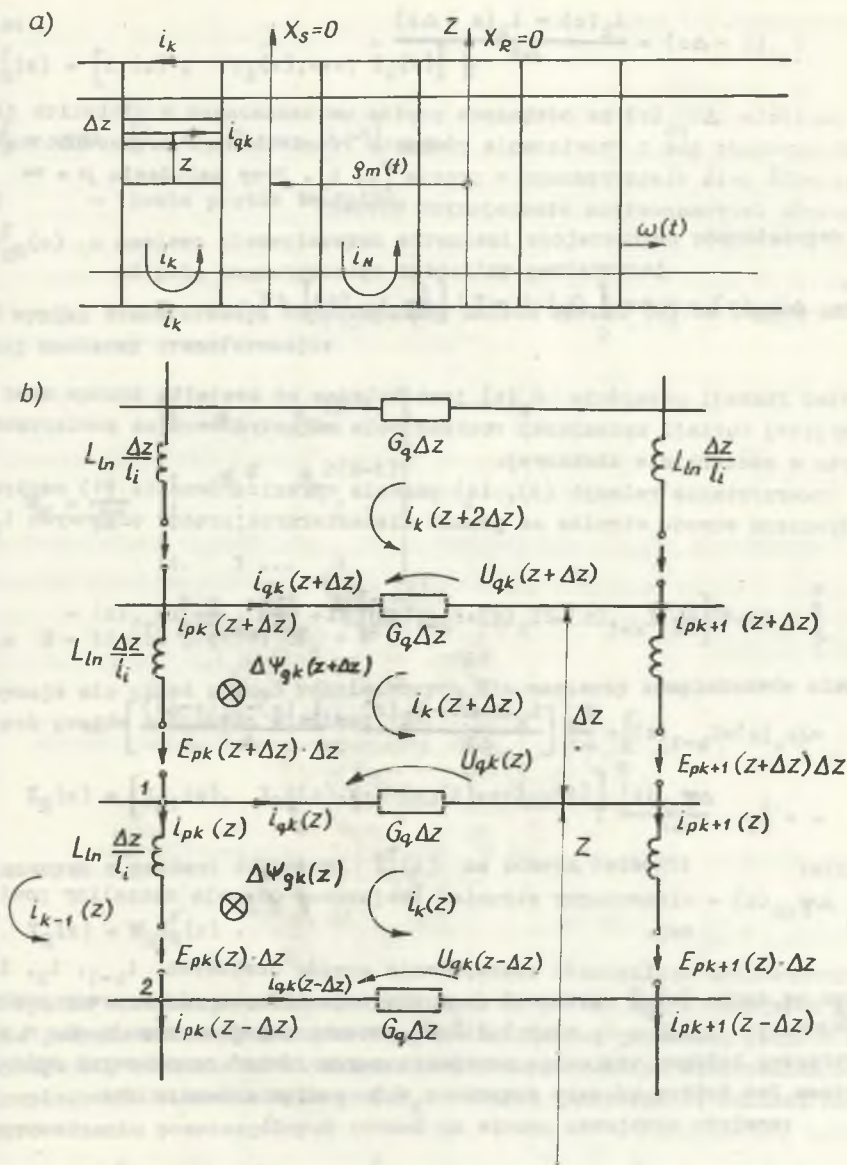
$$\begin{aligned} & \left[ \Delta U_{p(k+1)}(z) - \Delta U_{pk}(z) \right] \Delta z + L_{ln} \frac{\Delta z}{l_1} \cdot \frac{d}{dt} \left[ i_{p(k+1)}(z) - i_{pk}(z) \right] + \\ & + U_{qk}(z) - U_{qk}(z - \Delta z) = - \frac{d}{dt} \Delta \Psi_{qk}(z) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$U_{qk} = i_{qk}(z) R_q, \quad R_q = \frac{1}{G_q}. \quad (2)$$

Przez analogię do prądów oczkowych  $i_k$  klatki [6] wprowadza się elementarne prądy oczkowe  $i_k(z)$ , przy czym:

$$i_{qk}(z) = \frac{i_k(z + \Delta z) - i_k(z)}{\Delta z} \quad (3a)$$



Rys. 1. Podział pojedynczego obwodu wirnika na elementarne odcinki o długości  $\Delta z$

Fig. 1. Division of the individual rotor circuit into elementary sections of the length  $\Delta z$

$$i_{qk}(z - \Delta z) = \frac{i_k(z) - i_k(z - \Delta z)}{\Delta z}. \quad (3b)$$

Napięcia  $\Delta U_{pk}(z)$  na odcinkach prętów umieszczonych w głębokich żłobkach uzyskuje się z rozwiązania równania różniczkowego przewodnictwa dla nabeżenia pola elektrycznego w przecie [2, 6]. Przy założeniu  $\mu = \infty$  dla otazarów ferromagnetyka otaczających żłobek:

$$\Delta U_{pk}(z) = -\Delta z \int_0^t G_p(t - \tau) \left[ \frac{d}{d\tau} i_{pk}(z) \right] d\tau. \quad (4)$$

Postać funkcji przejścia  $G_p(t)$  jest zależna od kształtu żłobka oraz od przyjętej funkcji opisującej rozkład pola magnetycznego na powierzchni pręta w szczybinie żłobkowej.

