

Zygmunt GARCZARZYK

GLOBALNIE ZBIEŻNA ANALIZA HYBRYDOWA

Streszczenie. W pracy przedstawiono globalnie zbieżny algorytm analizy hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych oparty na metodzie kontynuacji. Algorytm ten posiada dwie fazy. W fazie pierwszej związany jest z rozwiązywaniem zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych stowarzyszonych ze zmodyfikowanymi homotopijnie równaniami hybrydowymi sieci. W fazie drugiej rozwiązuje się równania hybrydowe sieci metodą Newtona-Raphsona z przybliżeniem początkowym otrzymanym w fazie pierwszej. Użyteczność algorytmu zademonstrowano na przykładzie obliczeń numerycznych wybranego obwodu nieliniowego.

1. Wstęp

W pracy rozważone zostanie zagadnienie rozwiązania równań hybrydowych nieliniowej sieci rezystancyjnej o postaci:

$$F(x) = f(x) - Ax - b = 0$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}}_{\substack{n_1 \\ n_2}} \end{array} \right] \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie:

- $x \in \mathbb{R}^n$ - nieznaną wektor napięć i prądów rezystorów nieliniowych,
- A - macierz $n \times n$ reprezentująca część liniową obwodu,
- $f(\cdot)$ - odwzorowanie na \mathbb{R}^n reprezentujące charakterystyki rezystorów nieliniowych,
- b - stały wektor źródeł,
- n_1 - liczba uzależnionych napięciowo rezystorów należących do drzewa grafu sieci,
- n_2 - liczba uzależnionych prądowo rezystorów należących do przeciwdrzewa [1].

Skuteczne rozwiązanie równania (1) wybraną metodą iteracyjną wiąże się z wyborem punktu startowego.

W przypadku metody Newtona-Raphsona pojawia się zasadnicza przeszkoda związana z brakiem systematycznej metody wyboru punktu startowego. Trudność ta może być pokonana przez wykorzystanie metody kontynuacji, w której zamiast funkcji $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$, rozważa się specjalną funkcję $H(x, t): D \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $T = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$, zwaną homotopią, tzn.:

$$H(x(t), t) = 0, \quad x \in D, \quad t \in T \quad (2)$$

$$H(x, 1) = F(x), \quad H(x, 0) = E(x) \quad \forall x \in D \quad (3)$$

taką, że:

- rozwiązanie $x^0 = x(0)$ równania $E(x) = 0$ jest znane lub łatwo je uzyskać,
- rozwiązania $x(t)$ wyznaczane dla t rosnącego tworzą ścieżkę łączącą punkt $x(0)$ z rozwiązaniem $x^* = x(1)$ funkcji $F(x)$.

Niech

$$H^{-1} = \{[x, t] \mid H(x, t) = 0\} \quad (4)$$

oznacza zbiór wszystkich rozwiązań $[x, t] \in \mathbb{R}^n$ układu $H(x, t) = 0$.

Z twierdzenia o funkcji niejawnej [2] wynika, że ścieżka homotopii istnieje, jeśli H jest regularna, tzn. macierz Jacobiego $H'(x, t) = \left[H'_x(x, t), \frac{\partial H}{\partial t} \right]$ ma maksymalny rząd dla każdego $[x, t] \in H^{-1}$.

2. Wyznaczanie ścieżki homotopii

Wprowadźmy oznaczenie:

$$w = [x, t] \quad (5)$$

tak, aby:

$$w_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad w_{n+1} = t.$$

Następnie, niech H'_{-i} oznacza częściową macierz Jacobiego utworzoną z pełnej macierzy H przez usunięcie i -tej kolumny.