Wykorzystanie relacji (3), (4) pozwala wyrazić równanie (1) napięcie pojedynczego obwodu wirnika za pomocą elementarnych prądów oczkowych  $i_k(z)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^t G_p(t - \tau) \left[ \frac{d}{d\tau} [i_{k+1}(z) - 2i_k(z) + i_{k-1}(z)] \right] d\tau + \frac{L_{1n}}{I_1} \cdot \frac{d}{dt} [i_{k+1}(z) - \\ & - 2i_k(z) + i_{k-1}(z)] + \frac{R_q}{\Delta z} \left[ \frac{i_k(z + \Delta z) - i_k(z)}{\Delta z} - \frac{i_k(z) - i_k(z - \Delta z)}{\Delta z} \right] = \\ & = - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\Delta \Psi_{sk}(z)}{\Delta z}, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$\Delta \Psi_{sk}(z)$  - elementarny strumień skojarzony od pola szczeliny powietrznej.

Wykorzystując cykliczność występowania prądów oczkowych  $i_{k-1}$ ,  $i_k$ ,  $i_{k+1}$  dla kolejnych  $k$  (od  $k=1$  do  $N$ ) oraz zważanie ilorazu różnicowego przy  $R_q$  do drugiej pochodnej podług zmiennej przestrzennej otrzymuje się w zapisie macierzowym układ wzajemnie powiązanych równań cząstkowych opisujących rozkład przestrzenny prądów  $i_k(z)$  wzdłuż osi wirnika:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{I}_R^+(z) &= \frac{1}{R_q} \left\{ \frac{d}{dt} \cdot \frac{L_{1n}}{I_1} \mathbf{B}_R^+ \mathbf{I}_R^+(z) + \int_0^t G_p(t - \tau) \left[ \frac{d}{d\tau} \mathbf{B}_R^+(z, \tau) \right] d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dz} \cdot \frac{d}{dz} \Psi_{RR}^c(z) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$\mathbf{I}_R^f(z) = [i_1(z), i_2(z), \dots, i_N(z)]^T$$

$$\mathbf{B}_R^f = \text{cykl } [2, -1, 0, \dots, 0, -1]_{N \times N}$$

$N$  - liczba prętów twornika,

$\Psi_{BR}^f(z)$  - macierz elementarnych strumieni skojarzonych pochodzących od pola magnetycznego szczeliny powietrznej.

W wyniku transformacji współrzędnych układu równań (6) za pomocą unitarnej macierzy transformacji:

$$\mathbf{W}_R = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_R & \alpha_R^{(N-1)} \\ 1 & \alpha_R^2 & \alpha_R^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie  $N$  - liczba prętów,  $\alpha_R = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ ,

otrzymuje się układ równań różniczkowych dla macierzy kompleksorów elementarnych prądów oczkowych wirnika:

$$\mathbf{I}_R(z) = [\mathbf{I}_{R1}(z), \mathbf{I}_{R2}(z), \dots, \mathbf{I}_{R\nu}(z), \dots, \mathbf{I}_{RN}(z)]^T$$

powiązanych z prądami oczkowymi  $\mathbf{I}_R^f(z)$  za pomocą relacji:

$$\mathbf{I}_R(z) = \mathbf{W}_R \mathbf{I}_R^f(z). \quad (7)$$

W wyniku eliminacji składowych zerowych macierzy  $\mathbf{I}_R(z)$  oraz po uwzględnieniu jedynie składowych rzędu  $\nu = 6k \pm 1$  (gdzie  $k = 0, 1, 2$  oraz  $\nu < \frac{N-1}{2}$ ) otrzymuje się równania różniczkowe cząstkowe opisujące rozkład przestrzenny kompleksorów elementarnych prądów oczkowych wirnika wzdłuż osi maszyny. Po sprowadzeniu poszczególnych równań na stronę uzwojenia stojana:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{I}_{R\nu} &= \frac{1}{R'_{q\nu}} \left\{ \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{L_i} L_{Rb\nu} \mathbf{I}_{R\nu}(z) + \right. \\ &+ \int_0^t G_{D\nu}(t-\tau) \left[ \frac{d}{d\tau} \mathbf{I}_{R\nu}(z, \tau) \right] d\tau + \frac{d}{dt} \mathbf{I}_v \mathbf{I}_s \end{aligned} \quad (8)$$

dla  $\nu = 1, 5, 7, \dots < \frac{N-1}{2}$ .

W równaniach (8) oznaczono:

$$R'_{qv} + k_q \mathcal{U}_v^2$$

$$G'_{pv} = G_p \mathcal{U}_v^2$$

$$\mathcal{U}_v = \sqrt{\frac{3}{n}} z_s \frac{k_{sv}}{k_{Rv}}$$

$$\underline{I}_v = 4 \cdot \frac{3}{2} z_s^2 \Lambda_{sv}^2 \Lambda_{vs} j \nu p_m(t) \quad \Lambda_{vs} = \frac{\mu_0 D l_1}{2 \pi \delta^2 p_b}$$

$z_s, k_{sv}, k_{Rv}$  - oznaczają liczbę zwojów stojana oraz współczynniki uzwojeń stojana i klatki wirnika [6],

$D, l_1, \delta$  - średnicę, długość pakietu blach i zastępczą szczelinę powietrzna maszyny.

Indukcyjność  $L'_{Rbv} = \mathcal{U}_v^2 \left[ \frac{\mu_0 \pi D l_1}{\delta^2 n} + 4 L_{ln} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \nu p_b \right) \right]$  zawiera parametry związane z polem szczeliny powietrznej oraz polem rozproszenia szczyrbin zębów wirnika. Ponadto w równaniu (8) dokonano sprowadzenia kompleksora prądu stojana:

$$\underline{I}_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_s \\ \alpha_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad \text{na płaszczyznę } \nu\text{-tego kompleksora}$$

prądu wirnika, gdzie  $\alpha_s = e^{j \frac{2\pi}{3}}$

$$\underline{I}_{sv} = \underline{I}_s e^{j \nu p_b \varphi_m(t)} \quad (9)$$

Umożliwia to uwolnienie się od okresowości współczynników tego równania i pozwala zastosować do jego rozwiązania rachunek operatorowy Laplace'a, Po dokonaniu transformacji Laplace'a otrzymuje się niejednorodne równanie cząstkowe drugiego rzędu opisujące rozkład przestrzenny kompleksora  $\underline{I}_{Rv}(z)$  wzdłuż osi maszyny:

$$\frac{d^2}{dz^2} \underline{I}_{Rv}(p, z) = A'_v(p) \underline{I}_{Rv}(p, z) + B'_v(p) \quad (10)$$

gdzie:

$$A'_v(p) = \frac{p L'_{Rbv} + Z'_{pv}(p) l_1}{R'_{qv} l_1}$$

$$\dot{B}'_{\nu}(p) = pL_{\nu} \frac{1}{R'_{q\nu} l_i} \dot{I}'_{S\nu}(p) ; \quad Z'_{p\nu}(p) = p \cdot G'_{p\nu}(p)$$

$Z'_{p\nu}$  - sprowadzona impedancja pręta dla  $\nu$ -tej harmonicznej.

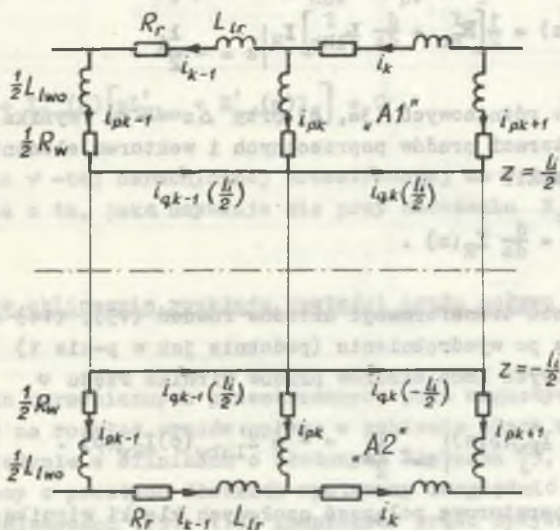
Równanie to przypomina równanie różniczkowe opisujące rozkład gęstości prądowej żłobka prostokątnego przy uwzględnieniu jednowymiarowego wypięrania prądu wzdłuż wysokości żłobka. Niejednorodność wynika z faktu, że w przeciwieństwie do żłobka, o rozkładzie prądu w blachach wirnika decyduje, oprócz pola magnetycznego rozproszenia żłobkowego, także pole magnetyczne szczeliny powietrznej.

Rozwiązaniem równania (10) jest funkcja:

$$\dot{I}'_{R\nu}(z) = -\frac{\dot{B}'_{\nu}(p)}{A_{\nu}(p)} + C_{1\nu} e^{z\sqrt{A_{\nu}(p)}} + C_{2\nu} e^{-z\sqrt{A_{\nu}(p)}} \quad (11)$$

3. Wyznaczenie stałych  $D_1$ ,  $C_2$  rozwiązania ogólnego z warunków brzegowych na krańcach pakietu blach wirnika

Na rys. 2 przedstawiono krańce pakietu blach z uwzględnieniem segmentów pierścieni zwierających klatki.



Rys. 2. Obwody krańcowe wirnika  
Fig. 2. Border circuits of the rotor

Dla konturu A1 przy  $z = \frac{l_1}{2}$  obowiązuje równanie:

$$i_{qk}(z = \frac{l_1}{2}) \cdot R_q - i_{pk+1}(\frac{1}{2} R_w + \frac{d}{dt} L_{1wo}) + i_k(R_r + \frac{d}{dt} L_{1r}) + i_{pk}(\frac{1}{2} R_w + \frac{d}{dt} L_{1wo}) = 0 \quad (12)$$

Po wyrażeniu prądów prętów przez prądy pierścieni zwierających  $i_k$  równania dla końców pakietu blach wirnika przyjmują postać:

$$R_q I_{Rq}(z) = - \frac{1}{2} [R_{Rc}^f + \frac{d}{dt} L_{1Rb}^f] I_R \Big|_{z = \frac{l_1}{2}} \quad (13)$$

gdzie:

$$I_{Rq}(z) = [i_{q1}(z), i_{q2}(z), \dots, i_{qN}(z)]^T_N$$

$$R_q = \text{diag} \{R_q, R_q, \dots, R_q\}_{N \times N}.$$

Macierze  $R_{Rc}^f$ ,  $L_{1Rb}^f$  są macierzami odpowiednio rezystancji oraz indukcyjności tych części klatki wirnika, które wystają poza pakiet blach.