Zauważmy, że istnieje $n+1$ macierzy H'_{-i} , ponadto:

$$H'_{-(n+1)} = H'_x(x, t). \quad (6)$$

Przyjmujemy, że $w = [x, t]$ zależy od parametru s , który można interpretować jako drogę przebytą wzdłuż ścieżki homotopii, tzn.:

$$w(s) = [x(s), t(s)] \quad \text{dla} \quad w(s) \in H^{-1} \quad (7)$$

Pokażemy, że jeśli funkcja H jest regularna i jest klasy C^2 , można wyznaczyć ścieżkę homotopii w H^{-1} rozwiązując zagadnienie początkowe o postaci [5]:

$$\dot{w}_i = (-1)^i \det H'_{-1}(w) = \varphi(w(s), s) \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (8)$$

$$w(s^0) = w^0 = [x^0, 0] \quad (9)$$

gdzie:

$$\dot{w}_i = \dot{w}_i(s) = \frac{dw_i}{ds}.$$

Ponieważ $H \in C^2$, więc $\det H'_{-1} \in C^1$ $i = 1, \dots, n+1$, zatem jeśli dodatkowo przyjąć, że funkcja $\varphi(w(s), s)$ spełnia warunek Lipschitza, to wiadomo [3], że istnieje dokładnie jeden układ funkcji $w_1(s), \dots, w_{n+1}(s)$ będących rozwiązaniem równania (8) i spełniających warunki początkowe (9).

Rozwiązanie to istnieje na pewnym przedziale zmiennej s obejmującym wartość początkową s^0 .

Jeżeli $w(s) \in H^{-1}$, to:

$$H(w(s)) = 0. \quad (10)$$

Różniczkując równanie (10) względem s , otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial w_i} \dot{w}_i(s) = 0. \quad (11)$$

Podstawiając wzór (8) do (11), mamy:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial w_i} [(-1)^i \det H'_{-1}] = 0. \quad (12)$$

Ponieważ H jest regularna, więc np. dla $i = 1$ macierz H'_{-1} jest nie-osobliwa.

Zatem:

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial w_i} \left[(-1)^i \det H'_{-i} \right] = \frac{\partial H}{\partial w_1} \det H'_{-1}. \quad (13)$$

Na podstawie wzorów Cramera dla $i = 2, \dots, n+1$ zachodzi:

$$(-1)^i \det H'_{-i} = \frac{1}{\det H'_{-1}} \det \left[\frac{\partial H}{\partial w_2}, \frac{\partial H}{\partial w_3}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial w_{i-1}}, \frac{\partial H}{\partial w_1} \det H'_{-1}, \frac{\partial H}{\partial w_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial w_{n+1}} \right]. \quad (14)$$

Po wyłączeniu czynnika $\det H'_{-1}$ i przestawieniu kolumn otrzymuje się:

$$(-1)^i \det H'_{-i} = \frac{\det H'_{-1} (-1)^i \det H'_{-i}}{\det H'_{-1}} = (-1)^i \det H'_{-i}, \quad (15)$$

a zatem równanie (8) spełnia (11), co oznacza, że rozwiązując równanie (8) dla danego $w(s^0) = w^0$, otrzymuje się ścieżkę homotopii $w(s) \in H^{-1}$.

Warto zauważyć, że podejście to pozwala wyznaczać ścieżkę homotopii także wtedy, gdy dla pewnej wartości t macierz $H'_x(x, t)$ jest osobliwa, co - jak wiadomo - stanowi główne ograniczenie dla ciągłej metody kontynuacji opartej na tzw. równaniu Dawidenki [2].

Przy rozwiązywaniu równania (8) należy zwrócić uwagę, jak zmienia się $\dot{t} = (-1)^{n+1} \det H'_x(x, t)$ przy zmianach parametru s , gdyż zależy nam na tym, by $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Proces obliczeniowy rozpoczyna się od $t = 0$.

Jeżeli więc $\dot{t} > 0$, to zwiększając s , zwiększamy t , jeżeli natomiast $\dot{t} < 0$, należy zmniejszać s , by zwiększać t .

Zatem jeśli $\dot{t}(s^0) < 0$, należy rozwiązywać układ równań:

$$\dot{w}_i = (-1)^{i+1} \det H'_{-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (16)$$

Uzyskanie dokładniej wartości rozwiązania $x(1)$ może wymagać stosowania małego kroku przy rozwiązywaniu równania (8), co zwiększyłoby czasochłonność procesu obliczeniowego. Dlatego całkuje się równanie (8) z maksymalnym krokiem Δs , by uzyskać rozwiązanie dla pewnej wartości $t_x \approx 1$, by następnie przyjąć je jako przybliżenie początkowe dla ciągu iteracji Newtona-Raphsona:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{\partial f(x^k)}{\partial x} - A \right]^{-1} (f(x^k) - Ax^k - b), \quad x^0 = x(t_x). \quad (17)$$