Podobnie dla konturu A1 przy  $z = -\frac{l_1}{2}$ :

$$R_q I_{Rq}(z) = \frac{1}{2} [R_{Rc}^f + \frac{d}{dt} L_{1Rb}^f] I_R \Big|_{z = -\frac{l_1}{2}} \quad (14)$$

Z ilorazów różnicowych (3a, b) przy  $\Delta z \rightarrow dz$  wynika dodatkowy związek pomiędzy wektorami prądów poprzecznych i wektorem elementarnych prądów oczkowych klatki:

$$I_{Rq}(z) = \frac{d}{dz} I_R(z). \quad (15)$$

Po dokonaniu transformacji układów równań (13), (14) za pomocą macierzy  $W_R$  oraz po wyodrębnieniu (podobnie jak w p-cie 1) równań dla kolejnych, niezerowych kompleksorów prądów wirnika rzędu  $\nu$

$$R'_{q\nu} \frac{d}{dz} I_{R\nu}(p, z) \Big|_{z=\pm \frac{l_1}{2}} = \pm \frac{1}{2} Z'_{1Rb\nu}(p) I_{R\nu}^*(p). \quad (16)$$

Impedancje operatorowe połączeń czołowych klatki wirnika:

$$Z'_{1Rb\nu}(p) = \mathcal{V}_\nu^2 \left\{ 2 \left[ R_r + 2R_w \sin^2 \left( \frac{\pi}{N} p_b \nu \right) \right] + \dots \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + p \cdot 2 \left[ L_{1r} + 2 L_{1wo} \sin^2 \left( \frac{\pi}{N} p_b v \right) \right] \} = \\
 & = v^2 \left[ R_{Rcv} + p L_{1Rbv} \right] = R'_{Rcv} + p L'_{1Rbv} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Z warunków brzegowych (16) wyznacza się stałe rozwiązania ogólnego

$$C_{1v} = C_{2v} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{Z'_{1Rbv}(p) I'_{Rv}(p)}{R'_{qv} \sqrt{A'_v(p)} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \sqrt{A'_v(p)}} \quad (18)$$

oraz funkcję rozkładu prądu w blachach wirnika

$$I'_{Rv}(p, z) = -\frac{B'_v(p)}{A'_v(p)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Z'_{1Rbv}(p)}{R'_{qv} \sqrt{A'_v(p)}} \cdot \frac{\operatorname{ch} z \sqrt{A'_v(p)}}{\operatorname{sh} z \sqrt{A'_v(p)}} I'_{Rv}(p) \quad (19)$$

Łatwo zauważyć, że przy zerowej impedancji pierścieni zwierających  $Z'_{1Rbv}(p) = 0$  rozkład przestrzenny prądu  $I'_{Rv}(p, z)$  jest równomierny i nie zależy od rezystywności blach  $R_q$

$$I'_{Rv}(p, z) = I'_{Rv}(p) = -\frac{B'_v(p)}{A'_v(p)} = -\frac{p L_v I'_{sv}(p)}{p L'_{Rbv} + Z'_{pv}(p) l_1} \quad (20)$$

skąd

$$p L_v I'_{sv}(p) + I'_{Rv}(p) \left[ p L'_{Rbv} + Z'_{pv}(p) l_1 \right] = 0 \quad (21)$$

Równanie (21) dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej ma w tym przypadku postać identyczną z tą, jaką uzyskuje się przy założeniu  $R_q = \infty$ .

#### 4. Przykładowe obliczenie rozkładu gęstości prądu upływu w stanie ustalonym

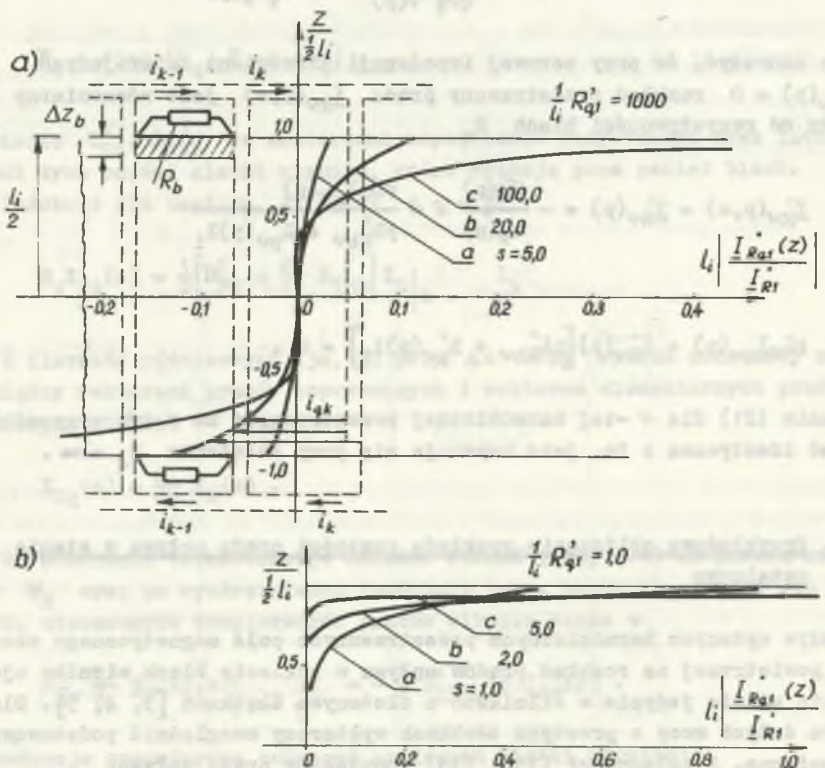
Wpływ wyższych harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego szczeliny powietrznej na rozkład prądów upływu w pakiecie blach wirnika ujawnia się silnie jedynie w silnikach o złożonych żłobkach [3, 4, 5]. Dla maszyn dużych mocy o prostych żłobkach wystarczy uwzględnić podstawową harmoniczną. Z zależności (15), (19) kompleksor prądu upływu:

$$I'_{Rq1}(z) = \frac{d}{dz} I'_{R1}(z) = -\frac{1}{2l_1} \cdot \frac{Z'_{1Rb1}(p)}{I_1 R'_{q1}} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{2z}{l_1} \sqrt{A'_1(p)}}{\operatorname{sh} \frac{l_1}{2} \sqrt{A'_1(p)}} I'_{R1}(p) \quad (22)$$

Całkowity prąd przepływający przez pakiet blach a omijający pierścienie zawierające klatki wirnika:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Rz1}^*(p) &= \int_0^{\frac{1}{2}l_1} \underline{I}_{Rq1}^*(z) dz = \\ &= \left[ -\frac{z'_{1Rb1}(p)}{8R'_{q1} \underline{I}_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}\sqrt{A_1(p)} \operatorname{cth} \frac{1}{4}\sqrt{A_1(p)}} \underline{I}'_{R1}(p) \right] \cdot \end{aligned} \quad (23)$$

W stanie ustalonym silnika zasilanego z sieci symetrycznej i pracującego z poślizgiem  $s$  gęstość prądu  $\underline{I}_{Rq1}^*(z)$  oraz całkowity prąd pakietu  $\underline{I}_{Rz1}^*(p)$  dla każdej wartości  $z$  są zmienne sinusoidalnie o częstotliwości katowej  $\omega_R = s\omega_0$ .



Rys. 3. Rozkład wartości bezwzględnej kompleksora gęstości prądu upływu wzdłuż pakietu blach w stanie ustalonym

Fig. 3. Absolute value distribution of the stray current density along the sheet pack in a steady state

Na rys. 3a, b i w tabeli 1 przedstawiono przykładowo rozkład wartości bezwzględnej gęstości prądu upływu  $|I_{Rq1}(z, p = j\omega_R)|$  oraz całkowitego prądu pakietu blach  $I_{Rz1}(z, p = j\omega_R)$  odniesione do wartości bezwzględnej kompleksora prądu pierścienia zwierającego  $I_{R1}(p = j\omega_R)$ . Obliczenia wykonano dla silnika SZJr-138 r, dla którego  $L'_{Rb1} = 0,59179H$ ;  $R'_{Rc1} = 0,42$ ,  $L'_{1Rb1} = 0,00379H$ . Impedancję pręta trapezowego o współczynniku zwężenia  $\beta = 0,375$ , wysokości  $h = 0,035$  m i szerokości przy szczyrbinie  $b = 0,003$  obliczano przyjmując trzy wyrazy rozwinięcia funkcji przejścia  $G_p(t)$  w szereg funkcji własnych [6] (oznacza to zastąpienie wirnika głębokożłobkowego równoważnym wirnikiem z trzema obwodami o zastępczych parametrach skupionych). Wartość rezystancji  $\frac{1}{I_1} R'_{q1}$  zależy w głównej mierze od rezystancji styku pomiędzy prętem a pakietem blach i obliczana była z zależności:

$$\frac{1}{I_1} R'_{q1} = \alpha_1^2 \frac{r_q}{S_q} \quad (24)$$

gdzie:

- $r_q$  - rezystancja na jednostkę powierzchni styku,
- $S_q$  - powierzchnia styku pręta z pakietem blach.

Tabela 1

| $\frac{1}{I_1} R'_{q1}$ | s     | $\frac{I_{Rz1}}{I_{R1}} = \frac{1}{I_{R1}} \int_0^{i/2} I_{Rq1}(z) dz$ |
|-------------------------|-------|--|
| 100Ω                    | 5,0   | 0,005 e <sup>j 0,71</sup>  |
|                         | 20,0  | 0,022 e <sup>j 1,45</sup>  |
|                         | 100,0 | 0,0532 e <sup>j 1,57</sup>   |
| 1Ω                      | 1,0   | 0,0217 e <sup>j 0,45</sup>   |
|                         | 2,0   | 0,0619 e <sup>j 0,62</sup>   |
|                         | 5,0   | 0,0969 e <sup>j 0,72</sup>   |

Wartości parametru  $r_q$  zawierają się w bardzo szerokich granicach i wynoszą od  $10^{-7}$  do  $10^{-2} \Omega m^2$ . Zależą one przede wszystkim od technologii wykonania wirnika. Najmniejsze wartości dotyczą silników z kłatkami odlewanyymi z aluminium. W zamieszczonych powyżej przykładowych obliczeniach przyjęto  $r_q = 0,2 \cdot 10^{-6}$  oraz  $r_q = 0,2 \cdot 10^{-4} \Omega m^2$ . W przypadku prętów wykonanych z miedzi parametr  $r_q$  rośnie wraz z upływem czasu eksploatacji maszyny na skutek iskrzenia i reakcji chemicznych za-

chodzących na styku pręta i pakietu blach (szczególnie na jego krańcach, gdzie gęstość prądu upływu jest największa - rys. 3).

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że dla malejących wartości rezystancji  $\frac{1}{l_1} R'_{q1}$  oraz przy wzroście poślizgu rośnie wartość prądu przepływającego przez pakiet blach. Jednocześnie wzrasta niejednorodność gęstości tego prądu (wypieranie prądu do krańców pakietu blach).