3. Homotopie równań hybrydowych

Aby uzyskać rodzinę równań (2), modyfikuje się obwód nieliniowy zastępując wszystkie rezystory uzależnione napięciowo przez równoległe połączenie liniowe rezystora o konduktancji $(1-t)y_k$ z rezystorem nieliniowym o charakterystyce $i_k = tg_k(u_k)$, $k = 1, \dots, n_1$. Podobnie wszystkie rezystory uzależnione prądowo są zastąpione szeregowym połączeniem liniowego rezystora o rezystancji $(1-t)z_k$ z rezystorem nieliniowym o charakterystyce $u_k = tr_k(i_k)$, $k = n_1+1, \dots, n_1+n_2$ [4].

Równania hybrydowe tego obwodu są następujące:

$$H(x, t) = tf(x) - Bx - b = 0 \quad (17)$$

z

$$B = A - (1-t)K \quad (18)$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array} \right] \quad (19)$$

gdzie:

$$Y = \text{diag} [y_1, y_2, \dots, y_{n_1}]$$

$$Z = \text{diag} [z_{n_1+1}, \dots, z_{n_1+n_2}]. \quad (20)$$

Przybliżenie początkowe x^0 uzyskuje się łatwo rozwiązując dla $t = 0$ układ równań liniowych:

$$E(x) = [A - K] x^0 + b = 0. \quad (21)$$

Macierz Jacobiego, która stanowi podstawę do formułowania układu równań, jest równa:

$$H'(x, t) = \left[t \frac{\partial f(x)}{\partial x} - A, f(x) - Kx \right]. \quad (22)$$

Równanie (2) można uzyskać również w następujący sposób:

$$H(x, t) = F(x) - (1-t)F(x^0) \quad (23)$$

Ponieważ

$$E(x) = F(x) - F(x^0), \quad (24)$$

zatem rozwiązanie $x^0 \in D$ może być dowolnie przyjęte.

Macierz Jacobiego w tym przypadku jest równa:

$$H'(x, t) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} - A, f(x^0) - Ax^0 - b \right]. \quad (25)$$

W obwodzie z elementami rezystancyjnymi pasywnymi $f(0) = 0$, więc przyjmując $x^0 = 0$, otrzymuje się:

$$H'(x, t) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} - A, -b \right]. \quad (26)$$

4. Przykłady

A) Przedstawione rezultaty wykorzystano do rozwiązania równań hybrydowych o postaci [4] :

$$\begin{bmatrix} g(u_1) \\ r(i_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$g(u_1) = 0,5 u_1 |u_1|,$$

$$r(i_2) = 0,25 i_2 |i_2|.$$

Macierze Jacobiego, na podstawie których formowane są równania (8), mają postać:

macierz (22)

$$H'(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{g}(u_1) + 0,5 + (1-t)y & 0,5 & g(u_1) - y u_1 \\ -0,5 & \dot{r}(i_2) + 1,5 + (1-t)z & r(i_2) - z i_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

macierz (25)

$$H'(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{g}(u_1) + 0,5 & 0,5 & g(u_1^0) + 0,5 u_1^0 + 0,5 i_2^0 - 1 \\ -0,5 & \dot{r}(i_2) + 1,5 & r(i_2^0) - 0,5 u_1^0 + 1,5 i_2^0 - 3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

gdzie:

$$\dot{g}(u_1) = \frac{dg(u_1)}{du_1}, \quad \dot{r}(i_2) = \frac{dr(i_2)}{di_2}.$$

W szczególności opierając się na macierzy (26) otrzymano układ równań o postaci:

$$\dot{u}_1 = -\dot{r}(i_2)$$

$$i_2 = -2 - \dot{g}(u_1) \quad (c)$$

$$\dot{t} = -1 - \dot{g}(u_1)\dot{r}(i_2) - 1,5 \dot{g}(u_1) - 0,5 \dot{r}(i_2)$$

z warunkiem początkowym:

$$u_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0, \quad t(0) = 0.$$

Ponieważ $\dot{t}(0) < 0$, rozwiązywano układ (c) w postaci (16). W tabeli zestawiono wyniki uzyskane przy rozwiązywaniu równań (8) utworzonych na podstawie macierzy (a) i (b).