### 5. Równania obwodów stojana i wirnika

Na krańcach pakietu blach wirnika elementarne prądy oczkowe są równe odpowiednim prądom pierścieni zwierających:

$$\underline{I}'_{R1}(p, z = \frac{l_1}{2}) = \underline{I}'_{R1}(p, z = -\frac{l_1}{2}) = \underline{I}'_{R1}(p) . \quad (25)$$

Po wykorzystaniu zależności (25) we wzorze (19) otrzymuje się równanie wiążące kompleksor prądu pierścieni zwierających  $\underline{I}'_{R1}(p)$  z prądem stojana, w którym działanie zwierające pakietu blach objawia się przez zmianę impedancji połączeń czołowych  $Z'_{1Rb1}(p)$ :

$$-pL_1 \underline{I}_S(p) = \left[ pL'_{Rb1} + l_1 Z'_{p1}(p) + Z'_{1Rb1} H'_1(p) \right] \underline{I}'_{R1}(p) \quad (26)$$

gdzie:

$$H'_1(p) = \frac{l_1}{2} \sqrt{A'_1(p)} \operatorname{cth} \frac{l_1}{2} \sqrt{A'_1(p)} .$$

Równanie to obowiązuje dla wielkości wyrażonych na płaszczyźnie wirnika  $\omega_x = \omega$ . Kompleksor napięcia stojana wyraża się jako sumę spadków napięć na rezystancji i indukcyjnościach stojana oraz napięć indukowanych od elementarnych odcinków wirnika, która w granicy  $\Delta z \rightarrow dz$  staje się całką podług długości pakietu blach:

$$\underline{U}_S(p) = R_S \underline{I}_S(p) + pL_S \underline{I}_S(p) + p \int_{-l_1/2}^{l_1/2} \underline{I}'_{R1}(p) dz \quad (27)$$

gdzie  $\underline{I}'_{R1}(p) = \underline{I}'_{R1}(p-j\omega)$ ; (przy założeniu  $\omega = \text{const}$ ).

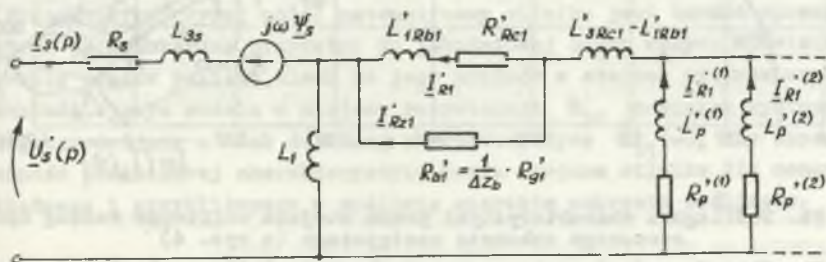
Po wykonaniu całkowania:

$$\underline{U}_S(p) = R_S \underline{I}_S(p) + pL_S \underline{I}_S(p) + pL_1 \left\{ 1 - \frac{Z'_{1Rb1}(p - (p-j\omega)L'_{Rb1} + l_1 Z'_{p1}(p))}{(p-j\omega)L'_{Rb1} + l_1 Z'_{p1}(p)} \cdot [H_1(p) - 1] \right\} \underline{I}'_{R1}(p) \quad (28)$$

Równanie to obowiązuje dla wielkości elektromagnetycznych sprowadzonych na płaszczyznę stojana  $\omega_x = 0$ . Układ równań (26), (28) wirnika i stojana opisuje stan obwodów maszyny przy uwzględnieniu upływności prądu przez pakiet blach wirnika. Nadaje się on do analizy własności maszyny w stanach ustalonych. Wykorzystanie tych równań do analizy dowolnych stanów nieustalonych wymagałoby żmudnego obliczania transformaty odwrotnej ich rozwiązania operatorowego.

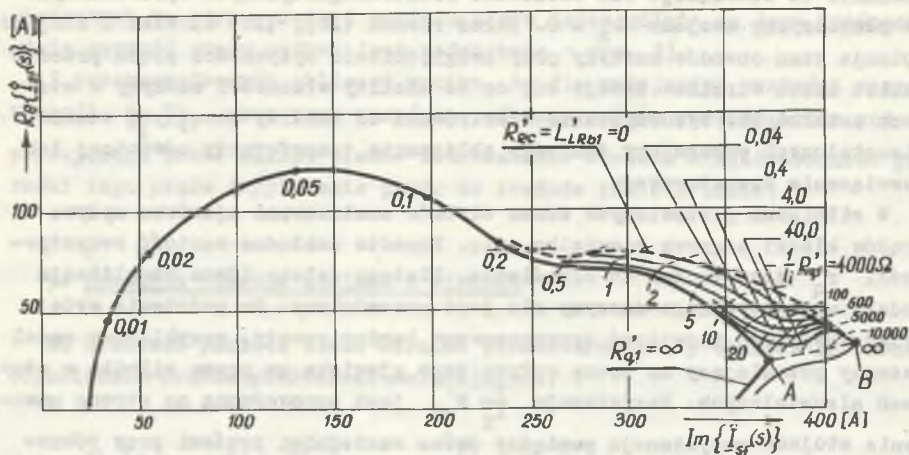
W silnikach pozbawionych skosu żłobków analizowane zjawisko upływu prądów klatki odgrywa niewielką rolę. Ponadto dokładna wartość rezystywności  $r_q$  jest trudna do określenia. Dlatego daleko idąca komplikacja modelu matematycznego maszyny nie jest uzasadniona. Na podstawie wyżej przedstawionych rozwiązań zaproponowano bardzo prosty, przybliżony model maszyny pozwalający na ocenę wpływu tego zjawiska na pracę silnika w stanach nieustalonych. Rezystancja  $\frac{1}{l_1} R'_{q1}$  jest sprowadzoną na stronę uzwojenia stojana rezystancją pomiędzy dwoma sąsiednimi prętami przy równomiernym rozkładzie gęstości  $\underline{I}_{Rq}(z)$ .