Tabela 1

Macierz Jacobiego	$x(0)$	S	u_1	i_2	t_x
(a)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}^{(1)}$	0,005	0,2802544	1,6422668	$t(0,725) = 0,9994$
	$\begin{bmatrix} 0,153846 \\ 1,230769 \end{bmatrix}^{(2)}$	0,005	0,2718017	1,6371297	$t(0,265) = 0,9924$
(b)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,025	0,2640274	1,6201000	$t(0,725) = 0,9747$
		0,005	0,2771341	1,6422924	$t(0,725) = 0,9976$
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	0,01	0,2750000	1,6512000	$t(0,55) = 0,9798$
		0,005	0,2775000	1,6464167	$t(0,555) = 0,9918$
$\begin{bmatrix} 0,153846 \\ 1,230769 \end{bmatrix}$	0,005	0,2787483	1,6423877	$t(0,545) = 0,9977$	

$$(1) y = 0, \quad z = 0,$$

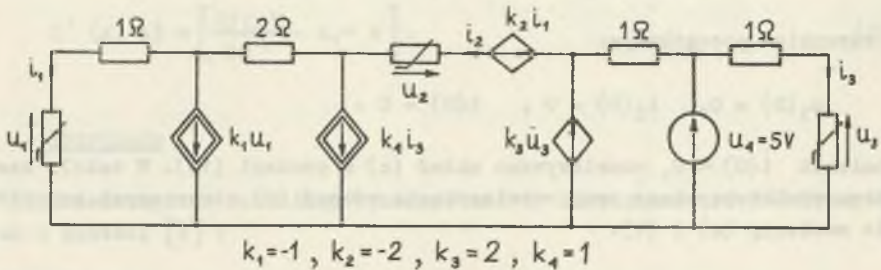
$$(2) y = 2, \quad z = 1.$$

Przyjmując wszystkie wyniki jako przybliżenie początkowe dla ciągu iteracji (17), uzyskiwano rozwiązanie:

$$u_1 = 0,2790562, \quad i_2 = 1,6430714$$

z błędem $\|\Delta x\|_1 < 10^{-7}$.

B) Rozważano także obwód nieliniowy przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Obwód nieliniowy

Fig. 1. Nonlinear circuit

Równania hybrydowe tego obwodu mają następującą postać [1]:

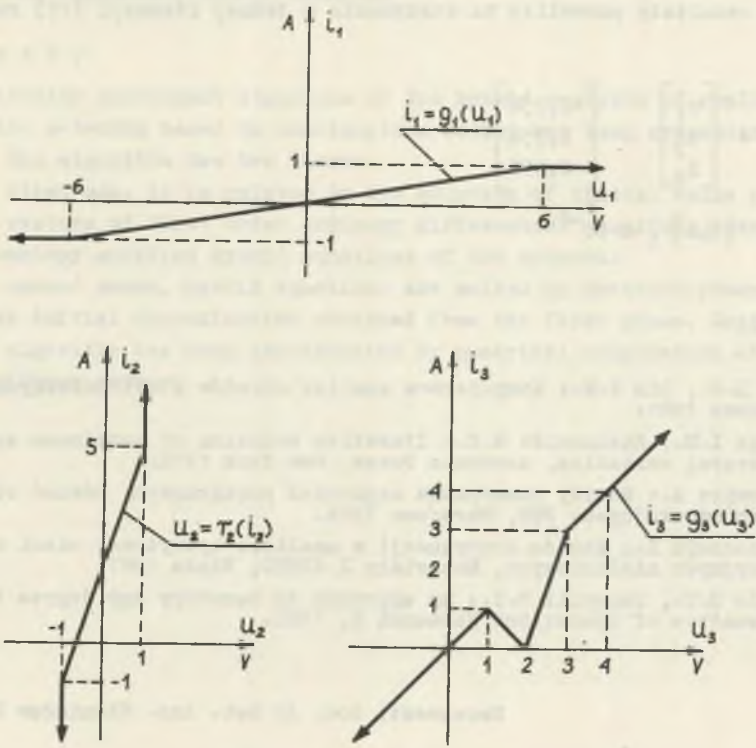
$$\begin{bmatrix} g_1(u_1) \\ g_3(u_3) \\ r_2(i_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = 0 \quad (d)$$

gdzie $g_1(u_1)$, $g_3(u_3)$, $r_2(i_2)$ reprezentują charakterystyki rezystorów nieliniowych pokazane na rys. 2.