Przedstawiona wyżej analiza pozwala przyjąć założenie upraszczające, że całkowity prąd upływu przy nierównomiernym rozkładzie gęstości  $\underline{I}_{Rz1} = \int_0^{\frac{1}{2} l_1} \underline{I}_{Rq1}(z) dz$  jest skupiony w zewnętrznych partiach pakietu blach o grubości  $\Delta z_b$  obszaru zakreskowanego na rys. 3a. Wyodrębnionym odcinkom ferromagnetyka odpowiada skupiona rezystancja  $R'_{b1} = \frac{1}{\Delta z_b} R_{q1}$ . W rezultacie otrzymuje się schemat zastępczy silnika, w którym wspomniana rezystancja bocznikuje połączenia czołowe klatki (impedancja prętów umieszczonych w głębokich żłobkach wirnika jest w nim zaprezentowana przez dwa obwody zastępcze o parametrach  $L'_p(1), R'_p(1), L'_p(2), R'_p(2)$  [2, 6]).



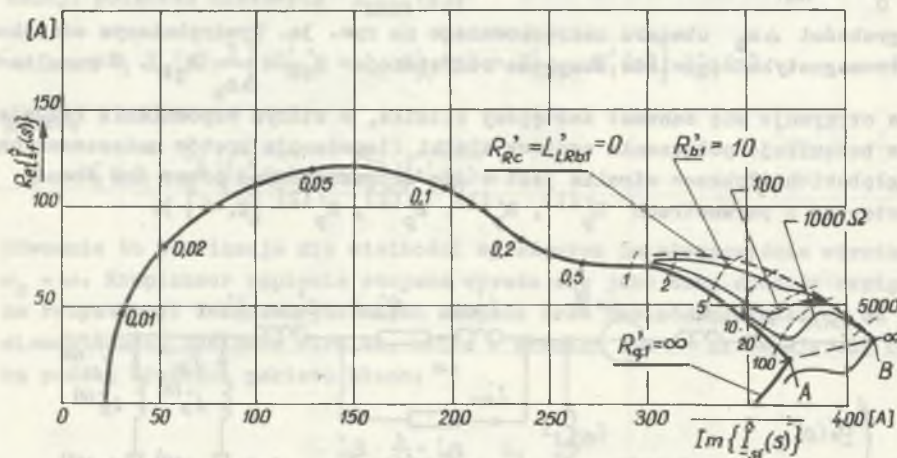
Rys. 4. Uproszczony schemat zastępczy silnika przy uwzględnieniu zjawiska upływu przez pakiet blach wirnika

Fig. 4. Simplified equivalent circuit of the motor with regard of the current leakage through the rotor sheet pack



Rys. 5a. Poślizgowe charakterystyki prądu stojana obliczone wg zależności (26), (28)

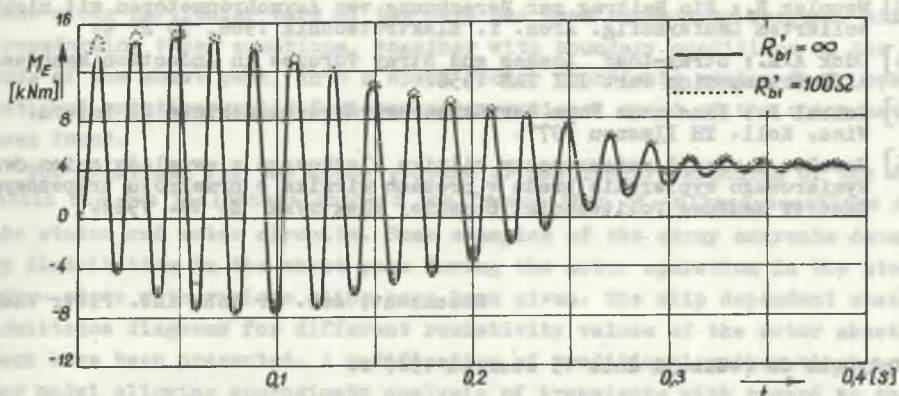
Fig. 5a. Slip dependent stator current characteristics calculated according to the formula (26), (28)



Rys. 5b. Poślizgowe charakterystyki prądu stojana obliczone według uproszczonego schematu zastępczego (z rys. 4)

Fig. 5b. Slip dependent stator current characteristics calculated according to the simplified equivalent diagram

Na rys. 5a przedstawiono rodzinę charakterystyk poślizgowych prądu stojana obliczonych według ścisłych równań (26), (28), dla silnika SZJr-138; rys. 5b przedstawia te charakterystyki obliczone dla uproszczonego schematu zastępczego z rys. 4. Niezależnie od wartości rezystancji  $R'_{b1}$ ,



Rys. 6. Przebieg momentu elektromagnetycznego podczas rozruchu obliczony z zastępczego układu równań różniczkowych zwyczajnych odpowiadających schematowi z rys. 4

Fig. 6. Transient of electromagnetic torque during starting of the motor, calculated from the equivalent set of ordinary differential equations corresponding with the equivalent circuit in Fig. 4

dla poślizgów  $s \rightarrow \infty$  charakterystyki te zbliżają się do charakterystyki odpowiadającej zerowej impedancji połączeń czołowych klatki  $L'_{LRb1} = R'_{Rc1} = 0$  (linia przerywana). Deformacja charakterystyk połączeń czołowych klatki jest znacząca jedynie dla bardzo dużych wartości poślizgów i jest tym większa, im większa jest wartość  $L'_{LRb1}$ .