Równanie (d) rozwiązywano wykorzystując opracowany ogólny program komputerowy rozwiązywania równań o postaci (1), zmodyfikowanych do homotopii (17) lub (23), na podstawie zależności (16) i (17). Program napisano w języku Fortran, wykorzystując procedury biblioteki systemu Odra 1305:

- obliczania wyznacznika macierzy - F4DET; do formowania równań różniczkowych o postaci (16) na podstawie macierzy (22) i (25),
- rozwiązywania równań (16) metodą Runge-Kutty 4-rzędu - F4RUNG,
- rozwiązywania układu równań liniowych - FPINDE, przy rozwiązywaniu równania (21) oraz przy poszukiwaniu kolejnych przybliżeń rozwiązania równania (1) na podstawie zależności (17).

W tabeli 2 przedstawiono wyniki rozwiązania równania (d) na podstawie zależności (16) dla przybliżenia startowego $x^0 = [0 \ 5 \ 0]$, co odpowiada macierzy $K=0$.



Rys. 2. Charakterystyki rezystorów nieliniowych
Fig. 2. Characteristics of nonlinear resistors

Tabela 2

Homotopia	Δs	$s(t_x)$	t_x
(17)	0,05	$\begin{bmatrix} -0,1263494 \\ 2,6167815 \\ 2,4899940 \end{bmatrix}$	$t(0,80) = 1,077$
	0,01	$\begin{bmatrix} -0,1369311 \\ 2,7315580 \\ 2,3834697 \end{bmatrix}$	$t(0,76) = 1,004$
(23)	0,05	$\begin{bmatrix} -0,1611111 \\ 2,6388889 \\ 2,4953704 \end{bmatrix}$	$t(0,85) = 1,046$
	0,01	$\begin{bmatrix} -0,1422222 \\ 0,2722222 \\ 2,3962963 \end{bmatrix}$	$t(0,82) = 1,020$

Uzyskane rezultaty pozwoliły na otrzymanie w jednej iteracji (17) rozwiązania:

$$x^* = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,150 \\ 2,750 \\ 2,375 \end{bmatrix}$$

z błędem $\| \Delta x \|_1 \leq 10^{-8}$.

LITERATURA

- [1] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.
- [2] Ortega I.M., Rheinboldt W.G.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York 1970.
- [3] Krupowicz A.: Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych. PWN, Warszawa 1986.
- [4] Garczarczyk Z.: Metoda kontynuacji w analizie hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych, Materiały X SPETO, Wisła 1987.
- [5] Garcia C.B., Zangwill W.I.: An approach to homotopy and degree theory, Mathematics of Operations Research 4, 1980.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do redakcji dnia 21 kwietnia 1988 r.

ГЛОБАЛЬНО СХОДИМЫЙ ГИБРИДНЫЙ АНАЛИЗ

Резюме

В статье представлен алгоритм гибридного анализа нелинейных резистивных цепей. Алгоритм основан на методе продолжения решения по параметру. Алгоритм имеет две фазы. В первой он связан с решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка сопряженных с гомотопийно модифицированными гибридными уравнениями цепи. Во второй фазе решаются гибридные уравнения методом Ньютона - Рафсона с первоначальным приближением, полученным в первой фазе. Полезность алгоритма показывает пример численного расчета нелинейной цепи.

A GLOBALLY CONVERGENT HYBRID ANALYSIS

Summary

A globally convergent algorithm of the hybrid analysis of nonlinear resistive networks based on continuation method has been presented in the paper. The algorithm has two phases.

In the first one, it is related to the solution of initial value problem of the systems of first order ordinary differential equations associated with homotopy modified hybrid equations of the network.

In the second phase, hybrid equations are solved by Newton-Raphson method with the initial approximation obtained from the first phase. Usefulness of the algorithm has been demonstrated by numerical computation of a chosen nonlinear network.