Na rys. 6 przedstawiono przykładowe porównanie przebiegu momentu elektromagnetycznego podczas rozruchu obliczonego wg modelu matematycznego odpowiadającego uproszczonemu schematowi z rys. 4, dla  $R'_{b1} = 100 \Omega$  oraz dla  $R'_{b1} = \infty$ .

Przedstawiony wyżej model matematyczny silnika jest bardzo uproszczony. Jest on jednak bardzo przydatny do jakościowej oceny wpływu zjawiska wypierania prądów pakietu blach do jego krańców w stanach nieustalonych. W dokładniejszym modelu w miejscu rezystancji  $R'_{b1}$  powinien występować zastępczy dwójnik o tak dobranej charakterystyce  $Z'_{b1}(\omega)$ , aby zapewnić zgodność poślizgowej charakterystyki prądu stojana silnika dla momentu dokładnego i przybliżonego w możliwie szerokim zakresie poślizgów.

#### LITERATURA

- [1] Paszek W.: Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1986.
- [2] Paszek W., Pawelec Z.: Parametry elektromagnetyczne maszyny indukcyjnej o wirniku głębokożłobkowym z prętami klinowymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka, Zesz. nr 87, 1983.

- [3] Weppler R.: Ein Beitrag zur Berechnung von Asynchronmotoren mit nichtisolierendem Läuferkäfig. Arch. f. Elektrotechnik 1966, 50 Nr 4.
- [4] Odok A.M.: Stray-Load Losses and Stray Torques in Induction Machines. AIEE Transaction Part III PAS 1958.
- [5] Smikal F.: Eine neue Form der Stromverdrängungsmaschinen 22 Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau 1977.
- [6] Pawelec Z.: Model matematyczny silnika klatkowego z uwzględnieniem dwuwymiarowego wypierania prądu w prętach wirnika o przekroju trapezowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka Z. 87. 1983.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Piotr Wach

Wpłynęło do redakcji dnia 15 czerwca 1987 r.

ВЛИЯНИЕ ТОКОВ УТЕЧКИ МЕЖДУ СТЕРЖНЯМИ РОТОРА НА ПАРАМЕТРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

#### Р е з ю м е

Предполагая конечное значение сопротивления стали ротора сформулирована неоднородная система дифференциальных уравнений для разложения плотности токов утечки между стержнями ротора асинхронного двигателя с беличей клеткой. Анализ учитывает тоже вытеснение тока по высоте стержней в глубоком пазе клетки. После трансформирования этих уравнений вместе с граничными условиями, к комплексной системе координат получены их операторные решения для постоянной скорости вращения ротора. Эти решения для пространственных векторов отдельных гармонических магнитного поля в воздушном зазоре, использованы для сформулирования уравнений напряжения статора и ротора. Представлены примеры разложения плотности токов в стали ротора для установленных режимов работы и диаграммы адмитанции статора как функции скольжения для различных сопротивлений стали ротора. Предположена модификация математической модели двигателя для приближенного анализа влияния этих токов утечки на работу машины в неуставленном режиме работы.

INFLUENCE OF LEAKAGE CURRENTS IN THE SHEET PACK OF THE ROTOR ON PARAMETERS OF THE INDUCTION MOTOR MATHEMATICAL MODEL

#### S u m m a r y

On the assumption of finite resistivity of the sheet pack of the rotor magnetic circuit a set of non homogenous differential equations of the second order describing density distribution of the stray currents between the rotor squirrel-cage bars of a deep-slotted rotor have been formulated. Simultaneously, the phenomenon of the current displace-



ment along particular bars of the cage has been taken into account. After transforming these equations, together with boundary conditions at the ends of the sheet pack, into a space vector coordinate system their operational solutions valid for constant rotational speed of the rotor have been found.

The solutions for the space vectors of particular harmonics of the magnetic air gap field have enabled the formulation of voltage equations of the stator and rotor circuits. Some examples of the stray currents density distribution in the sheet pack during the motor operation in the steady - state with various slips have been given. The slip dependent stator admittance diagrams for different resistivity values of the rotor sheet pack have been presented. A modification of traditional mathematical motor model allowing approximate analysis of transients with regard to the rotor leakage currents has been suggested.

4. Wyniki

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki badań nad wpływem prądów pakietu blach wirnika na charakterystyki silnika indukcyjnego. Wyliczono i przedstawiono przykładowe rozkłady gęstości prądów strasznych w pakiecie blach wirnika dla różnych wartości przesłaj. Wykresy zależności impedancji statora od przesłaj dla różnych wartości rezystywności pakietu blach wirnika.

Wyniki badań nad wpływem prądów pakietu blach wirnika na charakterystyki silnika indukcyjnego. Wyliczono i przedstawiono przykładowe rozkłady gęstości prądów strasznych w pakiecie blach wirnika dla różnych wartości przesłaj. Wykresy zależności impedancji statora od przesłaj dla różnych wartości rezystywności pakietu blach wirnika.

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki badań nad wpływem prądów pakietu blach wirnika na charakterystyki silnika indukcyjnego. Wyliczono i przedstawiono przykładowe rozkłady gęstości prądów strasznych w pakiecie blach wirnika dla różnych wartości przesłaj. Wykresy zależności impedancji statora od przesłaj dla różnych wartości rezystywności pakietu blach wirnika.